ANNALEN
DER
PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 69
DER GANZEN REIHE 374. BAND

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT VIER FIGURENTAFELN

1922

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

BS.

Quem 7d
9.5.8
0.21-

WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY
58329

Inhalt.

Vierte Folge. Band 69.

Siebzehntes Heft.

		Seite
1.	Gustav Mie. Träge und schwere Masse	1
2.	Karl F. Herzfeld. Absolute Entropie und chemische Konstante	54
3.	Fritz Kirchner. Strukturuntersuchungen mit Röntgenstrahlen (Hierzu Tafel 1)	59

Ausgegeben am 19. Oktober 1922.

Achtzehntes Heft.

1.	Eugen Stoll. Die Dispersion der Luft und ihrer Hauptbestandteile im Spektralintervall: 4388—9224 Å.-E.	81
2.	N. Kapzow. Über die Diffraktion Hertzscher Wellen in einem Raumgitter	112
3.	W. Romanoff. Über selektive Absorption elektrischer Wellen in Dielektrika	125
4.	H. Gieseler. Serienzusammenhänge im Bogenspektrum des Chroms	147

Ausgegeben am 2. November 1922.

Seite

Neunzehntes Heft.

1. A. Byk. Zur Quantentheorie der Gase und Flüssigkeiten . . 161
2. C. W. Oseen. Die Einsteinsche Nadelstichstrahlung und die Maxwellschen Gleichungen 202
3. P. O. Pedersen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtenbergschen Figuren und ihre Verwendung zur Messung sehr kurzer Zeiten. (Hierzu Tafel II und III.) 205
4. G. Szivessy. Über die Temperaturabhängigkeit der Dispersion der magnetischen Doppelbrechung 231

Ausgegeben am 16. November 1922.

Zwanzigstes Heft.

1. Edith Einstein. Zur Theorie des Radiometers 241
2. W. Esmarch. Eine Methode zur genauen Messung kleiner Widerstände 255
3. Karl F. Lindman. Über die durch ein aktives Raumgitter erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen 270
4. Max Wehrli. Funkenpotentiale im transversalen Magnetfelde 285
5. Victor Fischer. Eine Differentialform der Zustandsgleichung bei hohem Druck 315

Ausgegeben am 30. November 1922.

Einundzwanzigstes Heft.

1. W. Wien. Über eine Methode zur Trennung der Bogen- und Funkenlinien der Emissionsspektra. (Hierzu Tafel IV.) . . . 325
2. Gregor Wentzel. Zur Theorie der Streuung von β-Strahlen 335
3. Karl F. Herzfeld. Zur Theorie des Kerr- und Faradayeffektes 369
4. Richard Gans. Theorie der Thermionenströme 385

Ausgegeben am 12. Dezember 1922.

Seite

Zweiundzwanzigstes Heft.

1. K. Weissenberg. Statistische Anisotropie in kristallinen Medien und ihre röntgenographische Bestimmung 409
2. A. Einstein. Bemerkung zu der Franz Seletyschen Arbeit „Beiträge zum kosmologischen System“ 436
3. Alfred Kalähne. Einwellige gekoppelte Schwingungssysteme 439
4. Fritz Born. Über Dampfdruckmessungen an reinem Argon . 473

Ausgegeben am 19. Dezember 1922.

Dreiundzwanzigstes und vierundzwanzigstes Heft.

1. Georg Joos. Theorie des Elektronenröhrengenerators . . . 505
2. Helmuth Kulenkampff. Über das kontinuierliche Röntgenspektrum 548
3. Hildegard Stücklen. Beobachtungen über das Funkenpotential 597
4. Hildegard Stücklen. Über den Einfluß von geringen Mengen Wasserdampf auf das Funkenpotential in Stickstoff 625

Namenregister zum Jahrgang 1922 628

Ausgegeben am 4. Januar 1923.

Nachweis zu den Figurentafeln

Tafel I. F. Kirchner.

„ II, III } P. O. Pedersen.

„ IV. W. Wien.

1922. № 17.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 69.

1. *Träge und schwere Masse;* *von Gustav Mie.*

1. Die Aufgabe, welche ich mir in der folgenden Arbeit gestellt habe, ist: die Einsteinsche Gravitationstheorie möglichst genau den Vorstellungen der Newtonschen Mechanik anzupassen, um so die Vergleiche zwischen den Folgerungen der Einsteinschen Theorie und denen der alten Gravitationstheorie möglichst anschaulich und leicht zu machen. Ich habe in meinen Arbeiten zur Theorie der Materie gezeigt[1]), daß das Begriffssystem der alten Mechanik von den bewegenden Kräften der Felder und von den Trägheitswiderständen bewegter „materieller Teilchen" sich trotz der tiefgreifendsten Veränderungen in der Vorstellung vom Wesen der Materie doch vollständig wieder aufbauen läßt, wenn man nur die eine — allerdings ungeheuer tiefgehende — Voraussetzung macht, daß das „materielle Teilchen" in dem betreffenden Raumgebiet genau ebenso existenzfähig ist, wie in einem völlig feldfreien Gebiet. Diese Voraussetzung ist für das Gravitationsfeld tatsächlich erfüllt, wenn die Einsteinsche Theorie der allgemeinen Transformierbarkeit der Gravitationsgleichungen richtig ist. Ich halte das für die wichtigste Konsequenz der Theorie, ja für den eigentlichen tiefsten Sinn der Theorie. Für das elektromagnetische Feld ist die Voraussetzung der unveränderten Existenzfähigkeit der materiellen Elementarteilchen höchst wahrscheinlich nicht erfüllt, jedenfalls nur mit gewissen Beschränkungen und Näherungen. Deswegen tritt im elektromagnetischen Feld an die Stelle der alten Mechanik die neue, noch wenig erforschte Quantenmechanik. Im Gravitationsfeld können wir dagegen ohne jede Schwierigkeit die Begriffe der alten Mechanik beibehalten.

Die Aufgabe, die ich mir stelle, zerfällt in zwei Teile: Erstens muß die Einsteinsche Gravitationstheorie in das

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 40. S. 1ff. u. S. 34ff. 1913.

Schema eingefügt werden, in welches sich nach meinen Untersuchungen zur Theorie der Materie alle physikalischen Grundgesetze einordnen lassen[1]), und zweitens müssen die in meiner dritten Arbeit (1913) entwickelten Methoden zur Berechnung der mechanischen Kräfte auf das gewonnene Schema der Einsteinschen Gravitationstheorie angewandt werden.

Kurze Darstellung der Einsteinschen Gravitationstheorie.

2. Der erste Teil der Arbeit kann naturgemäß nichts Neues bringen. Es müssen nur Gleichungen, die im wesentlichen schon bekannt sind, in das Schema, das ich brauche, eingeordnet werden. Um den Vergleich zwischen den von mir gebrauchten Buchstabenbezeichnungen und den anderswo üblichen Bezeichnungen zu erleichtern, werde ich mich immer auf das bekannte Buch von H. Weyl[2]) beziehen. Für die zeitliche Komponente, für welche Weyl den Index 0 eingeführt hat, werde ich den älteren Index 4 beibehalten.

Das Gravitationspotential ist in der Einsteinschen Theorie ein vierdimensionaler Tensor. Ich will die Komponenten dieses Tensorpotentials mit $\omega^{\mu\nu}$ bezeichnen. Später [Formel (9)] werden wir sehen, wie sich aus $\omega^{\mu\nu}$ die Maßzahlen $g^{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ gewinnen lassen. Die Feldstärke der Gravitation will ich mit $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ bezeichnen, $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Die erste Gruppe der Gravitationsgleichungen lautet dann:

$$\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu} = \frac{\partial \omega^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}. \tag{1}$$

Die Weltfunktion möge mit Φ bezeichnet werden, sie enthält die Variablen $\omega^{\mu\nu}$, $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$, $\mathfrak{F}_{ik}$, φ_i. Hier soll $\mathfrak{F}_{ik}$ der antisymmetrische Tensor oder Sechservektor des elektromagnetischen Feldes sein:

$$\mathfrak{F}_{12} = \mathfrak{h}_z, \quad \mathfrak{F}_{13} = -\mathfrak{h}_y, \quad \mathfrak{F}_{14} = -i \cdot \mathfrak{e}_x \quad \text{usw.}$$

und φ_i das elektromagnetische Viererpotential:

---

1) Man vgl. hierzu auch: G. Mie, Physik. Zeitschr. 15. S. 115 u. 169. 1914.

2) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie. 4. Aufl. Berlin 1921. Da meine Arbeit schon vor dem Erscheinen des II. Bandes der Relativitätstheorie von M. v. Laue fast fertig niedergeschrieben war, so verweise ich allein auf das Weylsche Buch.

$$\mathfrak{F}_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} .$$

Aus den Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta \int \Phi \cdot dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3 \cdot dx^4 = 0$$

folgt *die zweite Gruppe der Gravitationsgleichungen*[1]):

$$\frac{\partial \mathfrak{k}^a_{\mu\nu}}{\partial x^a} = - h_{\mu\nu}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{k}^a_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}_a}, \tag{3}$$

$$h_{\mu\nu} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega^{\mu\nu}} . \tag{4}$$

Wir werden im folgenden öfters den zu $\omega^{\mu\nu}$ reziproken Tensor $\omega_{\mu\nu}$ brauchen, der folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{cases} \omega_{\mu k} \cdot \omega^{k\nu} = \delta^\nu_\mu , \\ \delta^\nu_\mu = 0, \text{ wenn } \mu \neq \nu, \quad \delta^\nu_\mu = 1, \text{ wenn } \mu = \nu . \end{cases} \tag{5}$$

Die Determinante der $\omega^{\mu\nu}$ bezeichne ich mit ω:

$$\omega = |\omega^{\mu\nu}|, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\omega} = |\omega_{\mu\nu}|, \tag{7}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \omega^{\mu\nu}}; \quad \omega^{\mu\nu} = - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \omega_{\mu\nu}} . \tag{8}$$

Das Gravitationspotential $\omega^{\mu\nu}$ steht zu dem gewöhnlich in der Darstellung der Einsteinschen Theorie benutzten Tensor der Maßverhältnisse $g^{\mu\nu}$ und seinem Reziproken $g_{\mu\nu}$ in folgender Beziehung:

$$\begin{cases} \omega^{\mu\nu} = - \sqrt{g} \cdot g^{\mu\nu}, \\ \omega_{\mu\nu} = - \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}, \\ g = |g_{\mu\nu}| . \end{cases} \tag{9}$$

---

1) Vgl. G. Mie, Physik. Zeitschr. 15. S. 116 u. 117. 1914. Ich lasse im folgenden die Summenzeichen weg, wie es seit Einstein üblich ist.

$$\frac{\partial \mathfrak{k}^a_{\mu\nu}}{\partial x^a} \text{ bedeutet: } \sum_1^4 a \frac{\partial \mathfrak{k}^a_{\mu\nu}}{\partial x^a} .$$

Es ist leicht einzusehen, daß:

$$\omega = g. \tag{10}$$

Die Hamiltonsche Funktion Φ zerfällt in der Einsteinschen Theorie in zwei Summanden[1]):

$$\Phi = \mathfrak{G} + \mathfrak{L}, \tag{11}$$

von denen der erste, $\mathfrak{G}$, nur die Gravitationsgrößen, also die $\omega^{\mu\nu}$ und die $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ enthält, der zweite, $\mathfrak{L}$, dagegen die elektromagnetischen Größen, also die φ_i und die $\mathfrak{F}_{ik}$, und außerdem auch das Gravitationspotential $\omega^{\mu\nu}$. Zur Berechnung von $\mathfrak{G}$ werden gewöhnlich die folgenden Größen genommen[2]):

$$\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right). \tag{12}$$

Der Ausdruck für $\mathfrak{G}$ lautet dann folgendermaßen:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2} \cdot \omega^{\mu\nu} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right). \tag{13}$$

Durch ganz einfache Rechnungen bekommt man die folgenden Formeln:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \beta \end{matrix} \right\} - \omega^{\mu\tau} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha\tau \\ \nu \end{matrix} \right\} - \omega^{\nu\tau} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha\tau \\ \mu \end{matrix} \right\}. \tag{15}$$

Man kann nun leicht die Richtigkeit des folgenden Ausdruckes für $\mathfrak{G}$ beweisen:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{4} \cdot \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2}\, \delta_\nu^\alpha \cdot \left\{ \begin{matrix} \mu\tau \\ \tau \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2}\, \delta_\mu^\alpha \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu\tau \\ \tau \end{matrix} \right\} \right), \tag{16}$$

indem man für $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ den Ausdruck (15) einsetzt und nachweist, daß (16) mit (13) identisch ist. Im Prinzip ist es möglich, aus (15) die sämtlichen Größen $\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\}$ als homogene lineare Funktionen der $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ zu berechnen, deren Koeffizienten nur die $\omega^{\mu\nu}$ enthalten. Denkt man sich die Rechnung ausgeführt und die Ausdrücke in (16) eingesetzt, so erkennt man, daß $\mathfrak{G}$ eine ganze, homogene Funktion zweiten Grades in den $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ ist, deren

1) H. Weyl, a. a. O. S. 214. Gl. (27).
2) Ebenda S. 119, Gl. (56) und S. 218 Gl. (31).

Koeffizienten homogene gebrochene Funktionen vom Grade -1 in den $\omega^{\mu\nu}$ sind. Aus den Eigenschaften der ganzen homogenen Funktionen folgt, daß:

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathfrak{G} = \frac{1}{2}\, \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha, \\ \mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha = \dfrac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}}. \end{cases}$$

Aus (16) ergibt sich nun:

$$(18)\qquad \mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\,\delta_\nu^\alpha \cdot \left\{\begin{matrix}\mu\tau\\ \tau\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\,\delta_\mu^\alpha \cdot \left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \tau\end{matrix}\right\}\right).$$

Aus (18) folgt:

$$(19)\qquad \left\{\begin{matrix}\mu\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\} = -\frac{4}{3} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\alpha}^\alpha,$$

$$(20)\qquad \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} = 2 \cdot \left(\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{3}\,\delta_\mu^\alpha \cdot \mathfrak{k}_{\nu\tau}^\tau - \frac{1}{3}\,\delta_\nu^\alpha \cdot \mathfrak{k}_{\mu\tau}^\tau\right).$$

Setzt man dies in (15) und (17) ein:

$$(21)\qquad \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu} = -2\omega^{\mu\tau}\cdot\left(\mathfrak{k}_{\alpha\tau}^\nu - \frac{1}{3}\,\delta_\alpha^\nu\,\mathfrak{k}_{\tau\beta}^\beta\right) - 2\omega^{\nu\tau}\cdot\left(\mathfrak{k}_{\alpha\tau}^\mu - \frac{1}{3}\,\delta_\alpha^\mu \cdot \mathfrak{k}_{\tau\beta}^\beta\right).$$

$$(22)\qquad \mathfrak{G} = -2\cdot\omega^{\mu\nu}\cdot\left(\mathfrak{k}_{\mu\alpha}^\beta \cdot \mathfrak{k}_{\nu\beta}^\alpha - \frac{1}{3}\cdot\mathfrak{k}_{\mu\alpha}^\alpha \cdot \mathfrak{k}_{\nu\beta}^\beta\right).$$

Wir haben hiermit $\mathfrak{G}$ als Funktion der $\omega^{\mu\nu}$ und der $\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha$ explizite ausgerechnet. Übrigens ist leicht zu sehen, daß:

$$(23)\qquad \mathfrak{k}_{\mu\alpha}^\beta \cdot \mathfrak{k}_{\nu\beta}^\alpha - \frac{1}{3}\,\mathfrak{k}_{\mu\alpha}^\alpha \cdot \mathfrak{k}_{\nu\beta}^\beta = -\frac{1}{4}\cdot\left(\left\{\begin{matrix}\mu\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\nu\beta\\ \alpha\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \beta\end{matrix}\right\}\right),$$

daß also die Formeln (22) und (13) wirklich identisch sind. Ich will nun vorübergehend $\mathfrak{G}$, wenn es als Funktion von $\omega^{\mu\nu}$ und $\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha$ gegeben ist, mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen. Der Buchstabe $\mathfrak{G}$ soll bedeuten, daß die $\omega^{\mu\nu}$ und die $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ die unabhängigen Variablen sind.

Da

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{H} = \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}\cdot\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha \quad \text{und} \quad d\mathfrak{G} + d\mathfrak{H} = \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}\cdot d\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha + \mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha \cdot d\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu},$$

so folgt, wenn man berücksichtigt, daß:

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}} = \mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha, \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha} = \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \omega^{\mu\nu}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \omega^{\mu\nu}}.$$

So bekommen wir nun endlich aus (22) und 23:

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \omega^{\mu\nu}} = 2 \cdot \left(\mathfrak{k}^{\beta}_{\mu\alpha} \cdot \mathfrak{k}^{\alpha}_{\nu\beta} - \dfrac{1}{8} \cdot \mathfrak{k}^{\alpha}_{\mu\alpha} \cdot \mathfrak{k}^{\beta}_{\nu\beta} \right) \\ \qquad\qquad = -\dfrac{1}{2} \left(\begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{Bmatrix} \right). \end{cases}$$

Es ist also:

$$(25)\quad h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{Bmatrix} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega^{\mu\nu}}.$$

Wenn man die nunmehr gefundenen Werte der $\mathfrak{k}^{\alpha}_{\mu\nu}$ nach (18) und der $h_{\mu\nu}$ nach (25) in die Gravitationsgleichungen (2) einsetzt, so bekommt man in der Tat die Einsteinschen Gravitationsgleichungen.

3. Über den zweiten Summanden $\mathfrak{L}$ der Hamiltonschen Funktion Φ sagt die Einsteinsche Theorie aus, daß in ihm die unabhängigen Variabeln $\mathfrak{F}_{ik}$ und φ_i zusammen mit den $g^{\mu\nu}$ nur in solchen Verbindungen vorkommen, die gegen alle Transformationen invariant sind. Aus der Invariantentheorie ist bekannt, wie eine solche Verbindung aussehen muß. Ihr allgemeiner Typus ist:

$$u = g^{k_1 k_2} \cdot g^{k_3 k_4} \ldots,\ g^{k_{n-1} k_n} \cdot \mathfrak{F}_{k_\alpha k_\beta} \cdot \mathfrak{F}_{k_\gamma k_\delta} \ldots,\ \varphi_{k_\mu} \cdot \varphi_{k_\nu} \ldots,$$

wo die unteren Indizes $k_\alpha, k_\beta \ldots, k_\mu \ldots$ dieselben sind, wie die oberen Indizes $k_1, k_2 \ldots$, nur in anderer, beliebiger Reihenfolge und beliebig auf die Feldgrößen $\mathfrak{F}_{ki}$ und die Potentiale φ_i verteilt. Über die sämtlichen Indizes $k_1, k_2 \ldots, k_n$ ist von 1 bis 4 zu summieren.[1]) Außerdem enthält $\mathfrak{L}$ noch den Faktor $\sqrt{g}$, es ist also zu setzen:

$$\mathfrak{L} = \sqrt{g} \cdot L(u),$$

wo $L(u)$ eine Funktion sein soll, welche nur Variabeln u der eben hingeschriebenen Form enthält. Ich will nun die folgende Größe betrachten:

---

1) Unter den so definierten Größen u gibt es im allgemeinen noch viele, die wegen der Antisymmetrie von $\mathfrak{F}_{ik}$ identisch Null sind, z. B.

$$g^{k_1 k_2} \cdot \mathfrak{F}_{k_1 k_2} \quad \text{oder auch} \quad g^{k_1 k_2} \cdot g^{k_3 k_4} \cdot \mathfrak{F}_{k_1 k_2} \cdot \mathfrak{F}_{k_3 k_4}.$$

Für uns kommen natürlich nur solche u in Betracht, welche nicht identisch Null sind, wie z. B.

$$u = g^{k_1 k_2} \cdot g^{k_3 k_4} \cdot \mathfrak{F}_{k_1 k_3} \cdot \mathfrak{F}_{k_2 k_4}.$$

Diese Beschränkung hat auf die folgenden Überlegungen keinen Einfluß.

$$2 \cdot \omega^{ri} \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega^{si}} = \mathfrak{q}_s^r . \tag{26}$$

Zunächst läßt sich unter Benutzung der Formeln (5) bis (10) sehr leicht zeigen, daß:

$$2 \cdot \omega^{ri} \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega^{si}} = 2 \cdot g^{ri} \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{si}} - \delta_s^r \cdot g^{\mu\nu} \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} .$$

Setzt man ein $\mathfrak{L} = \sqrt{g} \cdot L(u)$ so bekommt man nach einer kleinen Rechnung:

$$\mathfrak{q}_s^r = \sqrt{g} \cdot \sum 2 \cdot \frac{\partial L}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial g^{si}} \cdot g^{ri} - \frac{1}{2} \delta_s^r \cdot \frac{\partial u}{\partial g^{\mu\nu}} \cdot g^{\mu\nu} \right) + \delta_s^r \cdot \sqrt{g} \cdot L,$$

wo die Summe über die sämtlichen Variabeln u zu nehmen ist, die in $L(u)$ vorkommen.

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} g^{ri} \cdot \frac{\partial u}{\partial g^{si}} + g^{ir} \cdot \frac{\partial u}{\partial g^{is}} &= g^{rk_1} \cdot g^{k_2 k_3} \ldots \left(\mathfrak{F}_{k_\alpha k_\beta} \cdot \mathfrak{F}_{k_\gamma k_\delta} \ldots \right)_{k_1 = s} \\ &+ g^{k_1 r} \cdot g^{k_2 k_3} \ldots \left(\mathfrak{F}_{k_\alpha k_\beta} \cdot \mathfrak{F}_{k_\gamma k_\delta} \ldots \right)_{k_2 = s} \\ &+ g^{k_1 k_2} \cdot g^{r k_3} \ldots \left(\mathfrak{F}_{k_\alpha k_\beta} \cdot \mathfrak{F}_{k_\gamma k_\delta} \ldots \right)_{k_3 = s} + \ldots \end{aligned}$$

Das heißt, in Worten ausgedrückt: Man hat aus den sämtlichen Summanden von u erstens diejenigen auszusuchen, in welchen $k_1 = s$, darauf die mit $k_2 = s$, dann $k_3 = s$ usw., zweitens hat man in all diesen Summanden jedesmal den oberen Index s durch r zu ersetzen, drittens hat man dann alle zu addieren. Ganz dasselbe bekommt man aber offenbar, wenn man erstens aus den sämtlichen Summanden von u diejenigen ausliest, in welchen $k_1 = r$, darauf diejenigen, in welchen $k_2 = r$ usw., zweitens jedesmal den *unteren* Index r durch s ersetzt, drittens alle so erhaltenen Ausdrücke addiert, oder mit anderen Worten, wenn man bildet:

$$\mathfrak{F}_{si} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{F}_{ri}} + \mathfrak{F}_{is} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{F}_{ir}} + \varphi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi_r} .$$

Wenn man nun endlich noch beachtet, daß:

$$g^{ri} \cdot \frac{\partial u}{\partial g^{si}} = g^{ir} \cdot \frac{\partial u}{\partial g^{is}},$$

$$\mathfrak{F}_{si} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{F}_{ri}} = \mathfrak{F}_{is} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{F}_{ir}},$$

so bekommt man:

$$2 \cdot g^{ri} \cdot \frac{\partial u}{\partial g^{si}} = 2 \cdot \mathfrak{F}_{si} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{F}_{ri}} + \varphi_s \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi_r}$$

und demnach:

$$(27) \qquad 2 \cdot g^{ri} \cdot \frac{\partial L}{\partial g^{si}} = 2 \cdot \mathfrak{F}_{si} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{F}_{ri}} + \varphi_s \cdot \frac{\partial L}{\partial \varphi_r} .$$

Der durch (27) ausgedrückte Satz ist von Hilbert[1]) entdeckt worden. Es schien mir von Wert zu sein, zu zeigen, mit wie elementaren Mitteln man diesen Satz aus der allgemein bekannten Form der Invarianten herleiten kann. Ich kehre nun zu unserer Funktion $\sqrt{g} \cdot L(u) = \mathfrak{L}$ zurück, um den Satz (27) auf die Größen $\mathfrak{q}_s^r$ anzuwenden. Wenn wir mit φ_i das Viererpotential und mit $\mathfrak{F}_{si}$ die Intensitätsgrößen des elektrischen Feldes bezeichnen, so sind die entsprechenden Quantitätsgrößen, also der Viererstrom ϱ^i und die Erregungsgrößen des Feldes $\mathfrak{H}^{ri}$ gegeben durch:

$$(28) \qquad \varrho^i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_i},$$

$$(29) \qquad \mathfrak{H}^{ri} = 2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{F}_{ri}} = 2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{F}_{ri}} .$$

In Formel (29) muß der Faktor (2) eintreten, weil $\mathfrak{F}_{ri}$ und $-\mathfrak{F}_{ir}$ dieselbe Feldgröße bedeutet.[2]) Es ist

$$\mathfrak{H}^{ri} = \partial \mathfrak{L} / \partial \mathfrak{F}_{ri} - \partial \mathfrak{L} / \partial \mathfrak{F}_{ir} \quad \text{und} \quad \partial \mathfrak{L} / \partial \mathfrak{F}_{ri} = -\partial \mathfrak{L} / \partial \mathfrak{F}_{ir} .$$

Man bekommt also schließlich:

$$(30) \qquad \mathfrak{q}_s^r = \tfrac{1}{2} \delta_s^r \cdot (2 \cdot \mathfrak{L} - \mathfrak{H}^{\mu\nu} \cdot \mathfrak{F}_{\mu\nu} + \varrho^\nu \cdot \varphi_\nu) + (\mathfrak{H}^{ri} \cdot \mathfrak{F}_{si} - \varrho^r \cdot \varphi_s).$$

Und aus (26) folgt nun:

$$(31) \qquad 2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega^{\mu\nu}} = \omega_{\mu a} \cdot \mathfrak{q}_\nu^a = \omega_{\nu a} \cdot \mathfrak{q}_\mu^a .$$

Setzt man dies in (25) ein, so bekommt man die Einsteinschen Gravitationsgleichungen vollständig in ihrer ursprünglichen Form.

---

1) D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik. I. Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1915.

2) Wegen der Vorzeichen von ϱ^i und $\mathfrak{H}^{ri}$ vgl. man: G. Mie, Ann. d. Phys. 40. S. 33. 1913. Es ist z. B. $\mathfrak{F}_{12} = \mathfrak{h}_z$, $\mathfrak{H}^{12} = \mathfrak{h}_z$ usw., $\varphi_1 = \mathfrak{f}_x$, $\varrho^1 = \mathfrak{d}_x$ usw. in der dort gebrauchten Bezeichnungsweise.

4. Es gibt aber noch eine zweite Form der Gravitationsgleichungen, die für manche Zwecke besonders bequem ist. Nach (21) ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}^k_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\lambda &= -2\cdot\mathfrak{k}^k_{\mu\nu}\,[\omega^{\mu\tau}\cdot(\mathfrak{k}^\nu_{\lambda\tau}-\tfrac{1}{3}\delta^\nu_\lambda\cdot\mathfrak{k}^\beta_{\tau\beta})\\ &\qquad+\omega^{\nu\tau}\cdot(\mathfrak{k}^\mu_{\lambda\tau}-\tfrac{1}{3}\delta^\mu_\lambda\cdot\mathfrak{k}^\beta_{\tau\beta})]\\ &=-4\cdot\mathfrak{k}^\alpha_{\lambda\tau}\cdot\omega^{\tau\nu}\cdot(\mathfrak{k}^k_{\mu\nu}-\tfrac{1}{3}\delta^k_\mu\cdot\mathfrak{k}^\beta_{\nu\beta})\\ &=2\cdot\mathfrak{k}^\mu_{\lambda\tau}\cdot\mathfrak{g}^{k\tau}_\mu+4\cdot\omega^{k\alpha}\cdot(\mathfrak{k}^\mu_{\lambda\tau}\cdot\mathfrak{k}^\tau_{\mu\alpha}-\tfrac{1}{3}\mathfrak{k}^\alpha_{\lambda\alpha}\cdot\mathfrak{k}^\beta_{\alpha\beta}).\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (24), (11), (2), (4) bekommen wir schließlich:

$$\begin{aligned}2\cdot\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\omega^{k\tau}\cdot\mathfrak{k}^\alpha_{\lambda\tau})&=\mathfrak{k}^k_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\lambda+\omega^{k\tau}\cdot 2\cdot\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\omega^{\lambda\tau}}\\ &=\mathfrak{k}^k_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\lambda+\mathfrak{q}^k_\lambda.\end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung ergibt nun unter Benutzung von (30), (17), (11):

$$(32)\quad\left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(2\cdot\omega^{k\tau}\cdot\mathfrak{k}^\alpha_{\lambda\tau}-\delta^k_\lambda\cdot\omega^{\mu\nu}\cdot\mathfrak{k}^\alpha_{\mu\nu})\\ &\qquad=\delta^k_\lambda\cdot\Phi-\mathfrak{k}^k_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_\lambda-\mathfrak{H}^{ki}\cdot\mathfrak{F}_{\lambda i}+\varrho^k\cdot\varphi_\lambda.\end{aligned}\right.$$

Wenn man in diesen Gleichungen die früher[1]) von mir benutzten Bezeichnungen einführt:

$x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z,\ x^4=i\cdot t,$

$\mathfrak{F}_{23}=b_x,\ \mathfrak{F}_{31}=b_y,\ \mathfrak{F}_{12}=b_z,\ \mathfrak{F}_{14}=-i\cdot e_x,\ \mathfrak{F}_{24}=-i\cdot e_y,\ \mathfrak{F}_{34}=-i\cdot e_z,$
$\mathfrak{H}^{23}=\mathfrak{h}_x$ usw., $\mathfrak{H}^{14}=-i\cdot\mathfrak{d}_x$ usw.,

$\varphi_1=\mathfrak{f}_x,\ \varphi_2=\mathfrak{f}_y,\ \varphi_3=\mathfrak{f}_z,\ \varphi_4=i\cdot\varphi,$

$\varrho^1=\mathfrak{v}_x$ usw., $\varrho^4=i\cdot\varrho,$

$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_1=\mathfrak{g}^{\mu\nu}_x,\ \mathfrak{g}^{\mu\nu}_2=\mathfrak{g}^{\mu\nu}_y,\ \mathfrak{g}^{\mu\nu}_3=\mathfrak{g}^{\mu\nu}_z,\ \mathfrak{g}^{\mu\nu}_4=i\cdot u^{\mu\nu},$

$\mathfrak{k}^1_{\mu\nu}=\mathfrak{k}_{\mu\nu,x}$ usw., $\mathfrak{k}^4_{\mu\nu}=i\cdot w_{\mu\nu},$

so erkennt man sofort, daß die Ausdrücke auf den rechten Seiten identisch mit den Komponenten der „Weltmatrix“ oder des „Energie-Impulstensors“ sind. Es ist beachtenswert, daß im Falle der Einsteinschen Gravitationstheorie dieser Tensor nicht mehr symmetrisch zur Diagonale ist. Wir werden darauf auf S. 16 zurückkommen. Ich will seine Komponenten mit $\mathfrak{T}^k_\lambda$ bezeichnen:

---

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 40. S. 34. 1913.

$$(33) \qquad \mathfrak{T}_h^k = \delta_h^k \cdot \Phi - \mathfrak{k}_{\mu\nu}^k \cdot \mathfrak{g}_h^{\mu\nu} - \mathfrak{H}^{ki} \cdot \mathfrak{F}_{hi} + \varrho^k \cdot \varphi_h .$$

Dann lauten die Gleichungen (32):

$$(34) \qquad \frac{\partial}{\partial x^a}\left(2 \cdot \omega^{kr} \cdot \mathfrak{k}_{hr}^a - \delta_h^k \cdot \omega^{\mu\nu} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu}^a\right) = - \mathfrak{T}_h^k .$$

Es ist dies eine *zweite Form der zweiten Gruppe der Gravitationsgleichungen*, die aus den ursprünglichen Gleichungen (2) dadurch hervorgeht, daß man:

statt $\mathfrak{k}_{\mu\nu}^a$ einsetzt: $\left(2\,\omega^{\mu r} \cdot \mathfrak{k}_{r\nu}^a - \delta_\nu^\mu \cdot \omega^{rs} \cdot \mathfrak{k}_{rs}^a\right)$,

statt $h_{\mu\nu}$ einsetzt: $\mathfrak{T}_\nu^\mu$.

Natürlich besteht (34) nur scheinbar aus 16 Gleichungen, denn es existieren die sechs Identitäten:

$$\omega_{\mu\sigma} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\left(2\omega^{\sigma r} \cdot \mathfrak{k}_{\nu r}^a - \delta_\nu^\sigma \cdot \omega^{rs} \cdot \mathfrak{k}_{rs}^a\right) + \mathfrak{T}_\nu^\sigma\right)$$
$$= \omega_{\nu\sigma} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\left(2\omega^{\sigma r} \cdot \mathfrak{k}_{\mu r}^a - \delta_\mu^\sigma \cdot \omega^{rs} \cdot \mathfrak{k}_{rs}^a\right) + \mathfrak{T}_\mu^\sigma\right) .$$

Die Zahl der unabhängigen Gleichungen (34) beträgt also zehn.

Energie und Impuls eines im Gravitationsfeld sich bewegenden Körpers.

5. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zum zweiten Teil der Aufgabe, dem eigentlichen Thema dieser Arbeit über. Ich löse die Aufgabe in zwei Stufen. Zuerst berechne ich Energie und Impuls eines Körpers in einem Gebiet, wo allerdings das Gravitationspotential von 1 verschieden ist, wo aber doch das Potentialgefälle noch gleich Null gesetzt werden kann, wo also die Gravitationskräfte noch zu vernachlässigen sind. Darauf erst wende ich mich der Berechnung der Gravitationskräfte und der Trägheitswiderstände zu.

In allen folgenden Berechnungen gehe ich von den bekannten Energie-Impulsgleichungen aus[1]), deren Gültigkeit aus der Gültigkeit des Hamiltonschen Prinzips folgt:

$$(35) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}_k^a}{x^a} = 0, \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4.$$

Von diesen vier Gleichungen sind die ersten drei die Bewegungsgleichungen der Mechanik, die vierte ist das Energie-

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 37. S. 526. 1912; 40. S. 2 u. 34. 1913.

prinzip. Ich will die Dichte der Energie mit W und den Energiestromvektor mit $\mathfrak{s}$ bezeichnen, dann ist[1]):

$$W = \mathfrak{T}_4^4 = \Phi + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{d} - \varphi \cdot \varrho + u^{\mu\nu} \cdot w_{\mu\nu}, \tag{36}$$

$$\mathfrak{s} = -i \cdot \mathfrak{T}_4 = [\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{h}] + \varphi \cdot \mathfrak{v} - u^{\mu\nu} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu} \tag{37}$$

und die Energiegleichung lautet:

$$\operatorname{div} \mathfrak{s} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Wir wollen uns nun zunächst ein materielles Teilchen[2]) denken, welches in einem gravitationsfreien Raume ruht. Man muß dann ein Volumen V angeben können, welches dieses Teilchen enthält und so groß ist, daß der ganze Raum außerhalb V keine bemerkbaren Energiebeträge mehr enthält, daß man also den gesamten Energiegehalt des Teilchens bekommt, wenn man nur über V integriert. V sei so groß genommen, daß man auf seiner Oberfläche F überall das Gravitationspotential des Eigenfeldes des Teilchens gleich dem skalaren Wert 1 setzen kann ($\omega^{\mu\mu} = 1$, $\omega^{\mu\nu} = 0$). Wir wollen ferner alle Zustandsgrößen des Teilchens, wenn es im gravitationsfreien Gebiet ruht, durch einen horizontalen Strich kennzeichnen ($\overline{\omega^{\mu\nu}}$, $\overline{g_a^{\mu\nu}}$ usw.). Dann berechnet sich die Ruhmasse des Teilchens, welche gleich seinem ganzen Energiegehalt ist:

$$m_0 = \int \overline{T_4^4} \cdot d\overline{V}. \tag{38}$$

Nach dem Laueschen Satz[3]) ist ferner:

$$\int \overline{T_\nu^\mu} \cdot d\overline{V} = 0 \tag{39}$$

außer, wenn $\mu = \nu = 4$. Die $\overline{T_\nu^\mu}$ sollen die Komponenten des Impuls-Energietensors sein, die wir früher [Gl. (33)] mit $\mathfrak{T}_\nu^\mu$ bezeichnet haben.

Durch lineare Transformationen gewinnen wir die entsprechenden Größen im Falle eines Teilchens, das sich mit konstanter Geschwindigkeit in einem Felde konstanten Gravitationspotentials bewegt. Wir wollen von dem Koordinaten-

1) Ich benutze hier dieselben Bezeichnungen, wie in meinen Arbeiten zur Theorie der Materie.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. 40. S. 5 ff. 1913.

3) Ebenda S. 7 ff.

system $(\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}, \overline{x^4})$ des im gravitationsfreien Gebiet ruhenden Teilchens sofort zu dem Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3, x^4) übergehen, in welchem sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit q bewegt und in welchem das Gravitationspotental in der ferneren Umgebung des Teilchens den konstanten Wert $\omega^{\mu\nu}$ hat. Dann haben wir Transformationsformeln von folgender Form zu verwenden:

$$\overline{x^i} = \overline{\beta}^i_h \cdot x^h; \quad x^h = \beta^h_i \cdot \overline{x^i}; \tag{40}$$

$$\overline{\beta}^i_h \cdot \beta^k_i = \delta^k_h; \quad \overline{\beta}^h_i \cdot \beta^i_k = \delta^h_k; \tag{41}$$

wo: $\delta^h_h = 1$, $\delta^h_k = 0$, wenn $h \neq k$.

Hier bedeuten die Transformationskoeffizienten β^h_k und $\overline{\beta}^h_k$ Konstanten, welche mit dem Gravitationspotential folgendermaßen zusammenhängen:

$$\sum_{h=1,2,3,4} \overline{\beta}^h_\mu \cdot \overline{\beta}^h_\nu = -g_{\mu\nu}; \quad \sum_{h=1,2,3,4} \beta^\mu_h \cdot \beta^\nu_h = -g^{\mu\nu}, \tag{42}$$

$$g_{ih} \cdot g^{ik} = \delta^k_h. \tag{43}$$

Hier bedeuten die $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ die Maßverhältnisse im Gravitationsfeld, aus denen sich das Gravitationspotential nach (9) berechnet als:

$$\omega^{\mu\nu} = -\sqrt{g} \cdot g^{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}, \quad g = |g_{\mu\nu}| = |\omega^{\mu\nu}|.$$

In welcher Weise die Geschwindigkeit des Teilchens q^1, q^2, q^3 in den Transformationskoeffizienten steckt, möge die folgende Überlegung zeigen. Wir betrachten einen bestimmten Punkt des Teilchens, dessen Weltlinie durch ein festes Wertesystem $\overline{x^1}$, $\overline{x^2}$, $\overline{x^3}$ gegeben ist, während $\overline{x^4}$ sich ändert. Für ihn ist also $d\overline{x^1} = d\overline{x^2} = d\overline{x^3} = 0$, folglich:

$$dx^\nu = \beta_4{}^\nu \cdot d\overline{x^4},$$

speziell: $$dx^4 = i \cdot dt = \beta_4{}^4 \cdot d\overline{x^4}.$$

Nun ist $dx^\nu/dt = q^\nu$, wenn wir unter q^1, q^2, q^3 die drei Geschwindigkeitskomponenten verstehen und $q^4 = i$. Daraus folgt:

$$\beta_4{}^\nu = -i \cdot \beta_4{}^4 \cdot q^\nu. \tag{44}$$

Die Anwendung von (41) und (42) liefert:

$$\beta_4^4 \cdot \beta_4^4 \cdot g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu = \overset{\backsim}{\beta}{}_\mu^i \cdot \overset{\backsim}{\beta}{}_\nu^i \cdot \beta_4^\mu \cdot \beta_4^\nu = 1,$$

also:

$$\beta_4^4 = \frac{1}{\sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}}. \tag{45a}$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit (q^1, q^2, q^3), mit der sich das Teilchen in dem Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3, x^4) bewegt, liefert uns nun (44) die Formel:

$$\beta_4^k = \frac{-i \cdot q^k}{\sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{45b}$$

Die beiden Formeln (45a) und (45b) lassen sich, wenn man beachtet, daß $q^4 = i$, in *eine* zusammenfassen:

$$\beta_4^k = \frac{-i \cdot q^k}{\sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{46}$$

In einem wirklichen Gravitationsfeld sind die g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44} nur sehr wenig von -1 verschieden, die übrigen $g_{\mu\nu}$ sind sehr klein. Ferner ist in allen praktisch wichtigen Fällen die Geschwindigkeit q klein. Man kann daher den Nenner von (46) in praktisch wichtigen Fällen oft durch die folgende Näherung ersetzen:

$$\begin{cases} \sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu} = \sqrt{-g_{44} - q^2} = \sqrt{\sqrt{\omega} \cdot \omega_{44} - q^2} \\ \qquad\qquad = \sqrt[4]{\omega} \cdot \sqrt{\omega_{44}} \cdot \sqrt{1 - q^2}. \end{cases} \tag{47}$$

Wir gehen nun weiter über zur Berechnung des Volumens des betrachteten Teilchens. Es sei P (x^1, x^2, x^3, x^4) ein mit dem Teilchen fest verbundener, mitbewegter Punkt. Die entsprechenden Ruhkoordinaten seien $\overline{x^1}$, $\overline{x^2}$, $\overline{x^3}$, $\overline{x^4}$. Setzen wir $\overline{x^1}$, $\overline{x^2}$, $\overline{x^3}$ gleich je einer Konstanten, so sind das die Gleichungen der Zeitlinie, welche P beschreibt. Wir fassen nun weiter im Raume $t = \text{const}$ oder $x^4 = \text{const}$ einen zu P unendlich benachbarten Punkt P' ins Auge. Die Komponenten des Abstandes PP' seien dx^1, dx^2, dx^3, natürlich ist $dx^4 = 0$. In dem Ruhkoordinatensystem seien die Projektionen des Abstandes der entsprechenden Punkte: $d\overline{x^1}$, $d\overline{x^2}$, $d\overline{x^3}$, $d\overline{x^4}$; hier

ist $d\overline{x^4}$ von Null verschieden. Wir wollen nun aber die beiden Punkte in dem Ruhkoordinatensystem in einen Raum $\overline{x^4} = \text{const}$ hineinprojizieren, d. h. wir wollen die beiden Punkte in dem Ruhkoordinatensystem „gleichzeitig" betrachten, dann sind die $d\overline{x^1}$, $d\overline{x^2}$, $d\overline{x^3}$ dieselben Größen wie vorhin und $d\overline{x^4} = 0$. Nach (40) ist nun:

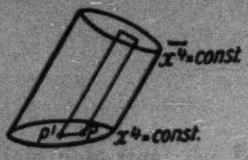


Fig. 1.

$$d\overline{x^1} = \breve{\beta}_1^{\,1} \cdot dx^1 + \breve{\beta}_2^{\,1} \cdot dx^2 + \breve{\beta}_3^{\,1} \cdot dx^3,$$
$$d\overline{x^2} = \breve{\beta}_1^{\,2} \cdot dx^1 + \breve{\beta}_2^{\,2} \cdot dx^2 + \breve{\beta}_3^{\,2} \cdot dx^3,$$
$$d\overline{x^3} = \breve{\beta}_1^{\,3} \cdot dx^1 + \breve{\beta}_2^{\,3} \cdot dx^2 + \breve{\beta}_3^{\,3} \cdot dx^3.$$

Zwischen dem Volumenelement dV im Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3, x^4) und dem „Ruh-Volumenelement" $d\bar{V}$ besteht folglich die Beziehung:

$$d\bar{V} = \begin{vmatrix} \breve{\beta}_1^{\,1} & \breve{\beta}_1^{\,2} & \breve{\beta}_1^{\,3} \\ \breve{\beta}_2^{\,1} & \breve{\beta}_2^{\,2} & \breve{\beta}_2^{\,3} \\ \breve{\beta}_3^{\,1} & \breve{\beta}_3^{\,2} & \breve{\beta}_3^{\,3} \end{vmatrix} \cdot dV,$$

oder:
$$d\bar{V} = \Delta_4^{\,4} \cdot dV,$$

wenn wir mit $\Delta_k^{\,h}$ die Unterdeterminante zu dem Glied $\breve{\beta}_h^{\,k}$ der Determinante:

$$\Delta = |\breve{\beta}_\nu^{\,\mu}| \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

bezeichnen. Nun gelten die vier Gleichungen:

$$\breve{\beta}_i^{\,k} \cdot \Delta_4^{\,i} = \delta_4^{\,k} \cdot \Delta, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Andererseits ist nach (41): $\breve{\beta}_i^{\,k} \cdot \beta_4^{\,i} = \delta_4^{\,k}$, daraus folgt:

$$\Delta_4^{\,i} = \beta_4^{\,i} \cdot \Delta, \quad \text{speziell:} \quad \Delta_4^{\,4} = \beta_4^{\,4} \cdot \Delta.$$

Da ferner:

$$\Delta = |\breve{\beta}_\nu^{\,\mu}| = \sqrt{|\breve{\beta}_\mu^{\,h} \cdot \breve{\beta}_\nu^{\,h}|} = \sqrt{g}, \tag{48}$$

so ist mit Rücksicht auf (45a):

$$d\bar{V} = \frac{\sqrt{g} \cdot dV}{\sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}}. \tag{49}$$

Wir wollen nun auch die Tensoren $\mathfrak{T}_\nu^{\,\mu}$ des im Gravitationsfeld bewegten Körperchens auf das Ruhkoordinatensystem zurückführen. Zu dem Zweck setzen wir zunächst:

$$\mathfrak{T}_\nu^{\,\mu} = \sqrt{g} \cdot T_\nu^{\,\mu}, \tag{50}$$

wo T_r^s ein gemischter Tensor im Sinne der Invariantentheorie für lineare Transformationen ist. Wir wollen vorübergehend mit p^r und q_s einen kontravarianten und einen kovarianten Vektor bezeichnen. Die Komponenten dieser Vektoren im „Ruhkoordinatensystem“ $\overline{p^r}$ und $\overline{q_s}$ berechnen sich dann zu:

$$\overline{p^r} = \check{\beta}_i^r \cdot p^i, \qquad \overline{q_s} = \beta_s^i \cdot q_i.$$

Der gemischte Tensor T_r^s ist dann durch die Eigenschaft $T_r^s \cdot p^r \cdot q_s = \overline{T_k^h} \cdot \overline{p^k} \cdot \overline{q_h}$ gekennzeichnet. Setzt man für $\overline{p^k}$ und $\overline{q_h}$ ihre Werte ein, so bekommt man:

$$T_r^s = \check{\beta}_r^k \cdot \beta_h^s \cdot \overline{T_k^h}. \tag{51}$$

Da $\check{\beta}_r^k = \beta_k^i \cdot \check{\beta}_i^a \cdot \check{\beta}_r^a = -g_{ir} \cdot \beta_k^i$, so kann man auch schreiben:

$$T_r^s = -g_{ir} \cdot \beta_k^i \cdot \beta_h^s \cdot \overline{T_k^h}. \tag{52}$$

Mit Benutzung von (49) und (50) bekommen wir:

$$\int \mathfrak{T}_r^s \cdot dV = -\sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu} \cdot g_{ir} \cdot \beta_k^i \cdot \beta_h^s \cdot \int \overline{T_k^h} \cdot d\overline{V},$$

oder, da das letzte Integral für alle h und k mit Ausnahme des Wertepaares $h = 4$, $k = 4$ Null ist, und da:

$$\int \overline{T_4^4} \cdot d\overline{V} = m_0$$

die Ruhmasse des Körpers ist, so bekommen wir, wenn wir (46) beachten:

$$\int \mathfrak{T}_r^s \cdot dV = \frac{m_0}{\sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}} \cdot g_{kr} \cdot q^k \cdot q^s, \tag{53}$$

wo q^1, q^2, q^3 die Komponenten der Geschwindigkeit des Körpers sind und $q^4 = i$. Wir wollen jetzt nach (9) und (10) das Gravitationspotential selber einführen.

Als Massenfaktor des Körpers m sei die folgende Größe definiert:

$$m = m_0 \cdot \frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt{-\omega_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}}. \tag{54}$$

Die träge Masse eines Körpers im Gravitationsfeld ist ein vierdimensionaler Tensor, den man durch Multiplikation des Massenfaktors m mit dem reziproken Gravitationspotential ω_{kr} gewinnt:

$$m_{kr} = m \cdot \omega_{kr}. \tag{55}$$

Sind sowohl q, wie auch $(\omega_{\mu\nu} - \delta_\mu^\nu)$ klein, so kann man für m folgende Näherung brauchen:

$$m = m_0 \cdot \frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt{\omega_{44}} \cdot \sqrt{1 - q^2}} \cdot \tag{54a}$$

Die Impulskomponenten des Körpers sind:

$$\mathfrak{J}_r = m_{1r} \cdot q^1 + m_{2r} \cdot q^2 + m_{3r} \cdot q^3 + m_{4r} \cdot i; \quad r = 1, 2, 3. \tag{55a}$$

Seine Energie beträgt:

$$U = m_{44} - i \cdot (m_{14} \cdot q^1 + m_{24} \cdot q^2 + m_{34} \cdot q^3). \tag{55b}$$

Der Vierervektor Impuls-Energie $(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, i \cdot U)$ und der Vierervektor Geschwindigkeit (q^1, q^2, q^3, i) haben also im Gravitationsfeld verschiedene Richtungen.[1]) Man kann sagen:

Im Gravitationsfeld gehört schon zu einer geradlinigen Bewegung ein Trägheitsellipsoid, ähnlich wie es in der alten Mechanik bei den rotierenden Bewegungen der Fall ist.

Natürlich ist aber doch ein großer Unterschied insofern vorhanden, als das Trägheitsellipsoid der geradlinigen Bewegung im Gravitationsfeld nur äußerst wenig von einer Kugel verschieden ist, ganz abgesehen davon, daß es sich hier um ein vierdimensionales Ellipsoid handelt.

Aus der Verschiedenheit der beiden Vierervektoren ergibt sich ganz klar, daß der Impuls-Energietensor im Gravitationsfeld ein unsymmetrischer Tensor ist, ein Umstand, auf den ich schon auf S. 9 hingewiesen habe.

Der Impuls-Energietensor des Körpers, d. h. das Integral des Tensors (33) über das Volumen V des Körpers lautet folgendermaßen:

$$\left\{\begin{array}{llll} -m_{1\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^1 & -m_{1\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^2 & -m_{1\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^3 & -i \cdot m_{1\lambda} \cdot q^\lambda, \\ -m_{2\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^1 & -m_{2\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^2 & -m_{2\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^3 & -i \cdot m_{2\lambda} \cdot q^\lambda, \\ -m_{3\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^1 & -m_{3\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^2 & -m_{3\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^3 & -i \cdot m_{3\lambda} \cdot q^\lambda, \\ -m_{4\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^1 & -m_{4\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^2 & -m_{4\lambda} \cdot q^\lambda \cdot q^3 & -i \cdot m_{4\lambda} \cdot q^\lambda. \end{array}\right. \tag{56}$$

1) Diese Unterscheidung zwischen den beiden Vierervektoren Geschwindigkeit und Impuls-Energie findet man schon in der Abhandlung von A. Einstein und M. Großmann vom Jahre 1913: Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. Verlag B. G. Teubner. Jedoch war es für mich notwendig, sie als eine Konsequenz meiner Theorie der Materie nachzuweisen.

Die Bewegungsgleichungen eines materiellen Körpers drücken in unserem Fall, wo äußere Kräfte ganz fehlen, die Erhaltung des Impulses aus; sie lauten:

$$(57\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(m_{rh}\cdot q^h\cdot q^1)+\dfrac{\partial}{\partial y}(m_{rh}\cdot q^h\cdot q^2)+\dfrac{\partial}{\partial z}(m_{rh}\cdot q^h\cdot q^3) \\ \qquad\qquad +\dfrac{\partial}{\partial t}(m_{rh}\cdot q^h) \\ \quad =\dfrac{d}{dt}(m_{rh}\cdot q^h)=\dfrac{d\mathfrak{I}_r}{dt}=0, \qquad r=1,2,3. \end{cases}$$

Die vierte Gleichung ist die Gleichung von der Erhaltung der Energie:

$$(57\,b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(-i\cdot m_{4h}\cdot q^h\cdot q^1)+\dfrac{\partial}{\partial y}(-i\cdot m_{4h}\cdot q^h\cdot q^2) \\ \qquad +\dfrac{\partial}{\partial z}(-i\cdot m_{4h}\cdot q^h\cdot q^3)+\dfrac{\partial}{\partial t}(-i\cdot m_{4h}\cdot q^h) \\ \quad =\dfrac{d}{dt}(-i\cdot m_{4h}\cdot q^h)=\dfrac{dU}{dt}=0. \end{cases}$$

Die Addition von Schwerefeldern.

6. Ich lasse nun die Beschränkung fallen, daß das Gravitationspotential des äußeren Feldes konstant sei. Um überhaupt eine „Kraft" im Sinne der Mechanik berechnen zu können[1]), muß man aber die Annahme machen, daß die Glieder höherer Ordnung in der Feldstärke und die Differentialquotienten der Feldstärke nach Ort und Zeit so klein sind, daß man sie in dem von dem Körper eingenommenen kleinen Volumen streichen kann. Entsprechend sind die Glieder, welche höhere Potenzen oder Differentialquotienten der Beschleunigung enthalten, wegzustreichen. Mit andern Worten:

Auch im Gravitationsfeld müssen wir uns auf die Berechnung quasistationärer Bewegungen beschränken.

Man kommt also auch hier zu keiner größeren Genauigkeit der Rechnung, als im Falle der Bewegung eines Elektrons im elektrischen oder magnetischen Feld nach der gewöhnlichen Relativitätstheorie. Nur daß im Falle der Gravitation der Einfluß des Gravitationspotentials auf träge und schwere Masse noch zu dem Einfluß der Geschwindigkeit hinzukommt und das

1) Man vergleiche: Theorie der Materie III. Ann. d. Phys. 40. S. 1. 1913.

Problem komplizierter macht. Ursprünglich hatten wohl manche Theoretiker auf die Einsteinsche Gravitationstheorie die Hoffnung gesetzt, daß sie als sogenannte „allgemeine Relativitätstheorie“ eine Ergänzung der „speziellen Relativitätstheorie“ gerade für die nichtquasistationären beschleunigten Bewegungen liefern würde. Das ist nicht der Fall.

Wir nehmen also an, daß die Komponenten des äußeren Gravitationspotentials, die wir mit $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ bezeichnen wollen, in dem Volumen V, welches der Körper einnimmt, und in einem kleinen, aber endlichen, Zeitintervall als lineare Funktionen der vier Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 angesehen werden können:

$$(58)\quad \hat{\omega}^{\mu\nu} = \hat{\omega}_0^{\mu\nu} + \hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu} \cdot x^1 + \hat{\mathfrak{g}}_2^{\mu\nu} \cdot x^2 + \hat{\mathfrak{g}}_3^{\mu\nu} \cdot x^3 + \hat{\mathfrak{g}}_4^{\mu\nu} \cdot x^4,$$

wo die $\hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$ sehr kleine konstante Größen bedeuten, deren höhere Potenzen man, jedenfalls so lange man mit den Rechnungen innerhalb des betrachteten vierdimensionalen Volumens bleibt, streichen kann, und wo die Konstante $\hat{\omega}_0^{\mu\nu}$ den Wert von $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ in dem im Innern dieses vierdimensionalen Volumens gelegenen räumlich-zeitlichen Koordinatenanfang bedeutet. Der Koordinatenanfang sei etwa der Schwerpunkt des betrachteten Körpers zur Zeit $t = 0$.

Der betrachtete Körper kann in dem Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3, x^4) mannigfache Bewegungen ausführen, er kann um seinen Schwerpunkt schwingen und rotieren in der Weise, daß die diesen relativen Bewegungen entsprechenden Kräfte für sich im Gleichgewicht sind, außerdem kann sein Schwerpunkt eine Bewegung haben, die bei Abwesenheit der Gravitationskräfte geradlinig gleichförmig wäre. So rotiert beispielsweise die Erde um ihre Achse, indem die dabei auftretenden Zentrifugalkräfte mit den Kohäsionskräften der Erdmaterie im Gleichgewicht sind, und außerdem bewegt sich ihr Schwerpunkt auf einer Bahn, die bei Abwesenheit der Gravitationskräfte tangential zur Keplerellipse ginge und mit konstanter Geschwindigkeit durcheilt würde.

Die erste Aufgabe, die wir zu lösen haben, ist nun, den vernunftgemäßen Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 eines jeden Punktes des im Gravitationsfeld bewegten Körpers die Koordinaten $\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}, \overline{x^4}$ des genau entsprechenden Punktes desselben Körpers im gravitationsfreien Raum richtig zuzuordnen. Und zwar

wollen wir das Koordinatensystem im gravitationsfreien Raum so wählen, daß der Körper in ihm die genau entsprechenden Bewegungen macht, daß insbesondere der Schwerpunkt des Körpers sich in ihm mit einer konstanten Geschwindigkeit $\bar{q}$ bewegt, welche sich aus der Geschwindigkeit q des Schwerpunktes in dem vernunftgemäßen Koordinatensystem ergibt, wenn man für die Längen und Zeiten statt der „vernunftgemäßen" die „natürlichen" Messungsergebnisse nimmt. Wir wollen also, anders als in unseren früheren Berechnungen (in 5) hier die Transformation für das Schwerefeld und die Transformation für die Bewegung getrennt durchführen.

Wir denken uns den betrachteten Körper zunächst in dem vierdimensionalen nichtminkowskischen Kontinuum, durch dessen Geometrie das Gravitationsfeld ersetzt wird, wenn man alle räumlichen und zeitlichen Geraden und zugleich auch ihre Teilungen durch „natürliche" Messungen definiert. Ich will dieses Kontinuum, wie in meinen früheren Arbeiten, „das Hilbertsche Kontinuum" nennen. Es ist ganz in einem zehndimensionalen ebenen Kontinuum enthalten. In diesem zehndimensionalen Kontinuum konstruieren wir eine vierdimensionale Ebene, welche von dem Hilbertschen Kontinuum möglichst wenig abweicht, und nehmen sie als die (x^1, x^2, x^3, x^4)-Koordinatenebene. Projizieren wir die Punkte des Hilbertschen Kontinuums senkrecht in diese Ebene hinein[1]), so bekommen wir die Welt, wie sie in der Physik betrachtet wird, in ihr gelten die Axiome der minkowskischen Geometrie.

Der kleine Körper, den wir betrachten, beschreibt im Hilbertschen Kontinuum einen gekrümmten, in zeitartiger Richtung verlaufenden Faden, der die Eigenschaft hat, daß man überall durch ihn dreidimensionale Querschnitte legen kann, welche auf allen Weltlinien, aus denen der Faden zusammengesetzt ist[2]), senkrecht stehen. Ein solcher dreidimensionaler Querschnitt stellt den betrachteten Körper dar, wie er sich in einem bestimmten Moment in einem gravitationsfreien Raum verhält, wenn sein Schwerpunkt sich nicht bewegt. Ebenso

1) Ann. d. Phys. 62. S. 46. 1920.

2) Hiermit sind diejenigen Weltlinien gemeint, welche die einzelnen Punkte des Körpers beschreiben würden, wenn er keine Schwingungen und Drehungen um den Schwerpunkt macht.

kann man durch den Faden dreidimensionale Querschnitte legen, welche mit jeder Weltlinie des Fadens einen und denselben, von $\pi/2$ verschiedenen, Winkel bilden. Ein solcher Querschnitt stellt den betrachteten Körper in einem gravitationsfreien Gebiet dar, wenn sich sein Schwerpunkt mit einer konstanten Geschwindigkeit $\bar{q}$ bewegt, welche durch den Winkel der Weltlinien des Fadens mit dem Querschnitt bestimmt ist. Wir wählen diesen Winkel so, daß $\bar{q}$ gerade den oben definierten Wert hat. Konstruieren wir in jedem Punkte dieses Querschnittes die auf ihm senkrecht stehende geodätische Zeitlinie, so bekommen wir die $\overline{x^4}$-Koordinatenlinien, und die natürlich gemessene Zeit in irgendeinem Punkt ist der geodätische Abstand dieses Punktes von dem durch den Koordinatenanfang gehenden Querschnitt $\overline{x^4} = 0$. In diesem Querschnitt selber konstruiert man durch „natürliche" Messungen ein dreidimensionales Koordinatennetz $\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}$, mit dessen Hilfe man den Ort eines jeden Punktes des betrachteten kleinen Körpers definiert. *Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß diese Konstruktion des Koordinatennetzes* $(\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}, \overline{x^4})$ *nur unter der Voraussetzung möglich ist, daß man innerhalb des betrachteten Gebietes das Gravitationspotential durch eine lineare Funktion der Koordinaten mit genügender Genauigkeit wiedergeben kann.* Nach Gl. (58) ist das der Fall.

Wir wollen nun ein kleines Stück des Fadens in der Nähe des Koordinatenanfangs ins Auge fassen und es in die Ebene der physikalischen Welt hineinprojizieren. Dadurch wird jedes Wertesystem $(\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}, \overline{x^4})$ des Körpers im gravitationsfreien Gebiet gerade dem richtigen Wertesystem (x^1, x^2, x^3, x^4) zugeordnet. Die Koeffizienten der Transformation, durch welche man von dem einen zum andern Koordinatensystem übergehen kann, bezeichnen wir ebenso, wie auf S. 12, Gl. (40):

$$\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^k} = \beta_k^h; \qquad \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k} = \bar{\beta}_k^h; \tag{59}$$

sie sind aber jetzt nicht mehr als konstant, sondern vielmehr als lineare Funktionen der Koordinaten anzusehen:

$$\begin{cases} \beta_k^h = b_k^h + a_{ki}^h \cdot x^i = b_k^h + \alpha_{ki}^h \cdot \bar{x}^i, \\ \bar{\beta}_k^h = \bar{b}_k^h + \bar{a}_{ki}^h \cdot x^i = \bar{b}_k^h + \bar{\alpha}_{ki}^h \cdot \bar{x}^i. \end{cases} \tag{60}$$

Es wird sich nun darum handeln, die Größen b_k^h und a_{kl}^h einzeln aus den $\hat{\omega}_0^{\mu\nu}$ und den $\hat{\mathfrak{g}}_l^{\mu\nu}$ zu berechnen.

Da die Transformationskoeffizienten keine Konstanten sind, so sind die Projektionen der einzelnen Weltlinien des Fadenstückes in der Koordinatenebene (x^1, x^2, x^3, x^4) schwach gekrümmte Linien in zeitartiger Richtung, ebenso ist die Projektion des senkrechten Querschnittes ein schwach gekrümmtes dreidimensionales Kontinuum. Dasselbe gilt für den schiefen Querschnitt $\overline{x^4} = 0$ und die darauf senkrecht stehenden $\overline{x^4}$-Koordinatenlinien. Beschränken wir uns aber auf die unmittelbare Umgebung des Koordinatenanfanges, so können wir, wenn wir den Bereich nur klein genug wählen, das dreidimensionale Kontinuum $\overline{x^4} = 0$ als eben und die Projektion der $\overline{x^4}$-Achse als Gerade ansehen. In der (x^1, x^2, x^3, x^4)-Ebene stehen aber die $\overline{x^4}$-Ebene und die $\overline{x^4}$-Achse im allgemeinen nicht aufeinander senkrecht, da bei der Projektion die Winkel etwas verzerrt werden. Wir wählen nun die Richtung der Projektion der $\overline{x^4}$-Achse zugleich als die x^4-Koordinatenachse unserer vernunftgemäßen Koordinaten. Die auf ihr senkrecht stehende Ebene $x^4 = 0$ ist von der Ebene $\overline{x^4} = 0$ zu unterscheiden. In dem betrachteten kleinen Bereich werden wir mit konstanten Transformationskoeffizienten b_k^h und $\overset{\circ}{b}{}_k^h$ rechnen. Nun gehört nach unserer Definition der x^4-Koordinatenlinien ein bestimmtes Wertesystem x^1, x^2, x^3 immer zu einem bestimmten Wertesystem $\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}$ bei ganz beliebigem $\overline{x^4}$. D. h. x^1, x^2, x^3 hängen nur von $\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}$ ab, und umgekehrt:

$$\left(\frac{\partial x^h}{\partial \overline{x^4}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \overline{x^h}}{\partial x^4}\right)_0 = 0; \quad h = 1, 2, 3;$$

oder, was dasselbe ist:

$$b_4^h = 0, \quad \overset{\circ}{b}{}_4^h = 0, \quad h = 1, 2, 3. \tag{61}$$

Ferner ist nach (41) und (42):

$$\overset{\circ}{b}{}_4^i \cdot \overset{\circ}{b}{}_4^i = \sqrt{\hat{\omega}_0} \cdot \hat{\omega}_{44}^0; \qquad \overset{\circ}{b}{}_4^i \cdot b_i^4 = 1.$$

Nach (61) ergibt sich:

$$\overset{\circ}{b}{}_4^4 = \sqrt[4]{\hat{\omega}_0} \cdot \sqrt{\hat{\omega}_{44}^0}; \qquad b_4^4 = \frac{1}{\sqrt[4]{\hat{\omega}_0} \cdot \sqrt{\hat{\omega}_{44}^0}}. \tag{62}$$

Zur Berechnung der übrigen Transformationskoeffizienten b_k^h haben wir die folgenden Gleichungen:

$$(63) \qquad b_1^h \cdot b_1^k + b_2^h \cdot b_2^k + b_3^h \cdot b_3^k = \frac{\hat{\omega}_0^{hk}}{\sqrt{\hat{\omega}_0}}, \quad h, k = 1, 2, 3,$$

und:

$$(64) \qquad b_1^h \cdot b_1^4 + b_2^h \cdot b_2^4 + b_3^h \cdot b_3^4 = \frac{\hat{\omega}_0^{h4}}{\sqrt{\hat{\omega}_0}}, \qquad h = 1, 2, 3.$$

Über die Richtungen der x^1, x^2, x^3-Achsen soll die Festsetzung getroffen werden, daß der betrachtete Körper in der Nähe des Koordinatenanfanges relativ zu ihnen dieselbe Lage habe, wie im Hilbertschen Kontinuum relativ zu den $\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}$-Achsen. Denken wir uns im Hilbertschen Kontinuum (im gravitationsfreien Gebiet) eine kleine Kugel im $\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}$-Raum, so entspricht ihr in dem x^1, x^2, x^3-Raum (d. h. im Gravitationsfeld) ein dreiachsiges Ellipsoid. Die drei Hauptachsen dieses Ellipsoides sollen nun relativ zu den x^1, x^2, x^3-Richtungen gerade ebenso liegen, wie die ihnen entsprechenden drei aufeinander senkrechten Kugeldurchmesser relativ zu den $\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}$-Richtungen. Damit dies der Fall sei, ist notwendig und hinreichend:

$$(65) \qquad b_k^h = b_h^k; \quad \overset{\vee}{b}_k^h = \overset{\vee}{b}_h^k; \quad h, k = 1, 2, 3.$$

Die sechs Größen b_k^h sind durch die sechs Gleichungen (63) eindeutig bestimmt. Für die drei Größen b_h^4 haben wir die drei linearen Gleichungen (64), b_4^h und b_4^4 endlich sind durch (61) und (62) gegeben. Damit ist die Berechnung der sämtlichen Größen b_h^k durchgeführt. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$, mit welcher sich der Körper in dem (x^1, x^2, x^3, x^4)-Koordinatensystem vorwärts bewegt, berechnet sich aus der „natürlich gemessenen" Geschwindigkeit $\bar{\mathfrak{q}}$ durch folgende Gleichungen:

$$(66) \qquad \mathfrak{q}^h = \frac{b_1^h \cdot \overline{\mathfrak{q}^1} + b_2^h \cdot \overline{\mathfrak{q}^2} + b_3^h \cdot \overline{\mathfrak{q}^3}}{b_4^4 - i\,(b_1^4 \cdot \overline{\mathfrak{q}^1} + b_2^4 \cdot \overline{\mathfrak{q}^2} + b_3^4 \cdot \overline{\mathfrak{q}^3})}.$$

Wir wenden uns nun der Berechnung der Koeffizienten a_{hl}^k in den Ausdrücken (60) für β_h^k zu.

Wir notieren zunächst die aus (60) ohne weiteres folgenden Beziehungen:

$$(67) \qquad a_{hl}^k = \overset{\vee}{b}_i^l \cdot \alpha_{hl}^k, \quad \alpha_{hi}^k = b_i^l \cdot a_{hl}^k.$$

Da nun:

$$a_{hi}{}^{k} = \frac{\partial \beta_h{}^{k}}{\partial \bar{x}^i}, \qquad \beta_h{}^{k} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^h}$$

so folgen die 24 Gleichungen:

$$a_{hi}{}^{k} = a_{ih}{}^{k}; \qquad b_i{}^{l} \cdot a_{hl}{}^{k} = b_h{}^{l} \cdot a_{il}{}^{k}. \tag{68}$$

Ferner ist:

$$\beta_i{}^{h} \cdot \beta_l{}^{k} = b_i{}^{h} \cdot b_l{}^{k} + (b_i{}^{h} \cdot a_{ll}{}^{k} + b_l{}^{k} \cdot a_{li}{}^{h}) \cdot x^i$$
$$= - \hat{g}^{hk} = \frac{\hat{\omega}^{hk}}{\sqrt{\hat{\omega}}}.$$

Da nun:

$$\frac{\hat{\omega}^{hk}}{\sqrt{\hat{\omega}}} = \frac{\hat{\omega}_0{}^{hk}}{\sqrt{\hat{\omega}_0}} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\hat{\omega}^{hk}}{\sqrt{\hat{\omega}}}\right) \cdot x^i = - \hat{g}_0{}^{hk} - \hat{g}_i{}^{hk} \cdot x^i,$$

wo der Einfachheit halber:

$$\frac{\partial \hat{g}^{hk}}{\partial x^i} = - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\hat{\omega}^{hk}}{\sqrt{\hat{\omega}}}\right) = \hat{g}_i{}^{hk} \tag{69}$$

gesetzt ist, so ergeben sich die weiteren 40 Gleichungen:

$$b_i{}^{h} \cdot a_{li}{}^{k} + b_i{}^{k} \cdot a_{li}{}^{h} = - \hat{g}_i{}^{hk}, \tag{70}$$

wo die $\hat{g}_i{}^{hk}$ nach (69) aus den $\hat{\omega}_0^{\mu\nu}$ und den $\hat{g}_i^{\mu\nu}$ zu berechnen sind. Die 64 linearen Gleichungen (68) und (70) bestimmen die 64 Größen $a_{li}{}^{k}$ eindeutig.

Die Ausrechnung ergibt:

$$a_{li}{}^{k} = - b_l{}^{r} \cdot \left\{ \widehat{\begin{matrix} r\,i \\ k \end{matrix}} \right\}, \tag{71}$$

wo das Symbol mit der geschweiften Klammer das Christoffelsche Symbol, Gl. (12) auf S. 4, bedeutet, wenn man darin die Größen mit dem Zirkumflex $\wedge$ einsetzt. Man kann (71) leicht durch Einsetzen in (68) und (70) verifizieren. Wir haben nunmehr für die Transformationskoeffizienten gefunden:

$$\beta_h{}^{k} = b_h{}^{k} - b_h{}^{r} \cdot \left\{ \widehat{\begin{matrix} r\,i \\ k \end{matrix}} \right\} \cdot x^i. \tag{72}$$

Es sei nun das eigene Gravitationspotential des im gravitationsfreien Gebiet mit der Geschwindigkeit $\bar{q}$ bewegten Körpers in dem Punkte $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$ mit $\bar{\omega}^{\mu\nu}$ bezeichnet, das Gravitationspotential in dem entsprechenden Punkt x^1, x^2, x^3, x^4 desselben Körpers, wenn er sich im Gravitationsfeld $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ mit

der entsprechenden Geschwindigkeit q [Gl. (66)] bewegt, mit $\omega^{\mu\nu}$, dann ist:

$$\omega^{\mu\nu} = \sqrt{\hat{\omega}} \cdot \beta_h^{\mu} \cdot \beta_k^{\nu} \cdot \overline{\omega}^{hk}, \tag{73}$$

wo die Ausdrücke (72) einzusetzen sind. Beachtet man nun, daß nach (14) auf S. 4:

$$\sqrt{\hat{\omega}} = \sqrt{\hat{\omega}_0} \cdot \left(1 + \left\{\begin{matrix} \widehat{r\,i} \\ r \end{matrix}\right\} \cdot x^i\right),$$

so bekommt man:

$$\omega^{\mu\nu} = \sqrt{\hat{\omega}_0} \cdot \left[b_h^{\mu} \cdot b_k^{\nu} - \left(b_h^{\mu} \cdot b_k^{r} \cdot \left\{\begin{matrix} \widehat{r\,i} \\ \nu \end{matrix}\right\} + b_h^{r} \cdot b_k^{\nu} \cdot \left\{\begin{matrix} \widehat{r\,i} \\ \mu \end{matrix}\right\} - b_h^{\mu} \cdot b_k^{r} \cdot \left\{\begin{matrix} \widehat{r\,i} \\ r \end{matrix}\right\}\right) x^i\right] \cdot \overline{\omega}^{hk},$$

oder, kürzer geschrieben:

$$\begin{cases} \omega^{\mu\nu} = \dot{\omega}^{\mu\nu} - \left(\dot{\omega}^{\mu r} \cdot \left\{\begin{matrix} \widehat{r\,i} \\ \nu \end{matrix}\right\} + \dot{\omega}^{r\nu} \cdot \left\{\begin{matrix} \widehat{r\,i} \\ \mu \end{matrix}\right\} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dot{\omega}^{\mu\nu} \cdot \left\{\begin{matrix} \widehat{r\,i} \\ r \end{matrix}\right\}\right) \cdot x^i, \end{cases} \tag{74}$$

$$\dot{\omega}^{\mu\nu} = \sqrt{\hat{\omega}_0} \cdot b_h^{\mu} \cdot b_k^{\nu} \cdot \overline{\omega}^{hk}. \tag{75}$$

Hier bedeutet also $\dot{\omega}^{\mu\nu}$ den Wert des Gravitationspotentials, welcher aus $\overline{\omega}^{\mu\nu}$ entsteht, wenn sich der Körper in einem Gebiet konstanten Gravitationspotentials $\hat{\omega}_0^{\mu\nu}$ bewegt.

In allen Fällen, die praktisch von Bedeutung sind, hat man nicht nur die $\hat{\mathfrak{g}}_i^{\mu\nu}$, bzw. die $\left\{\begin{matrix} \widehat{h\,i} \\ k \end{matrix}\right\}$ als sehr klein zu rechnen, sondern auch die Abweichungen des Gravitationspotentials $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ vom skalaren Wert 1 überhaupt, d. h. die Größen $\hat{\omega}^{\mu\nu} - \delta_{\nu}^{\mu}$. Vernachlässigt man nun in den Gleichungen (64) und (65) die Größen höherer Ordnung und setzt man in (62) mit demselben Grad der Annäherung $1/\hat{\omega}_{44} = \hat{\omega}^{44}$ und $\sqrt{\hat{\omega}^{44}} = (1 + \hat{\omega}^{44})/2$. so bekommt man:

$$\begin{cases} b_h^{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{\omega}_0}} \cdot (\delta_h^{k} + \hat{\omega}_0^{hk}); \quad h, k = 1, 2, 3; \\ b_h^{4} = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} \cdot \hat{\omega}_0^{4h}, \quad b_4^{k} = 0, \quad b_4^{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{\omega}_0}} \cdot (1 + \hat{\omega}_0^{44}); \end{cases} \tag{76}$$

$$(75a)\quad \begin{cases} \dot{\omega}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\hat{\omega}_0^{\mu h} \cdot \bar{\omega}^{h\nu} + \hat{\omega}_0^{h\nu} \cdot \bar{\omega}^{\mu h}) & h = 1,2,3 \\ \quad + \frac{1}{2}(\delta_4^{\mu} \cdot \hat{\omega}_0^{4\nu} \cdot \bar{\omega}^{\tau\nu} + \delta_4^{\nu} \cdot \hat{\omega}_0^{\tau 4} \cdot \omega^{\mu\tau}) & \tau = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Ist die Geschwindigkeit q des Körpers klein gegen Lichtgeschwindigkeit, so kann man unter Vernachlässigung der Größen höherer Ordnung in Formel (66) einfach

$$q = \bar{q}$$

setzen. Dasselbe gilt für die Geschwindigkeiten der Drehungen und Schwingungen um den Massenmittelpunkt. Man hat also in (75a) unter $\bar{\omega}^{hk}$ das eigene Gravitationspotential des Körpers zu verstehen, welches er unter sonst unveränderten Verhältnissen in einem an und für sich gravitationsfreien Gebiet zeigen würde.

Für die Feldstärke der Gravitation berechnet sich aus 74) und (75):

$$(77)\quad \begin{cases} \mathfrak{g}_a^{\mu\nu} = \dot{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu} + \hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}, \\ \dot{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu} = \dfrac{\partial \omega^{\mu\nu}}{\partial \bar{\omega}^{hk}} \cdot \dfrac{\partial \bar{\omega}^{hk}}{\partial x^a}, \\ \hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu} = -\dot{\omega}^{\mu\tau} \cdot \left\{ \begin{matrix} \widehat{\tau a} \\ \nu \end{matrix} \right\} - \dot{\omega}^{\tau\nu} \cdot \left\{ \begin{matrix} \widehat{\tau a} \\ \mu \end{matrix} \right\} + \dot{\omega}^{\mu\nu} \cdot \left\{ \begin{matrix} \widehat{\tau a} \\ \tau \end{matrix} \right\}. \end{cases}$$

Die Feldstärke der Gravitation setzt sich also additiv zusammen aus der Feldstärke des eigenen Feldes des Körpers $\dot{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$, welche aus der Feldstärke des im gravitationsfreien Raum ruhenden Körpers durch die lineare Transformation der Relativität der Bewegung und der Relativität des Gravitationspotentials gewonnen wird, und aus der Feldstärke des äußeren Feldes $\hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$, welche in der durch (77) angegebenen Weise durch das Gravitationspotential des Eigenfeldes des Körpers beeinflußt wird. In Entfernungen, wo man dieses Eigenpotential gleich dem Skalar 1 setzen kann, wird $\dot{\omega}^{\mu\nu} = \hat{\omega}^{\mu\nu}$, und dementsprechend nach Gl. (15) auf S. 4 $\dot{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu} = \hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$. Im Innern des Körpers ist nach (77) $\hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$ immerhin von gleicher Ordnung sehr klein, wie $\hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$ selbst.

Die Feldgrößen $\mathfrak{k}_{\mu\nu}^a$ berechnen sich nach Gl. (21) als homogene lineare Funktionen der $\mathfrak{g}_a^{\mu\nu}$, folglich ist auch:

$$(78)\quad \mathfrak{k}_{\mu\nu}^a = \dot{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^a + \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^a,$$

wo $\mathfrak{k}^a_{\mu\nu}$ die Feldgröße des Eigenfeldes bedeutet, nachdem die Transformationen der Relativität der Bewegung und der Relativität des Gravitationspotentials darauf angewendet worden sind und wo $\hat{\mathfrak{k}}^a_{\mu\nu}$ die unveränderte Feldgröße des äußeren Feldes bedeutet. Wenn man nämlich die Formel (77) mit (15), (21) und (18) vergleicht, so erkennt man, daß in der Tat:

$$\hat{\mathfrak{k}}^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\left\{\begin{matrix}\widehat{\mu\nu}\\ a\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\delta_\nu{}^a\left\{\begin{matrix}\widehat{\mu r}\\ r\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\delta_\mu{}^a\cdot\left\{\begin{matrix}\widehat{\nu r}\\ r\end{matrix}\right\}\right),$$

daß also $\hat{\mathfrak{k}}^a_{\mu\nu}$ ganz unabhängig vom Eigenpotential des Körpers an der betreffenden Stelle ist.

Die Feldgröße $\hat{\mathfrak{k}}^a_{\mu\nu}$ des äußeren Feldes wird durch die Anwesenheit des Eigenfeldes des Körpers nicht beeinflußt, die Feldgröße des Eigenfeldes dagegen muß nach dem Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials in $\mathfrak{k}^a_{\mu\nu}$ transformiert werden.

Diese scheinbare Unsymmetrie erklärt sich sehr einfach aus unseren Festsetzungen über die Koordinaten. Das Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3, x^4) ist nämlich von dem natürlichen Koordinatensystem $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4)$ des kleinen Körpers verschieden, dagegen ist nach (58) jeder Punkt (x^1, x^2, x^3, x^4) im Felde des Körpers einem Punkt in dem äußeren Feld, aus welchem man sich den Körper weggedacht hat, mit genau denselben Koordinatenzahlen zugeordnet. Der Grund für die verschiedene Behandlung der beiden Felder liegt darin, daß in genügender Entfernung von dem kleinen Körper das Potential seines Eigenfeldes den skalaren Wert 1 annimmt, während das äußere Feld hier einen von $\hat{\omega}^{\mu\nu}_0$ nur wenig verschiedenen Wert hat. Allgemein kann man den in (78) enthaltenen Satz so aussprechen:

Die Feldgrößen $\mathfrak{k}^a_{\mu\nu}$ zweier Gravitationsfelder addieren sich einfach, nachdem man die linearen Transformationen, welche sich aus dem Prinzip der Relativität der Geschwindigkeit und des Gravitationspotentials an ihnen als notwendig ergeben, ausgeführt hat.

Für die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_a$ existiert ein derartig einfaches Additionstheorem nicht. Man gewinnt $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_a$ nach Formel (21), bzw. (77).

Die Bewegungsgleichungen eines kleinen Körpers (eines Steines) im Schwerefeld.

7. Wir stellen nun zunächst die Impuls-Energiegleichungen für einen Körper auf, der so klein ist, daß man schon nahe an seiner Oberfläche sein Eigenpotential $\bar{\omega}^{\mu\nu}$ gleich dem skalaren Wert 1 setzen kann, auch wenn man sehr genau rechnet. Ein Beispiel bietet uns ein schwerer Stein im Feld der Erde, dessen Eigenfeld bekanntlich ohne weiteres gestrichen werden darf.

Wenn sich dieser Körper mit der Geschwindigkeit q in dem Schwerefeld bewegt, so beschreibt sein Volumen V in der unendlich kleinen Zeit dt einen sehr kurzen schiefen vierdimensionalen Zylinderstumpf (Fig. 2), welcher oben und unten durch die dreidimensionalen Querschnitte V zur Zeit t und zur Zeit $t+dt$ begrenzt wird, und von dem kurzen dreidimensionalen Zylindermantel umgeben ist, den die Oberfläche F des Volumens V in der Zeit dt beschreibt. Die Querschnitte V sind dem auf der x^4-Koordinatenachse senkrechten Koordinatenraum parallel. Den Zylindermantel zerlegen wir in unendlich schmale Streifen dS, welche die einzelnen Elemente dF der Oberfläche des Körpers V in der Zeit dt beschreiben. Diese Streifen wollen wir auf die vier Koordinatenräume projizieren, die Projektionen mögen dS_k heißen. Werden die Projektionen von dF auf die drei Koordinatenebenen im Raume $x^4 = \text{const}$ mit dF_x, dF_y, dF_z bezeichnet, so gilt:

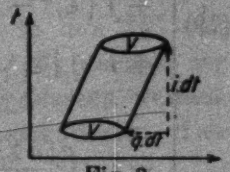


Fig. 2.

$$dS_1 = +i\cdot dF_x\cdot dt,\quad dS_2 = +i\cdot dF_y\cdot dt,\quad dS_3 = +i\cdot dF_z\cdot dt,$$
$$dS_4 = -(q_x\cdot dF_x + q_y\cdot dF_y + q_z\cdot dF_z)\cdot dt.$$

Wir bilden nun über die linke Seite der $k$ten Impulsgleichung:

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_k^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

das vierdimensionale Volumenintegral über den Inhalt des beschriebenen Zylinderstumpfs. Nach dem Gaussschen Satz ist es gleich dem Oberflächenintegral über seine dreidimensionale Oberfläche, also:

$$\int (\mathfrak{T}_k^1 \cdot dS_1 + \mathfrak{T}_k^2 \cdot dS_2 + \mathfrak{T}_k^3 dS_3 + \mathfrak{T}_k^4 \cdot dS_4) + \frac{d}{dt} \int \mathfrak{T}_k^4 \cdot dV \cdot dt = 0.$$

Der erste Summand ist das Integral über den Zylindermantel, der zweite das Integral über die beiden Querschnitte, die den Zylinderstumpf beiderseits begrenzen.

Wir setzen nun für die $\mathfrak{T}_k^h$ die Ausdrücke (33) S. 10 ein und benutzen zugleich (77) und (78); dann bekommen wir, wenn wir dt wegheben und mit $-i$ multiplizieren, beispielsweise für $k = 1$:

$$(79)\quad \begin{cases} \int [\mathfrak{T}_1 + (\frac{1}{2}\hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{\alpha} \cdot \dot{\mathfrak{g}}_{\alpha}^{\mu\nu} - \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{1} \cdot \dot{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu}) + (\frac{1}{2}\dot{\mathfrak{k}}_{\mu\nu} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{\alpha}^{\mu\nu} - \dot{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{1} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu}) \\ \qquad + (\frac{1}{2}\hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{\alpha} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{\alpha}^{\mu\nu} - \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{1} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu})] \cdot dF_x \\ + \int [\mathfrak{T}_1^2 - \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{2} \cdot \dot{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu} - \dot{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{2} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu} - \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{2} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu}] \cdot dF_y \\ + \int [\mathfrak{T}_1^3 - \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{3} \cdot \dot{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu} - \dot{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{3} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu} - \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{3} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu}] \cdot dF_z \\ + i \cdot \int [\mathfrak{T}_1^4 - \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{1} \cdot \dot{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu} - \dot{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{4} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu} - \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{1} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu}] \\ \qquad \cdot (\mathfrak{q}^1 \cdot dF_x + \mathfrak{q}^2 \cdot dF_y + \mathfrak{q}^3 \cdot dF_z) \\ - i \cdot \int \Big[\frac{d\mathfrak{T}_1^4}{dt} - \frac{d}{dt}\Big(\hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{4} \cdot \dot{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu} + \dot{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{4} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu} + \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{4} \cdot \mathring{\mathfrak{g}}_{1}^{\mu\nu}\Big)\Big] \\ \qquad \cdot dV = 0. \end{cases}$$

Hier bedeuten alle mit einem $\dot{}$ versehenen Größen diejenigen Größen, welche das Verhalten des betrachteten Körpers beschreiben, nachdem sie den linearen Transformationen der Relativität der Bewegung und der Relativität des Gravitationspotentials unterworfen worden sind. Die mit dem $\hat{}$ versehenen Größen bedeuten das unveränderte äußere Feld, die mit $\mathring{}$ versehenen Größen sind äußere Feldgrößen, welche durch die Anwesenheit der Materie nach (77) ein wenig modifiziert sind.

Man kann in Gl. (79) den Faktor von dF_x in dem ersten Integral noch etwas umformen. Es ist nämlich:

$$-2\dot{\omega}^{\mu\nu} \cdot (\hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{\alpha} \cdot \dot{\mathfrak{k}}_{\nu\alpha}^{\nu} - \tfrac{1}{2}\hat{\mathfrak{k}}_{\mu\alpha}^{\sigma} \cdot \dot{\mathfrak{k}}_{\nu\beta}^{\beta}) = -2\dot{\omega}^{\mu\nu} \cdot (\dot{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^{\alpha} \cdot \hat{\mathfrak{k}}_{\nu\alpha}^{\nu} - \tfrac{1}{2} \cdot \dot{\mathfrak{k}}_{\mu\alpha}^{\sigma} \cdot \hat{\mathfrak{k}}_{\nu\beta}^{\beta}).$$

Denn die rechte Seite geht aus der linken Seite einfach dadurch hervor, daß man

anstatt: $\mu, \nu, \alpha, \nu, \beta, \sigma$

schreibt: $\nu, \mu, \nu, \alpha, \sigma, \beta$.

Beachtet man nun (77), ferner (20) und vor allem (21), so heißt dies:

$$\tfrac{1}{2}\,\hat{\mathfrak{t}}^{\alpha}_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{t}^{\alpha}_{\mu\nu}\cdot\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha}.$$

Demnach kann man das erste Integral in (79) folgendermaßen schreiben:

$$(79\,a)\quad \left\{\begin{aligned}\int[\mathfrak{T}_1^{\,1} + (\hat{\mathfrak{t}}^{2}_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{2} + \hat{\mathfrak{t}}^{3}_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{3} + \hat{\mathfrak{t}}^{4}_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{4})\\ - \mathfrak{t}^{1}_{\mu\nu}\cdot\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{1} + (\tfrac{1}{2}\cdot\hat{\mathfrak{t}}^{\alpha}_{\mu\nu}\cdot\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha} - \hat{\mathfrak{t}}^{1}_{\mu\nu}\cdot\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{1})]\cdot dF_x.\end{aligned}\right.$$

In jedem einzelnen Integral auf der linken Seite von (79) können wir nun vier Teile unterscheiden. Der erste enthält ein $\mathfrak{T}_k^{\,h}$, der zweite Ausdrücke von der Form $\hat{\mathfrak{t}}^{\alpha}_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\beta}$, der dritte Ausdrücke von der Form $\mathfrak{t}^{\alpha}_{\mu\nu}\cdot\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\beta}$, der vierte Ausdrücke $\hat{\mathfrak{t}}^{\alpha}_{\mu\nu}\cdot\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\beta}$. Der vierte Teil, welcher in den $\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha}$ von zweiter Ordnung ist, kann in der Näherung, mit welcher wir hier fortwährend rechnen, ohne weiteres weggelassen werden. Die drei ersten Teile wollen wir einzeln durchdiskutieren. Der erste Teil:

$$(79\,b)\quad \left\{\begin{aligned}\int[(\mathfrak{T}_1^{\,1} + i\cdot\mathfrak{q}^1\cdot\mathfrak{T}_1^{\,4})\cdot dF_x + (\mathfrak{T}_1^{\,2} + i\cdot\mathfrak{q}^2\cdot\mathfrak{T}_1^{\,4})\cdot dF_y\\ + (\mathfrak{T}_1^{\,3} + i\cdot\mathfrak{q}^3\cdot\mathfrak{T}_1^{\,4})\cdot dF_z] - i\cdot\frac{d}{dt}\int\mathfrak{T}_1^{\,4}\cdot dV\end{aligned}\right.$$

ist formell ganz identisch mit der linken Seite der ersten Impulsgleichung, welche wir in 5. ausgerechnet haben. Während aber in 5. die Transformationskoeffizienten konstant gerechnet wurden, sind sie hier lineare Funktionen der Koordinaten. Infolgedessen ist hier das Gleichgewicht der Eigenfelder nicht mehr ungestört, und man kann die Summe (79b) der eben hingeschriebenen Integrale nicht mehr, wie in 5. gleich Null setzen. Die Störung der Eigenfelder macht sich als eine gewisse Gegenkraft gegen die Veränderung des Bewegungsimpulses geltend, welche man „Trägheitswiderstand" nennt, und diesen Trägheitswiderstand gibt (79b) an. Das erste Integral in (79b), welches über die Oberfläche F des Volumens V zu erstrecken ist, können wir gleich Null setzen. Denn im Begriff des

„materiellen Körpers“ ist die Voraussetzung enthalten, daß man eine den Körper umschließende Oberfläche F angeben kann, außerhalb welcher die Eigenfelder des Körpers zu Energie und Bewegungsimpuls nichts merkbares mehr beisteuern. Diese Voraussetzung ist identisch damit, daß man die Oberflächenintegrale der sämtlichen $\mathfrak{T}_k^h$ auf der Oberfläche F und auf jeder noch weiteren F umschließenden Oberfläche gleich Null setzen kann. Von dem ganzen ersten Teil (79b) bleibt also nur übrig:

$$-i\cdot\frac{d}{dt}\int \mathfrak{T}_1^4\cdot dV. \tag{80a}$$

Der zweite Teil lautet:

$$\begin{cases}\int[\hat{\mathfrak{k}}^2_{\mu\nu}\cdot(\mathfrak{g}_2^{\mu\nu}\cdot dF_x-\mathfrak{g}_1^{\mu\nu}\cdot dF_y)+\hat{\mathfrak{k}}^3_{\mu\nu}\cdot(\mathfrak{g}_3^{\mu\nu}\cdot dF_x-\mathfrak{g}_1^{\mu\nu}\cdot dF_z)\\ \quad+\hat{\mathfrak{k}}^4_{\mu\nu}\cdot(\mathfrak{g}_4^{\mu\nu}\cdot dF_x-i\cdot\mathfrak{g}_1^{\mu\nu}\cdot(\mathfrak{q}^1\cdot dF_x+\mathfrak{q}^2\cdot dF_y+\mathfrak{q}^3\cdot dF_z))]\\ \quad+i\cdot\frac{d}{dt}\int\hat{\mathfrak{k}}^4_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{g}_1^{\mu\nu}\cdot dV.\end{cases} \tag{79c}$$

In der Näherung, mit welcher wir rechnen, haben wir die $\hat{\mathfrak{k}}^a_{\mu\nu}$ als Konstanten anzusehen. Eine einfache Umformung von (79c) ergibt:

$$\begin{cases}\int\Big[\Big(\hat{\mathfrak{k}}^2_{\mu\nu}\cdot\Big(\frac{\partial\mathfrak{g}_2^{\mu\nu}}{\partial x^1}-\frac{\partial\mathfrak{g}_1^{\mu\nu}}{\partial x^2}\Big)+\hat{\mathfrak{k}}^3_{\mu\nu}\cdot\Big(\frac{\partial\mathfrak{g}_3^{\mu\nu}}{\partial x^1}-\frac{\partial\mathfrak{g}_1^{\mu\nu}}{\partial x^3}\Big)\\ \quad+\hat{\mathfrak{k}}^4_{\mu\nu}\cdot\Big(\frac{\partial\mathfrak{g}_4^{\mu\nu}}{\partial x^1}-\frac{\partial\mathfrak{g}_1^{\mu\nu}}{\partial x^4}\Big)\Big]\cdot dV=0,\end{cases} \tag{80b}$$

wie aus der Definition (77) der $\mathfrak{g}_a^{\mu\nu}$ folgt.

Um den dritten Teil von (79) zu berechnen, machen wir von der Annahme Gebrauch, daß der betrachtete Körper so klein sei, daß sein Eigenpotential $\omega^{\mu\nu}$ auf der Oberfläche F schon gleich dem skalaren Wert 1 gesetzt werden darf. Dementsprechend setzen wir in den Oberflächenintegralen des Ausdrucks (79) überall anstatt $\hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$ ein: $\mathfrak{g}_a^{\mu\nu}$, in dem Volumenintegral dagegen müssen wir $\hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$ stehen lassen. Demnach lautet der dritte Teil:

$$\begin{cases}-\int\hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu}\cdot(\mathfrak{k}^1_{\mu\nu}\cdot dF_x+\mathfrak{k}^2_{\mu\nu}\cdot dF_y+\mathfrak{k}^3_{\mu\nu}\cdot dF_z+i\cdot\mathfrak{k}^4_{\mu\nu}\\ \qquad\cdot(\mathfrak{q}^1\cdot dF_x+\mathfrak{q}^2\cdot dF_y+\mathfrak{q}^3\cdot dF_z))\\ +i\cdot\frac{d}{dt}\int\hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu}\cdot\mathfrak{k}^4_{\mu\nu}\cdot dV.\end{cases} \tag{79d}$$

Da wir bei der Näherung, mit der wir rechnen, die $\hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$ als konstant anzusehen haben, ergibt eine leichte Umformung für (79d) den folgenden Ausdruck:

$$(80c)\quad \begin{cases} -\hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu}\cdot\int\left(\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^3}{\partial x^3}+\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^4}{\partial x^4}\right)\cdot dV \\ +i\cdot\frac{d}{dt}\int\mathfrak{k}_{\mu\nu}^4\cdot(\hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu}-\hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu})\cdot dV. \end{cases}$$

Durch Addition von (80a), (80b), (80c) bekommen wir somit schließlich für (79) die folgende Form:

$$(80)\quad \begin{cases} i\cdot\frac{d}{dt}\int(\mathfrak{T}_1^4-\mathfrak{k}_{\mu\nu}^4\cdot(\hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu}-\hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu}))\cdot dV \\ -\hat{\mathfrak{g}}_1^{\mu\nu}\cdot\int\left(\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^3}{\partial x^3}+\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^4}{\partial x^4}\right)\cdot dV. \end{cases}$$

Setzt man für den Index 1 der Reihe nach 2, 3, 4 ein, so bekommt man die beiden anderen Bewegungsgleichungen und die Energiegleichung des schweren Steines.

8. Wir wollen (80) mit Hilfe der Gl. (34) auf S. 10 noch etwas umformen. Im folgenden soll wieder, wie in Abschnitt 5, $(\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}, \overline{x^4})$ ein Koordinatensystem darstellen, in welchem der betrachtete Körper in einem gravitationsfreien Gebiet *ruht*, ebenso sollen $\bar{\varpi}^{\mu\nu}$, $\bar{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^a$, $\overline{\mathfrak{T}}_h^k$ Eigenpotential, Eigenfeld und Impulsenergietensor des im gravitationsfreien Gebiet *ruhenden* Körpers bedeuten. Nach Gl. (34) ist:

$$\frac{\partial}{\partial\,\bar{x}^a}\left(2\cdot\bar{\varpi}^{kh}\cdot\bar{\mathfrak{k}}_{hr}^a-\delta_r^k\cdot\bar{\varpi}^{\mu\nu}\cdot\bar{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^a\right)=-\overline{\mathfrak{T}}_r^k.$$

Wenden wir auf diese Gleichung die in 5. ausführlich beschriebene lineare Transformation mit konstantem q und konstantem $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ an, so bekommen wir:

$$\frac{\partial}{\partial\,x^a}\left(2\cdot\dot{\omega}^{kh}\cdot\mathfrak{k}_{hr}^a-\delta_r^k\cdot\dot{\omega}^{\mu\nu}\cdot\mathfrak{k}_{\mu\nu}^a\right)=-\mathfrak{T}_r^k.$$

Eine einfache kleine Umrechnung gibt:

$$(81)\quad \frac{\partial}{\partial\,x^a}\left(\dot{\omega}^{kh}\cdot\mathfrak{k}_{hr}^a\right)=-\tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{T}_r^k-\tfrac{1}{2}\delta_r^k\cdot\mathfrak{T}_h^h\right),$$

oder, da $\hat{\omega}_{ks}$ konstant ist:

$$(81a)\quad \frac{\partial}{\partial\,x^a}\left(\hat{\omega}_{ks}\cdot\dot{\omega}^{kh}\cdot\mathfrak{k}_{hr}^a\right)=-\tfrac{1}{2}\hat{\omega}_{ks}\cdot\left(\mathfrak{T}_r^k-\tfrac{1}{2}\delta_r^k\cdot\mathfrak{T}_h^h\right).$$

Wir integrieren nun die beiden Seiten der Gl. (81a) über das kleine durch Fig. 2 auf S. 27 dargestellte Weltröhren-

stück und dividieren beiderseits durch $i \cdot dt$. Die rechte Seite gibt einfach:

$$(82a) \qquad -\tfrac{1}{2} \cdot \int \hat{\omega}_{ks} \cdot (\mathfrak{T}_r^k - \tfrac{1}{2}\delta_r^k \cdot \mathfrak{T}_h^h) \cdot dV.$$

Die linke Seite gibt nach Anwendung des Gaussschen Satzes, wenn man auf der Oberfläche F, wie immer, $\grave{\omega}^{kr} = \hat{\omega}^{kr}$ setzt:

$$(82b) \begin{cases} \int (\grave{\mathfrak{t}}_{rs}^1 \cdot dF_x + \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^2 \cdot dF_y + \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^3 \cdot dF_z + i \cdot \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^4) \cdot (\mathfrak{q}^1 \cdot dF_x + \mathfrak{q}^2 \cdot dF_y \\ \qquad + \mathfrak{q}^3 \cdot dF_z) - i \cdot \dfrac{d}{dt} \int \hat{\omega}_{ks} \cdot \grave{\omega}^{kh} \cdot \grave{\mathfrak{t}}_{hr}^4 \cdot dV, \end{cases}$$

oder, wenn wir dieselbe Umrechnung ausführen, die von (79d) zu (80c) führt:

$$(82c) \begin{cases} \int \left(\dfrac{\partial \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^1}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^3}{\partial x^3} + \dfrac{\partial \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^4}{\partial x^4} \right) \cdot dV \\ \qquad = -i \cdot \dfrac{d}{dt} \int (\hat{\omega}_{ks} \cdot \grave{\omega}^{kh} \cdot \grave{\mathfrak{t}}_{hr}^4 - \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^4) \cdot dV. \end{cases}$$

Wir setzen nun (82a) und (82c) einander gleich, und multiplizieren mit $\hat{\mathfrak{g}}_1^{rs}$, wir bekommen so:

$$8) \begin{cases} \hat{\mathfrak{g}}_1^{rs} \cdot \int \dfrac{\partial \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^a}{\partial x^a} \cdot dV - i \cdot \dfrac{d}{dt} \int \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^4 \cdot (\hat{\omega}_{hk} \cdot \grave{\omega}^{kr} \cdot \hat{\mathfrak{g}}_1^{ks} - \hat{\mathfrak{g}}_1^{rs}) \cdot dV \\ \qquad = -\hat{\mathfrak{g}}_1^{rs} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \int \hat{\omega}_{ks} \cdot (\mathfrak{T}_r^k - \tfrac{1}{2}\delta_r^k \cdot \mathfrak{T}_h^h) \cdot dV. \end{cases}$$

In dieser Gleichung sind alle mit dem Akzent ` versehenen Größen aus denen im ruhenden Körper im gravitationsfreien Gebiet durch eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten ($\mathfrak{q}$ und $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ konstant) gewonnen. Wenn wir in der Gleichung (80) alle Glieder höherer Ordnung in den $\hat{\mathfrak{g}}_a^{\mu\nu}$ vernachlässigen, so haben die $\grave{\mathfrak{t}}_{\mu\nu}^a$ in (80) genau dieselbe Bedeutung wie in (82). Die Kombination von (80) mit (82) ergibt daher nach einer leichten Umformung der rechten Seite die folgende *zweite Form der Bewegungsgleichungen*:

$$(83) \begin{cases} i \cdot \dfrac{d}{dt} \int [\mathfrak{T}_1^4 - \grave{\mathfrak{t}}_{rs}^4 \cdot (\hat{\mathfrak{g}}_1^{rs} - \hat{\omega}_{hk} \cdot \grave{\omega}^{kr} \cdot \hat{\mathfrak{g}}_1^{ks})] \cdot dV \\ \qquad = \hat{\mathfrak{g}}_1^{rs} \cdot \tfrac{1}{4} \int (\hat{\omega}_{ks} \cdot \mathfrak{T}_r^k + \hat{\omega}_{rk} \cdot \mathfrak{T}_s^k - \hat{\omega}_{rs} \cdot \mathfrak{T}_k^k) \cdot dV. \end{cases}$$

Träge und schwere Masse eines kleinen Körpers (eines Steines).

9. Auf der linken Seite der Bewegungsgleichungen steht der Trägheitswiderstand, auf der rechten die Schwerkraft. Wir können also träge Masse und schwere Masse gesondert ausrechnen. In der Näherung, mit der wir hier rechnen, werden wir aus den Ausdrücken sowohl für die träge Masse, wie für die schwere Masse aller Glieder, die einen Faktor $\hat{g}_a^{\mu\nu}$ enthalten, weglassen. Da die schwere Masse mit $\hat{g}_1^{\mu\nu}$ multipliziert wird, so würden die von uns wegzulassenden Glieder auf der rechten Seite nur Glieder höherer Ordnung sein, wie wir sie in allen Rechnungen weggelassen haben. Aber dasselbe gilt auch auf der linken Seite. Da der Körper als an sich unveränderlich vorausgesetzt wird, so erfährt sein Impuls nur dadurch zeitliche Veränderungen, daß sich seine Bewegung und das Gravitationspotential $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ seiner Umgebung ändert. Durch die Differentiation d/dt treten also auf der linken Seite Faktoren von der Größenordnung $\hat{g}_a^{\mu\nu}$ hinzu, da die Voraussetzung der quasi-stationären Bewegungen die Annahme einschließt, daß die Ableitungen der Geschwindigkeiten des Körpers von derselben Größenordnung sind, wie die $\hat{g}_a^{\mu\nu}$.

Aus dieser Überlegung ergibt sich, daß wir sowohl in (80) wie in (83) auf der linken Seite die Glieder mit $\hat{g}_1^{\mu\nu}$ bzw. $\mathfrak{g}_1^{\mu\nu}$ einfach wegzulassen haben. Die linke Seite lautet danach in beiden Formen:

$$i \cdot \frac{d}{dt} \int \mathfrak{T}_1^4 \cdot dV. \tag{84}$$

Zweitens aber ergibt sich, daß wir bei den Integrationen über das Volumen V rechts wie links $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ und q als konstant, gleich ihren Werten im Schwerpunkt des Körpers in dem betrachteten Moment, zu rechnen haben. Wie man aber diese Integrale berechnet, haben wir schon im Abschnitt 5 gesehen. Nach (56) ist:

$$\int \mathfrak{T}_1^4 \cdot dV = -i \cdot (m_{11}\, \mathfrak{q}^1 + m_{21} \cdot \mathfrak{q}^2 + m_{31} \cdot \mathfrak{q}^3 + i \cdot m_{41}), \tag{84a}$$

wo die Werte für die m_{rs} aus (54) und (55) zu entnehmen sind.

Da ferner:

$$\frac{\partial \mathfrak{k}_{rs}^{\alpha}}{\partial w^{\alpha}} = -h_{rs}, \quad \int h_{rs} \cdot dV = \mu_{rs}, \tag{85}$$

wenn wir den Tensor der schweren Masse des Körpers mit μ_{rs} bezeichnen, so gibt die rechte Seite von (80):

$$g_1^{rs} \cdot \mu_{rs}. \tag{85a}$$

Die Form (83) benutzen wir, um zu berechnen, wie die schwere Masse sich mit Geschwindigkeit und Gravitationspotential ändert. Nach (83) haben wir nämlich:

$$\mu_{rs} = \frac{1}{4} \cdot \int (\hat{\omega}_{ks} \cdot \mathfrak{T}_r^k + \hat{\omega}_{kr} \cdot \mathfrak{T}_s^k - \hat{\omega}_{rs} \cdot \mathfrak{T}_k^k) \cdot dV.$$

Die Formeln (56) liefern:

$$\mu_{rs} = -\frac{1}{4} (\hat{\omega}_{ks} \cdot m_{rh} + \hat{\omega}_{kr} \cdot m_{sh} - \hat{\omega}_{rs} \cdot m_{hk}) \cdot q^h \cdot q^k, \tag{85b}$$

wo die m_{hk} aus (54) und (55) zu entnehmen sind.

Wir fassen die gewonnenen Resultate nun in einen Satz zusammen, indem wir zugleich den jetzt unnötig gewordenen Circumflex $\wedge$ über den das äußere Feld bezeichnenden Größen weglassen:

Die drei Bewegungsgleichungen eines Körpers, der sich in einem Gravitationsfeld bewegt, lauten folgendermaßen:

$$\mu_{rs} \cdot g_\alpha^{rs} = \frac{d}{dt} (m_{k\alpha} \cdot q^k), \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{86}$$

$$\mu_{rs} = -\frac{1}{4} m \cdot (\omega_{hr} \cdot \omega_{is} + \omega_{hs} \cdot \omega_{ir} - \omega_{hi} \cdot \omega_{rs}) \cdot q^h \cdot q^i, \tag{86a}$$

$$m_{k\alpha} = m \cdot \omega_{k\alpha}, \tag{86b}$$

$$m = m_0 \cdot \frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt{-\omega_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}}. \tag{86c}$$

Hier bedeuten:

$\omega^{\mu\nu}$ das Potential des Gravitationsfeldes,
$g_\alpha^{\mu\nu}$ die Feldstärke des Gravitationsfeldes,
$\omega_{\mu\nu}$ den zu $\omega^{\mu\nu}$ reziproken Tensor,
$\omega = |\omega^{\mu\nu}|$ die Determinante der $\omega^{\mu\nu}$,
m_0 die Ruhmasse des Körpers in einem gravitationsfreien Gebiet,
q^1, q^2, q^3 die Geschwindigkeit des Körpers,
$q^4 = i$, die imaginäre Einheit.

Die Bewegungsgleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie haben also ganz dieselbe allgemeine Form, wie die

der Newtonschen Theorie. Es besteht aber zwischen den beiden Theorien ein zwiefacher Unterschied: Erstens haben in der Einsteinschen Theorie sowohl das Gravitationspotential $\omega^{\mu\nu}$, als auch träge Masse m_{rs} und schwere Masse μ_{rs} des Körpers den Charakter von vierdimensionalen Tensoren. Zweitens sind in der Einsteinschen Theorie die träge und die schwere Masse keine Konstanten, sie hängen beide sowohl von der Geschwindigkeit des Körpers, wie von dem Gravitationspotential seiner Umgebung ab, und zwar nach verschiedenen Gesetzen, so daß also auch das Verhältnis der beiden Größen variabel ist. Dagegen hängt das Verhältnis der beiden Massen nicht von der chemischen Natur oder von irgendwelchen anderen Zustandsgrößen des Körpers (z. B. Temperatur) ab, außer den genannten. Im gravitationsfreien Gebiet nimmt der Tensor der trägen Masse den Charakter eines Skalars an: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-q^2}}$, die schwere Masse ist auch im gravitationsfreien Raum noch ein Tensor:

$$\mu_{rs} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1-q^2}} \cdot q^r \cdot q^s - \frac{1}{4} \delta^s_r \cdot m_0 \cdot \sqrt{1-q^2},$$

Schwere und träge Masse eines großen Körpers (eines Planeten).

10. Die schwere und die träge Masse eines Planeten, auf dessen Oberfläche das Eigenfeld gegenüber dem äußeren Feld überwiegt, wie beispielsweise auf der Erdoberfläche das Erdfeld gegenüber dem Feld der Sonne, können wir berechnen, wenn wir zwei Annahmen machen:

1) Die Feldstärken $\hat{g}^{\mu\nu}_\alpha$ des äußeren Feldes sollen so klein sein, daß man in dem von dem Planeten eingenommenen Volumen V alle Glieder, die in ihnen von höherer Ordnung sind, oder die Ableitungen von ihnen enthalten, streichen kann. Mit den $\hat{g}^{\mu\nu}_\alpha$ sind die Ableitungen der Geschwindigkeit des Planeten gleichwertig.

Dies ist die Annahme der quasistationären Bewegung.

2) Außerhalb des von dem Planeten eingenommenen Volumens V ist die in seinem Gravitationsfeld enthaltene Energie so klein, daß es für die Berechnung seiner gesamten Masse ganz gleichgültig ist, ob wir uns auf das Volumen V

beschränken, oder ob wir über ein beliebig großes Volumen Ω integrieren, von welchem V nur ein kleiner Teil ist. Natürlich ist dabei vorausgesetzt, daß in Ω keine anderen materiellen Körper liegen.

Diese Annahme der Begrenztheit der Materie liegt notwendigerweise allen Betrachtungen über die Masse stets zugrunde.

Da wir uns, gemäß der zweiten Annahme, bei unseren Integrationen stets auf das von dem Planeten eingenommene Volumen V beschränken dürfen, so ist es für die Berechnung der Kräfte ganz gleichgültig, wie das Gravitationsfeld $\mathfrak{g}_a''$ außerhalb des Planeten verläuft. Wir dürfen deshalb an Stelle des wirklichen Feldes, wenn es notwendig ist, ein anderes Feld fingieren, welches in dem Volumen V vollständig mit dem wirklichen Feld übereinstimmt, außen aber so verläuft, wie wenn es von sehr weit entfernten Massen herrührt. Wir können dadurch erreichen, daß in einem sehr großen, den Planeten umgebenden Gebiet Ω keine andere Materie außer dem betrachteten Planeten vorhanden ist. Und zwar kann man Ω so groß annehmen, daß man auf seiner ganzen Begrenzung das Eigenpotential des Planeten gleich dem skalaren Wert 1 setzen kann.

Wir dehnen nun die Integrationen in Formel (79) und in Formel (82) zuerst auf das Volumen Ω aus und wenden den Gaussschen Satz an. Wenn wir im Lauf der weiteren Rechnung dann zu Volumenintegralen zurückkehren, lassen wir dagegen den Teil des Integrals außerhalb des Volumens V als belanglos außer Acht. Auf diese Weise kann man die Rechnung für den Planeten in genau derselben Weise und mit genau demselben Resultat durchführen, wie für den Stein.

Die Bewegungsgleichungen eines Planeten, sowie die Ausdrücke für seine träge und seine schwere Masse, stimmen mit denen eines kleinen Steines vollkommen überein.

Eine andere Frage ist, ob das äußere Feld durch die schwere Masse der Sonne allein bestimmt ist, oder ob nicht die Nähe des Planeten auf das von der Sonne ausgehende Schwerefeld von Einfluß sein kann. Ich will diese Frage, obwohl sie mit den in dieser Arbeit aufgewendeten mathematischen Mitteln wahrscheinlich zu lösen sein wird, hier nicht behandeln.

Die Einsteinsche Gravitationstheorie und die Newtonsche Gravitationstheorie.

11. Um zu den Formeln der Newtonschen Theorie kommen, muß man jedenfalls die kleinen Veränderungen, welche die beiden Massen infolge des äußeren Gravitationspotentials und infolge der Geschwindigkeit erfahren, vernachlässigen. Dabei kommt man, wie wir schon auf S. 35 bemerkt haben, zu dem merkwürdigen Ergebnis, daß, während die träge Masse den skalaren Wert m_0 annimmt, die schwere Masse ein Tensor bleibt:

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = -\frac{1}{4} m_0, \quad \mu_{44} = +\frac{1}{4} m_0, \quad \mu_{hk} = 0, \quad h \neq k.$$

Die Bewegungsgleichungen des schweren Körpers werden nun:

$$(87) \quad \begin{cases} m_0 \cdot \frac{d\,q^\alpha}{d\,t} = m_0 \cdot \mathfrak{g}_\alpha; \quad \alpha \neq 1, 2, 3, \\ \mathfrak{g}_\alpha = \frac{1}{4}\left(\mathfrak{g}_\alpha^{44} - (\mathfrak{g}_\alpha^{11} + \mathfrak{g}_\alpha^{22} + \mathfrak{g}_\alpha^{33})\right) \end{cases}$$

Man gewinnt also das Newtonsche Potential ψ aus dem Einsteinschen Potential $\omega^{\mu\nu}$ nach der Formel[1]):

$$(88) \quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{4}\left((\omega^{44} - 1) - [(\omega^{11} - 1) + (\omega^{22} - 1) + (\omega^{33} - 1)]\right) \\ \quad\; = -\frac{1}{2}(\mathfrak{g}^{44} + 1) \\ \mathfrak{g}_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Wenn man die Gleichungen so schreibt, werden träge und schwere Masse beide identisch, und zwar gleich m_0, ferner leitet sich die Feldstärke der Gravitation von einem skalaren Potential ψ ab.

Außer durch die Vernachlässigung der kleinen Änderungen der trägen und der schweren Masse unterscheidet sich die Newtonsche Theorie von der Einsteinschen noch in einem zweiten wesentlichen Punkt. Nach der Einsteinschen Theorie pflanzen sich irgendwelche Änderungen der Gravitationsfelder mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum fort, nach der Newtonschen Theorie ist die Gravitation eine Fernewirkung, deren Änderungen sich momentan im ganzen Raum herstellen.

---

1) Ich wähle die willkürliche Konstante, die man zu ψ hinzufügen kann, so, daß ψ im gravitationsfreien Raum Null wird.

Man kann diesen Unterschied auch so formulieren, daß man sagt, die Newtonsche Theorie beschränke sich auf die quasistatischen Felder, d. h. auf Felder, deren Änderungen so langsam erfolgen, daß man wegen des großen Wertes der Lichtgeschwindigkeit nichts davon bemerkt, daß die Ausbreitung der Veränderung Zeit erfordert.

Man muß also zu der Newtonschen Theorie kommen, wenn man *erstens* in den Formeln für träge und schwere Masse dem Einsteinschen Gravitationspotential den skalaren Wert 1 gibt und die Geschwindigkeit q als unendlich klein gegen 1 wegstreicht, und wenn man sich *zweitens* auf quasistatische Felder beschränkt, in welchen man die zeitlichen Ableitungen $\partial \omega^{\mu\nu}/\partial t$ gegen das örtliche Potentialgefälle $\partial \omega^{\mu\nu}/\partial x^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, streichen darf.

Die erste Vernachlässigung liefert aus Gl. (21) auf S. 5:

$$\frac{1}{4}\left(\mathfrak{g}_a^{44} - (\mathfrak{g}_a^{11} + \mathfrak{g}_a^{22} + \mathfrak{g}_a^{33})\right) = -2 \cdot \left(\mathfrak{k}_{a4}^4 - \frac{1}{3}\mathfrak{k}_{ar}^r - \frac{1}{3}\delta_a^4 \cdot \mathfrak{k}_{4r}\right)$$

$$\mathfrak{g}_4^{a4} = -2 \cdot \left(\mathfrak{k}_{a4}^4 - \frac{1}{3}\mathfrak{k}_{ar}^r\right) - 2 \cdot \left(\mathfrak{k}_{44}^a - \frac{1}{3}\delta_a^4 \cdot \mathfrak{k}_{4r}\right)$$

oder mit Rücksicht auf (87):

$$\mathfrak{g}_a = 2 \cdot \mathfrak{k}_{44}^a + \mathfrak{g}_4^{a4}. \tag{89}$$

Die zweite Bedingung, die Beschränkung auf quasistatische Felder, verlangt, daß $\mathfrak{g}_4^{a4}$ gestrichen wird.

In quasistatischen Feldern ist bei der in diesem Abschnitt benutzten Näherung:

$$\mathfrak{g}_a = 2 \cdot h_{44}^a, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{90}$$

Demnach ist in quasistatischen Feldern:

$$\operatorname{div} \mathfrak{g} = -2 \cdot h_{44}.$$

Da nun aber:

$$\int h_{44} \cdot V = \mu_{44} = \frac{1}{4} m_0,$$

so ist $2h_{44} = \frac{1}{2}s$, wenn s das spezifische Gewicht des Körpers bedeutet.

Im leeren Raum ist:

$$\operatorname{div} \mathfrak{g} = 0. \tag{91}$$

Im Innern der Materie, an einer Stelle, wo das spezifische Gewicht s beträgt, ist:

$$\text{div}\,\mathfrak{g} = -\frac{1}{2}s. \tag{92}$$

Daraus folgt ohne weiteres, daß sich zwei Massen m_1 und m_2 nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen. Ist r der Abstand der beiden Massen, so ist die zwischen ihnen wirkende Kraft $\mathfrak{P}$ zu berechnen als:

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \tag{93}$$

Durch die Wahl der Hamiltonschen Funktion Φ in Gl. (11) und (13) auf S. 4 sind die Maßeinheiten der Gravitationsfeldgrößen in der Weise festgelegt, daß die Gravitationskonstante gleich $1/8\pi$ ist.

Würde man in (13) an Stelle des Zahlenfaktors $^1/_2$ irgend einen anderen Faktor k wählen, so würden damit die Maßeinheiten der Gravitationsgrößen anders festgelegt, und zwar würde die Gravitationskonstante alsdann den Wert $1/16\,k\pi$ annehmen.

Man kann die Ergebnisse dieses Abschnittes in folgendem Satz zusammenfassen:

Wenn man die kleinen Veränderungen, welche die träge und die schwere Masse der Körper durch den Einfluß des äußeren Gravitationspotentials und durch den Einfluß der Bewegung erfahren, vernachlässigt, so wird die Einsteinsche Theorie für quasistatische Felder völlig identisch mit der Newtonschen Gravitationstheorie.

Die Formeln (86) können es uns ermöglichen, abzuschätzen, von welcher Größenordnung die bei dieser Vernachlässigung gemachten Fehler sein mögen, um so Fälle zu finden, an denen man die Einsteinsche Theorie prüfen kann.

Das Einkörperproblem.

12. Es sei ein weit ausgedehntes Gravitationsfeld $\omega^{\mu\nu}$, $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ gegeben. In ihm bewege sich ein materieller Körper, der so klein ist, daß er auf die das Gravitationsfeld erregenden Massen nicht in merkbarer Weise einwirkt. Die Bewegung des Körpers ist zu berechnen.

Das ist das Einkörperproblem.

Die auf den Körper wirkende Schwerkraft $\mathfrak{P}_a$ berechnet sich nach (86) zu:

$$\mathfrak{P}_a = -\frac{1}{4} \cdot m \cdot (\omega_{hr} \cdot \omega_{is} + \omega_{hs} \cdot \omega_{ir} - \omega_{hi} \cdot \omega_{rs}) \cdot q^h \cdot q^i \cdot g_a^{rs}.$$

Setzt man nach (15) ein:

$$g_a^{rs} = \omega^{rl} \cdot \left\{ \begin{matrix} a\,l \\ l \end{matrix} \right\} - \omega^{rl} \cdot \left\{ \begin{matrix} a\,l \\ s \end{matrix} \right\} - \omega^{sl} \cdot \left\{ \begin{matrix} a\,l \\ r \end{matrix} \right\},$$

so gibt eine leichte Rechnung:

$$\mathfrak{P}_a = m \cdot \omega_{sh} \cdot \left\{ \begin{matrix} a\,k \\ s \end{matrix} \right\} \cdot q^h \cdot q^k,$$

oder nach (9) und (12)

$$\text{(94a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_a &= -\frac{1}{2} \frac{m}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ha}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ka}}{\partial x^h} \right) \cdot q^h \cdot q^k \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^a} \cdot q^h \cdot q^k. \end{aligned} \right.$$

Der Trägheitswiderstand ist nach (86):

$$\text{(94b)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_{ah} \cdot q^h) &= \frac{d}{dt}(m \cdot \omega_{ah} \cdot q^h) \\ &= -g_{ah} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{g}} \cdot q^h \right) - \frac{m}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial g_{ah}}{\partial x^k} \cdot q^h \cdot q^k. \end{aligned} \right.$$

Aus (94a) und (94b) bekommt man nach einer leichten Umrechnung die Bewegungsgleichungen:

$$\text{(94)} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{g}} \cdot q^i \right) + \frac{m}{\sqrt{g}} \cdot \left\{ \begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right\} \cdot q^h \cdot q^k = 0.$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf (9) und (10) nach Gl. (54):

$$\frac{m}{\sqrt{g}} = \frac{m_0}{\sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}}.$$

Ferner ist:

$$ds = dt \cdot \sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu} \cdot dx^\mu \cdot dx^\nu}$$

das während der Zeit dt von dem Schwerpunkt des bewegten Körpers beschriebene Weltlinienstück, „natürlich" gemessen. Dividieren wir nun (94) durch $\sqrt{g_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}$, und heben wir m_0 weg, so bekommen wir als Differentialgleichungen der vom Schwerpunkt des Körpers beschriebenen Weltlinie:

$$\text{(95)} \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} k\,h \\ i \end{matrix} \right\} \cdot \frac{dx^h}{ds} \cdot \frac{dx^k}{ds} = 0,$$

das sind die Gleichungen der geodätischen Linie.

Die Weltlinie, welche der Schwerpunkt eines kleinen Körpers im Gravitationsfeld beschreibt, ist eine geodätische Linie des Hilbertschen Kontinuums.

Dieser bekannte Satz, von welchem Herr Einstein schon in seinen ersten Veröffentlichungen über die Gravitationstheorie Gebrauch gemacht hat, läßt sich natürlich auf andere Weise sehr viel einfacher herleiten, als auf dem in dieser Arbeit gewählten Wege. Er dient hier nur als Probe für die Richtigkeit meiner Berechnungen. Ein Vorteil des von mir eingeschlagenen umständlicheren Weges ist vielleicht darin zu erblicken, daß er die Grundlagen und die Voraussetzungen des Satzes besonders eindringlich klar macht. Wichtig kann aber die hier durchgeführte Unterscheidung der trägen und der schweren Masse werden, wenn man zu schwierigeren Problemen, zunächst also zum Zweikörperproblem fortschreiten will.

Die Energie der Lage.

Nach Formel (86) auf S. 34 läßt sich die vierte Gleichung, die Energiegleichung, folgendermaßen schreiben:

$$\frac{dU}{dt} = -\mu_{rs} \cdot \frac{\partial \omega^{rs}}{\partial t}. \tag{96}$$

$$\left\{ U = m_0 \cdot \frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt{-\omega_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}} \cdot (\omega_{44} - i \cdot (\omega_{14} \cdot q^1 + \omega_{24} \cdot q^2 + \omega_{34} \cdot q^3)) \right. . \tag{97}$$

Hier bedeutet U den gesamten Energiegehalt des betrachteten Körpers. Aus (96) geht ohne weiteres der folgende Satz hervor:

In einem zeitlich unveränderlichen Gravitationsfeld bleibt der Energiegehalt eines Körpers, auf den keine anderen als Schwerekräfte wirken, immer ungeändert.

Wenn beispielsweise ein Stein zur Erde herunterfällt, so nimmt er dabei nicht aus dem Gravitationsfeld Energie auf, sondern er gewinnt die Bewegungsenergie durch eine innere Umwandlung seiner eigenen Atome, deren „Energie der Lage" zu Bewegungsenergie wird. Wenn man umgekehrt den Stein in die Höhe hebt und ihm dabei Energie als Arbeit zuführt, so geht diese Energie nicht etwa, wie man es vom Fall des elektrischen Feldes zu denken gewohnt ist, in das Gravitations-

feld über, sondern die zugeführte Energie bleibt in dem Stein, und seine Atome saugen sich mit „Energie der Lage" voll, die sie dann beim Heruntergehen wieder abgeben können. der Stein erfährt, wenn er an Stellen anderen Potentials kommt, eine Veränderung aller seiner Atome, eine Veränderung, die man nach dem Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials berechnen kann. Diese Veränderung der Atome ist begleitet von einer Änderung ihres Energiegehaltes, so kommt die „Energie der Lage" zustande. Wie Herr E. Wiechert in seinen Arbeiten zur Gravitationstheorie ausgeführt hat, kann man die Veränderung, welche die Atome im Gravitationsfeld erfahren, so erklären, daß man das Gravitationspotential als ein Maß für die Dielektrizität und Permeabilität des Äthers ansieht. Diese Äthereigenschaften werden durch die Anwesenheit von Materie beeinflußt, in der Nähe schwerer Körper haben sie größere Werte als fern von ihnen. Da die innere Energie der Atome im wesentlichen elektrischer Natur ist, so werden sie nach den Stellen größerer Dielektrizität, d. h. größeren Gravitationspotentials hingezogen, indem dabei zugleich ihre innere Energie entweder durch Arbeitsleistung abnimmt oder sich in Bewegungsenergie umsetzt. Diese Auffassung, die sich auch in der Einsteinschen Theorie in allen Einzelheiten durchführen läßt, hat jedenfalls den Vorzug großer physikalischer Anschaulichkeit.

Wir wollen nun zu dem allgemeineren Fall übergehen, daß sich das Gravitationsfeld, in welchem sich der Körper bewegt, selber ändert. Denken wir uns etwa zwei Himmelskörper von ähnlicher Größe, so werden beide durch die gegenseitige Anziehungskraft in Bewegung gesetzt. Jeder von ihnen bewegt sich also in einem Felde mit veränderlichem Zentrum, d. h. in einem sich fortwährend ändernden Feld. In diesem Fall ändert sich natürlich auch der Energiegehalt des Körpers selber. Um diese Energieänderung zu berechnen, addieren wir zu Gl. (96) den Ausdruck:

$$O = q^a \cdot \frac{d}{dt}(m_{ah} \cdot q^h) - q^a \cdot \mu_{rs} \cdot \frac{\partial \omega^{rs}}{\partial x^a}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

den wir durch Multiplikation der α^{ten} Bewegungsgleichung (86) und Summation über $\alpha = 1, 2, 3$ gewinnen. Die Addition ergibt:

$$\frac{dU}{dt} = q^\alpha \cdot \frac{d}{dt}(m_{\alpha h} \cdot q^h)_{\alpha=1,2,3} - \mu_{rs} \cdot \frac{d\omega^{rs}}{dt}$$

oder:

$$dU = q^\alpha \cdot d(m_{\alpha h} \cdot q^h)_{\alpha=1,2,3} - \mu_{rs} \cdot d\omega^{rs}. \tag{98}$$

Den ersten der beiden Summanden in (98) kann man als „Arbeit der Trägheitskräfte" auffassen:

$$q^\alpha \cdot d(m_{\alpha h} \cdot q^h) = \frac{d(m_{\alpha h} \cdot q^h)}{dt} \cdot dx^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Der zweite setzt sich zusammen aus der „Arbeit der Gravitationskraft" und aus derjenigen Energie, die infolge der Änderung des Gravitationsfeldes unvermerkt zwischen Feld und Materie ausgetauscht wird:

$$-\mu_{rs} \cdot d\omega^{rs} = -\mu_{rs} \cdot \Gamma^{rs}_{\alpha\,\alpha=1,2,3} \cdot dx^\alpha - \mu_{rs} \cdot \frac{\partial \omega^{rs}}{\partial t} \cdot dt.$$

Die „Arbeit der Trägheitskräfte" ist der „Arbeit der Gravitationskräfte" entgegengesetzt gleich, falls nicht noch irgendwelche anderen Kräfte auf den Körper wirken, die ebenfalls Arbeit leisten. Der letzte Summand gibt also allein denjenigen Energiebetrag an, der vom Gravitationsfeld in den Körper hineingeht, oder umgekehrt.

Rechnen wir mit der — praktisch stets ausreichenden — Näherung der Newtonschen Theorie, so kann man die beiden Summanden in (98) auffassen als Änderung der Bewegungsenergie des Körpers dU_k und Änderung der Energie der Lage, die seine Atome aufnehmen dU_p. Es ist dann:

$$\begin{cases} dU_k = q^\alpha \cdot d(m_0 \cdot q^\alpha) = d(\tfrac{1}{2} m_0 \cdot q^2), \\ dU_p = -m_0 \cdot d\psi = d(-m_0 \cdot \psi), \\ dU = dU_k + dU_p. \end{cases} \tag{98a}$$

Hier bedeutet m_0 die Ruhmasse des Körpers und ψ das durch Gl. (88) auf S. 37 definierte Newtonsche Gravitationspotential:

$$\psi = \frac{1}{4} \cdot \Big((\omega^{44} - 1) - \big((\omega^{11} - 1) + (\omega^{22} - 1) + (\omega^{33} - 1)\big)\Big)$$
$$= -\frac{1}{2}(g^{44} + 1).$$

Aus (98a) ergibt sich als der gesamte Energiegehalt des Körpers im Gravitationsfeld:

$$U = m_0 - m_0 \cdot \psi + {}^1/_2 m_0 \cdot q^2 \ldots \tag{99}$$

Denn der Energiegehalt des Körpers in einem gravitationsfreien Gebiet in Ruhe ist gleich seiner Ruhmasse m_0. Man kann die Formel (99) übrigens auch direkt aus (55b) gewinnen, wenn man mit derselben Näherung rechnet, die zur Newtonschen Theorie führt. Brauchen wir für den Massenfaktor m die Näherung (54a), so liefert (55b):

$$U = \frac{m_0 \cdot \sqrt{-g_{44}}}{\sqrt{1-q^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{-g^{44}} \cdot \sqrt{1-q^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1+2\psi} \cdot \sqrt{1-q^2}}.$$

Als eine Anwendung von (99) wollen wir zwei Himmelskörper von den Massen m_1 und m_2 betrachten. Sei γ die Gravitationskonstante, r die Entfernung der beiden Körper. Dann befindet sich m_1 in einem Gebiet, wo ein Gravitationspotential ψ_1 herrscht:

$$\psi_1 = \gamma \cdot \frac{m_2}{r}.$$

Der andere Körper m_2 befindet sich im Gravitationspotential ψ_2:

$$\psi_2 = \gamma \cdot \frac{m_1}{r}.$$

Bezeichnen wir weiter die Geschwindigkeiten der beiden Körper mit q_1 und q_2, so bekommen wir für ihren Energiegehalt:

$$\begin{cases} U_1 = m_1 - \gamma \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r} + \dfrac{1}{2} m_1 \cdot q_1^2, \\ U_2 = m_1 - \gamma \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r} + \dfrac{1}{2} m_2 \cdot q_2^2. \end{cases} \tag{100}$$

Nun berechnet sich aber, wie aus der Mechanik bekannt ist, der Energiegehalt des ganzen Systems der beiden Körper als:

$$U = U_0 - \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r} + \frac{1}{2} m_1 \cdot q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 q_2^2, \tag{101}$$

wo U_0 die Energie der beiden Körper ist, wenn sie unendlich weit voneinander entfernt und in Ruhe sind, also $U_0 = m_1 + m_2$. Der Vergleich von (100) und (101) lehrt uns, daß mit der Berechnung der Eigenenergie der beiden Körper das Problem

noch nicht erschöpft ist. Auch der vom Gravitationsfeld erfüllte Äther enthält eine gewisse Menge Energie, die man natürlich ebenfalls nach Formel (55b) berechnen kann. In dem von uns betrachteten Beispiel ergibt sich in der hier benutzten Näherung diese Energie ohne weiteres durch den Vergleich von (100) und (101). Der Energiezuwachs U_3 des von dem Gravitationsfeld erfüllten Äthers bei Annäherung der Körper auf die Entfernung r beträgt:

$$U_3 = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r} \dots \tag{102}$$

Nun ist in der Tat: $U = U_1 + U_2 + U_3$.

Wenn die beiden schweren Massen m_1 und m_2 sich um dr voneinander entfernen, so gewinnt jede von ihnen an Energie der Lage denselben Betrag, nämlich $\gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot dr/r^2$, gleichzeitig verliert der Äther an Energie des Gravitationsfeldes denselben Betrag, so daß der gesamte Zuwachs der Gravitationsenergie des ganzen Systems nur der einfache Betrag $\gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot dr/r^2$ ist.

Um diesen Betrag vermindert sich also die Summe der Bewegungsenergien der beiden Körper.

Ich kehre nun noch einmal zu dem Beispiel des schweren Steins zurück. Seine Masse sei m, das Gravitationsfeld der Erde sei g. Heben wir den Stein um die Strecke h in die Höhe, so saugt er die Energie der Lage $m \cdot g \cdot h$ auf, es ist das die ganze ihm beim Heben zugeführte Arbeit. Genau dieselbe Energie nimmt auch die Erde auf, weil das von dem Stein ausgehende schwache Gravitationsfeld auf die weit ausgedehnten Massen der Erde eine energievermindernde Wirkung ausübt. Infolgedessen nehmen die Atome der Erde bei Entfernung des Steines etwas Energie auf, und zwar im ganzen $m \cdot g \cdot h$. Da sich die Erde bei dem betrachteten Vorgang nicht bewegt, so schlüpft diese Energie, ohne daß wir etwas davon bemerken, aus dem Gravitationsfeld im Äther, welches die Energie $m \cdot g \cdot h$ verliert, in die Atome der Erde hinein.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

1) Die Einsteinsche Theorie der Gravitation läßt sich vollkommen in die Form bringen, welche sich für die Untersuchungen über das Problem der Materie als die geeignetste erwiesen hat. Man muß zu dem Zweck als Gravitations-

potential $\omega^{\mu\nu}$ und als Feldstärke $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ die folgenden Größen wählen:

$$\omega^{\mu\nu} = -\sqrt{g}\cdot g^{\mu\nu}, \quad \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu} = \frac{\partial\,\omega^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}.$$

Man bekommt aus der von Einstein angegebenen Hamiltonschen Funktion Φ die zweite Art der Feldgrößen der Gravitation $\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha$ und die Dichte der schweren Masse $h_{\mu\nu}$ in der üblichen Weise:

$$\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}}, \quad h_{\mu\nu} = -\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\omega^{\mu\nu}}.$$

Das Hamiltonsche Prinzip gibt dann die Gravitationsgleichungen:

$$\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} = -h_{\mu\nu}.$$

Die zweite Art der Gravitationsgrößen $\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha$ sind den Christoffelschen Symbolen nahe verwandt:

$$\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\left\{\begin{matrix}\mu\,\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\,\delta_\nu^\alpha\cdot\left\{\begin{matrix}\mu\,\tau\\ \tau\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\,\delta_\mu^\alpha\left\{\begin{matrix}\nu\,\tau\\ \tau\end{matrix}\right\}\right).$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu} = -\omega^{\mu\tau}\cdot\left\{\begin{matrix}\tau\,\alpha\\ \nu\end{matrix}\right\} - \omega^{\tau\nu}\cdot\left\{\begin{matrix}\tau\,\alpha\\ \mu\end{matrix}\right\} + \omega^{\mu\nu}\cdot\left\{\begin{matrix}\tau\,\alpha\\ \tau\end{matrix}\right\}.$$

2) Wenn man Glieder höherer Ordnung in den Ableitungen $\partial\,\omega^{\mu\nu}/\partial x^\alpha$ und höhere Ableitungen vernachlässigt, so kann man Gravitationsfelder addieren. Es gilt dann der Satz:

Die Feldgrößen $\mathfrak{k}_{\mu\nu}^\alpha$ zweier Gravitationsfelder, oder was dasselbe ist, ihre Christoffelschen Symbole, addieren sich einfach, nachdem man die linearen Transformationen, welche sich nach dem Prinzip der Relativität der Geschwindigkeit und des Gravitationspotentials an ihnen als notwendig ergeben, ausgeführt hat.

Für die Feldgrößen $\mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}$ gibt es ein derartiges einfaches Additionstheorem nicht.

Ist beispielsweise ein sehr ausgedehntes Gravitationsfeld gegeben, dessen Größen wir durch einen Circumflex kennzeichnen:

$$\hat{\omega}^{\mu\nu},\quad \hat{\mathfrak{g}}_\alpha^{\mu\nu},\quad \hat{\mathfrak{k}}_{\mu\nu}^\alpha,\quad \widehat{\left\{\begin{matrix}\mu\,\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\}},$$

und bringen wir in dieses Feld einen verhältnismäßig kleinen Körper hinein, so müssen wir zunächst auf die Größen, die das Eigenfeld dieses Körpers darstellen, und die in einem gravitationsfreien Gebiet:

$$\overline{\omega^{\mu\nu}},\quad \overline{\mathfrak{g}}{}^{\mu\nu}_{\alpha},\quad \overline{\mathfrak{k}}{}^{\alpha}_{\mu\nu},\quad \left\{\overline{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}}\right\},$$

sein mögen, die lineare Transformation anwenden, welche sie für ein Gebiet vom Gravitationspotential $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ umwandeln. Die auf diese Weise umgerechneten Größen bezeichnen wir durch einen Akzent:

$$\grave{\omega}^{\mu\nu},\quad \grave{\mathfrak{g}}{}^{\mu\nu}_{\alpha}\quad \grave{\mathfrak{k}}{}^{\alpha}_{\mu\nu},\quad \left\{\grave{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}}\right\}.$$

Dann behauptet unser Satz, daß die Feldgröße $\mathfrak{k}^{\alpha}_{\mu\nu}$ an irgendeiner beliebigen Stelle im ganzen den Wert hat:

$$\mathfrak{k}^{\alpha}_{\mu\nu} = \grave{\mathfrak{k}}^{\alpha}_{\mu\nu} + \hat{\mathfrak{k}}^{\alpha}_{\mu\nu}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} = \left\{\grave{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}}\right\} + \left\{\hat{\begin{matrix}\mu\nu\\ \alpha\end{matrix}}\right\}$$

Dabei ist übrigens die beschränkende Annahme über die Kleinheit der Ableitungen nur für das ausgedehnte äußere Feld $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ notwendig. Für das Eigenfeld des Körpers $\overline{\omega^{\mu\nu}}$ sind keinerlei einschränkende Voraussetzungen erfordert.

Bei der Feldstärke $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha}$ muß man unterscheiden: den Wert der äußeren Feldstärke bei Abwesenheit jeder Materie $\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha}$ und den Wert der äußeren Feldstärke $\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha}$ in dem Bereich des kleinen Körpers, nachdem er in das Feld eingeführt ist. Es gilt:

$$\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha} = -\hat{\omega}^{\mu\nu}\cdot\left\{\hat{\begin{matrix}\tau\alpha\\ \nu\end{matrix}}\right\} - \hat{\omega}^{\tau\nu}\cdot\left\{\hat{\begin{matrix}\tau\alpha\\ \mu\end{matrix}}\right\} + \hat{\omega}^{\mu\nu}\cdot\left\{\hat{\begin{matrix}\tau\alpha\\ \tau\end{matrix}}\right\}$$

$$\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha} = -\grave{\omega}^{\mu\nu}\cdot\left\{\hat{\begin{matrix}\tau\alpha\\ \nu\end{matrix}}\right\} - \grave{\omega}^{\tau\nu}\cdot\left\{\hat{\begin{matrix}\tau\alpha\\ \mu\end{matrix}}\right\} + \grave{\omega}^{\mu\nu}\cdot\left\{\hat{\begin{matrix}\tau\alpha\\ \tau\end{matrix}}\right\}$$

Die ganze Feldstärke an irgendeiner Stelle ist dann:

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{\alpha} = \grave{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha} + \hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha}.$$

Das Gravitationspotential selber ist:

$$\omega^{\mu\nu} = \grave{\omega}^{\mu\nu} + \hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}_{\alpha}\cdot x^{\alpha}.$$

In dieser letzten Formel bedeutet $\grave{\omega}^{\mu\nu}$ den Wert, den man bekommt, wenn man $\bar{\omega}^{\mu\nu}$ mit konstanten Transformations-

koeffizienten umrechnet, welche den Werten entsprechen, die $\hat{\omega}^{\mu\nu}$ und q im Koordinatenanfang haben. Wenn man $\hat{\omega}^{\mu\nu} - \delta^{\mu\nu}$ als sehr klein rechnet und alle Glieder, die in diesen Größen von höherer Ordnung sind, wegstreicht, so kann man die $\dot{\omega}^{\mu\nu}$ ausrechnen:

$$\dot{\omega}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\hat{\omega}_0^{\mu\lambda} \cdot \bar{\omega}^{\lambda\nu} + \hat{\omega}_0^{\lambda\nu} \cdot \bar{\omega}^{\mu\lambda}) \qquad \lambda = 1, 2, 3$$

$$+ \frac{1}{2}(\delta_4^{\mu} \cdot \hat{\omega}_0^{4\tau} \cdot \bar{\omega}^{\tau\nu} + \delta_4^{\nu} \cdot \hat{\omega}_0^{\tau 4} \cdot \bar{\omega}^{\mu\tau}) \qquad \tau = 1, 2, 3, 4$$

Der Index 0 soll den Wert im Koordinatenanfang andeuten. Dabei ist für das Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3, x^4) festgesetzt, daß erstens der Körper in ihm dieselben Bewegungen macht, wie in dem gravitationsfreien Gebiet $(\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}, \overline{x^4})$, wo sein Potential $\overline{\omega^{\mu\nu}}$ beträgt, und daß zweitens die Lage der x^1, x^2, x^3-Achsen zu dem Körper im Gravitationsfeld dieselbe ist, wie die der $\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}$-Achsen zu dem Körper im gravitationsfreien Gebiet. Bei der Formulierung dieser Bedingungen muß auf die Verzerrung der Längen und Zeiten durch den Einfluß des Gravitationspotentials in geeigneter Weise Rücksicht genommen werden.

3) Unter zwei Voraussetzungen lassen sich die Impulsenergiegleichungen der Einsteinschen Theorie auf eine Form bringen, die im wesentlichen dieselbe ist, wie die der Newtonschen Mechanik.

Erstens: Außerhalb des von dem betrachteten Körper eingenommenen Volumens V ist die in seinem Gravitationsfeld enthaltene Energie so klein, daß es für die Berechnung seiner gesamten Masse und seiner Impulsgrößen ganz gleichgültig ist, ob wir uns auf das Volumen V beschränken oder ob wir über ein beliebig großes Volumen integrieren, von welchem V nur ein kleiner Teil ist.

Dies ist die Voraussetzung der Begrenztheit der Materie, ohne welche der Begriff der Masse gar keinen Sinn hätte.

Zweitens: Die Feldstärken $g_\alpha^{\mu\nu}$ des äußeren Feldes sollen so klein sein, daß man innerhalb des von dem Körper eingenommenen Volumens V alle Glieder, die in ihnen von höherer Ordnung sind, streichen kann. Ebenso sollen alle höheren

Ableitungen des Gravitationspotentials gestrichen werden. Mit den $\mathfrak{g}_a^{\mu\nu}$ sind die Ableitungen der Geschwindigkeit des Körpers gleichwertig.

Dies ist die Annahme der quasistationären Bewegung des Körpers.

Unter diesen beiden Annahmen ergeben sich als die Bewegungsgleichungen des Körpers im Gravitationsfeld:

$$\mu_{rs} \cdot \mathfrak{g}_a^{rs} = \frac{d}{dt}(m_{ka} \cdot q^k); \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\mu_{rs} = -\frac{1}{4} m \cdot (\omega_{kr} \cdot \omega_{is} + \omega_{ks} \cdot \omega_{ir} - \omega_{ki} \cdot \omega_{rs}) \cdot q^k \cdot q^i,$$

$$m_{ka} = m \cdot \omega_{ka},$$

$$m = m_0 \cdot \frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt{-\omega_{\mu\nu} \cdot q^\mu \cdot q^\nu}},$$

hier bedeuten:

$\omega^{\mu\nu}$ das Potential des Gravitationsfeldes,
$\mathfrak{g}_a^{\mu\nu}$ die Feldstärke des Gravitationsfeldes,
$\omega^{\mu\nu}$ den zu $\omega^{\mu\nu}$ reziproken Tensor,
$\omega = |\omega_{\mu\nu}|$ die Determinante der $\omega^{\mu\nu}$,
m_0 die Ruhmasse des Körpers in einem gravitationsfreien Gebiet,
q^1, q^2, q^3 die Geschwindigkeit des Körpers,
$q^4 = i$, die imaginäre Einheit.

Für die $\omega_{\mu\nu}$ und die q^k sind die Werte im Schwerpunkt des Körpers einzusetzen, alle Glieder mit $\mathfrak{g}_a^{\mu\nu}$ und mit den Ableitungen der q^k sind aus den Ausdrücken für die Größen μ_{rs} und m_{ka} zufolge der Annahme der quasistationären Bewegung weggestrichen.

In zwei Punkten unterscheiden sich die Bewegungsgleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie von den Gleichungen der Newtonschen Mechanik:

Erstens: Sowohl das Gravitationspotential $\omega^{\mu\nu}$, wie auch die träge Masse m_{rs} und die schwere Masse μ_{rs} des Körpers haben den Charakter von vierdimensionalen Tensoren, während sie in der alten Mechanik Skalare sind.

Zweitens: Träge und schwere Masse sind keine Konstanten, sie hängen beide sowohl von der Geschwindigkeit des Körpers,

wie vom Gravitationspotential seiner Umgebung ab, und zwar nach verschiedenen Gesetzen, so daß auch ihr Verhältnis variabel ist. Von der chemischen Natur des Körpers oder von seinem sonstigen physikalischen Zustand (Temperatur usw.) hängt das Verhältnis nicht ab.

Es ist für die Einsteinsche Gravitationstheorie sehr charakteristisch, daß ihr zufolge die materiellen Elementarteilchen in dem Feld fast unverändert existenzfähig bleiben. Das ist der Grund, weswegen sie zu einer Mechanik führt, die sich von der Newtonschen Mechanik nur in unwesentlichen Punkten unterscheidet. Wenn man die Gedankengänge der vorliegenden Arbeit aufmerksam verfolgt, besonders in Abschnitt 6, so wird man sich dem Eindruck kaum entziehen können, daß die Einsteinsche Theorie wohl die einzige Theorie sein dürfte, die dies leistet. Denn das bedeutet im Grunde das Prinzip der allgemeinen Transformierbarkeit: daß sich die materiellen Teilchen den Änderungen des Gravitationspotentials im Felde anschmiegen können. Ich halte dies für die hervorstechendste Eigenschaft der Theorie, wegen welcher nach meiner Meinung alle anderen Theorien verworfen werden müssen, solange nicht ganz dringende Gründe gegen die Einsteinsche Theorie vorgebracht werden können.

4) Im Falle des Einkörperproblems ergeben die von mir aufgestellten Bewegungsgleichungen den bekannten Satz:

Der Schwerpunkt eines Körpers, der sich in einem weit ausgedehnten Gravitationsfeld bewegt und der so klein ist, daß er auf die das Feld erregenden Massen keine merkbare Rückwirkung ausübt, beschreibt als Weltlinie eine geodätische Linie des Hilbertschen Kontinuums.

5) Wenn man die kleinen Änderungen, welche die träge und die schwere Masse der Körper durch den Einfluß der Geschwindigkeit und des Gravitationspotentials erfahren, vernachlässigt, so gehen die Bewegungsgleichungen der Einsteinschen Theorie völlig in die Bewegungsgleichungen der Newtonschen Mechanik über.

Das Newtonsche Gravitationspotential berechnet sich als:

$$\psi = \frac{1}{4} \cdot \Big((\omega^{44} - 1) - \big((\omega^{11} - 1) + (\omega^{22} - 1) + (\omega^{33} - 1) \big) \Big)$$

$$= -\frac{1}{2} (g^{44} + 1)$$

wenn man die willkürliche additive Konstante so wählt, daß im gravitationsfreien Raum $\psi = 0$ wird.

Beschränkt man sich auf den Fall quasistatischer Felder, so geht die Einsteinsche Theorie überhaupt vollständig in die Newtonsche Gravitationstheorie über. Definiert man die Feldstärke $\mathfrak{g}$ als:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

so wird im quasistatischen Feld:

$$\mathfrak{g}_\alpha = 2 \cdot k^a_{4\,4},$$

woraus dann folgt:

$$\text{im leeren Raum: } \operatorname{div} \mathfrak{g} = 0$$

$$\text{in der Materie: } \operatorname{div} \mathfrak{g} = -\frac{1}{2} s,$$

wenn man mit s das spezifische Gewicht der Materie bezeichnet. Die Gravitationskonstante hat in dem durch die Wahl der Hamiltonschen Funktion festgelegten Maßsystem den Wert $1/8\,\pi$. Man kann jedoch dadurch, daß man der Hamiltonschen Funktion einen Zahlenfaktor zufügt, das Maßsystem beliebig ändern, und so der Gravitationskonstante jeden beliebigen Wert verleihen.

6) Für die Energieverhältnisse im Gravitationsfeld ist besonders charakteristisch, daß sich nicht nur die Energie im Gravitationsfeld ändert, sondern daß die Atome der Materie selber „Energie der Lage" aufnehmen und wieder abgeben können. Wenn man sich auf die Näherung der Newtonschen Theorie beschränkt, die in allen praktischen Fällen die Vorgänge mit sehr großer Genauigkeit wiedergibt, so kann man sagen, daß der gesamte Energiegehalt u eines Körpers sich folgendermaßen berechnet:

$$U = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathfrak{q}^2} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \psi}} = m_0 + \frac{1}{2} m_0 \cdot \mathfrak{q}^2 - m_0 \cdot \psi.$$

Hier bedeutet m_0 die Ruhmasse des Körpers, welche identisch ist mit seiner Ruhenergie, $\mathfrak{q}$ seine Geschwindigkeit, also $m_0 \cdot \mathfrak{q}^2/2$ die Bewegungsenergie, ψ das Gravitationspotential an dem Ort des Körpers und $-m_0 \cdot \psi$ die „Energie der Lage" seiner Atome. Die Energie der Lage eines Körpers kann sich auf zweierlei Art ändern: erstens dadurch, daß er sich in dem

Gravitationsfeld bewegt, dann ist die Änderung seiner Energie der Lage gegeben durch die „Arbeit der Gravitationskraft“ $-m_0 \cdot (\mathfrak{g}_x \cdot dx + \mathfrak{g}_y dx + \mathfrak{g}_z \cdot dz)$, zweitens dadurch, daß sich das Gravitationspotential selber zeitlich verändert, dann schlüpft, ohne daß wir es merken, Energie im Betrage $-m_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot dt$ von dem Gravitationsfeld in ihn über. Aus diesen beiden Teilen setzt sich die gesamte Änderung der „Energie der Lage“ des Körpers additiv zusammen:

$$-m_0 \cdot d\psi = -m_0 \cdot (\mathfrak{g}_x \cdot dx + \mathfrak{g}_y \cdot dy + \mathfrak{g}_z \cdot dz) - m_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot dt,$$

wo $\mathfrak{g}_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ usw.

Aus der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft in quasistatischen Feldern folgt, daß bei einer relativen Verschiebung zweier gravitierender Massen die beiden Massen dieselbe Änderung ihrer Energie der Lage erfahren. Gleichzeitig ändert sich dann stets die im Äther im Gravitationsfeld aufgespeicherte Energie und zwar ebenfalls um denselben Betrag, aber im entgegengesetzten Sinn. Daher ändert sich die Gravitationsenergie des ganzen Systems, das aus den zwei Körpern und dem Gravitationsfeld zusammengesetzt ist, gerade um denselben Betrag, wie die Energie der Lage eines der beiden Körper.

Wenn man beispielsweise einen Stein im Erdfeld hebt, so saugt er die ganze ihm zugeführte Arbeit als Energie der Lage ein. Um denselben Betrag vergrößert sich aber zugleich auch die Energie der Lage in den Atomen des benachbarten Bereichs der Erde, ohne daß man hiervon etwas merkt. Denn durch das Heben des Steines wird der Wert des Gravitationspotentials in der Erde in seiner Umgebung etwas geändert. Die Energie, welche die Erde gewinnt, schlüpft aus dem Gravitationsfeld, dessen Energie sich um denselben Betrag verringert, unbemerkt in den Erdboden hinein.

Eine sehr anschauliche Vorstellung über die Ursache der inneren Veränderungen, die die Atome im Gravitationsfeld erfahren, und denen ihre „Energie der Lage“ entspricht, hat E. Wiechert entwickelt. Nach ihm bedeutet das Gravitationspotential nichts anderes als ein Maß für die Dielektrizität und die Permeabilität des Äthers. Durch die Anwesenheit der Materie werden diese beiden Ätherkonstanten verändert und

zwar in der Weise, daß sie in der Nähe schwerer Massen größer sind als entfernt von ihnen. Da die Energie der Materie im wesentlichen elektrischer Natur ist, so ist ohne weiteres klar, daß die Materie immer in die Stellen größerer Dielektrizität hineingezogen wird und dabei zugleich an innerer Energie abnimmt. Diese Auffassung, die sich auch für die Einsteinsche Gravitationstheorie in allen Einzelheiten durchführen ließe, scheint mir den physikalischen Sinn der Theorie am besten wiederzugeben.

Halle a. S., Physik. Inst. d. Univ., 8. April 1922.

(Eingegangen 12. April 1922.)

2. *Absolute Entropie und chemische Konstante;* von Karl F. Herzfeld.

In diesen Annalen hat kürzlich eine Diskussion[1]) über das im Titel genannte Thema stattgefunden. Es sei gestattet, hierzu einige Bemerkungen zu machen und daran prinzipielle Überlegungen zu knüpfen, die das Verhältnis einiger Ableitungen der Entropiekonstanten klarstellen sollen.

Die Schwierigkeiten in der Kombinatorik lassen sich vielleicht auf einem Weg umgehen, den Verf. in einigen Arbeiten[2]) benützt hat, wobei die Bedeutung jedes einzelnen Schrittes deutlich wird.

Wir führen mit Planck das Zustandsintegral Φ eines Moleküls, erstreckt über den „μ-Raum" ein

$$\Phi = \int \ldots \int dx\,dy \ldots dz \ldots e^{-\frac{E_p}{kT}} \int\int d\xi \ldots d\zeta\, e^{-\frac{E_J}{kT}} \cdot e^{-\frac{U_0}{kT}}.$$

Hier ist U_0 die kleinste Energie[3]), die das Molekül haben kann, um noch zu dem betrachteten Körper zu gehören, E_J die darüber hinausgehende kinetische, E_p die darüber hinausgehende potentielle Energie, $\xi \ldots \zeta$ sind die zu den s Freiheitsgraden gehörigen Momente, x die zugehörigen Koordinaten. Die Integration über die letzteren ist dabei über den *ganzen* zur Verfügung stehenden Raum zu erstrecken. Betrachtung der Arbeitsleistung bei unendlich kleinen Verschiebungen lehrt, daß das thermodynamische Potential ζ mit Φ durch die Gleichung verbunden ist

$$e^{-\frac{\zeta}{RT}} = A\,\Phi.$$

1) P. Ehrenfest u. V. Trkal, Ann. d. Phys. 65. S. 609. 1921; M. Planck, ebenda 66. S. 365. 1922.

2) K. F. Herzfeld, Zeitschr. f. phys. Chem. 95. S. 139. 1920; Phys. Zeitschr. 22. S. 186. 1921; 23. S. 95. 1922.

3) Es ist genauer $U_0 + p_0 v$ zu schreiben, vgl. K. Herzfeld, Zeitschr. f. phys. Chem. a. a. O. Eine gewisse Schwierigkeit liegt darin, daß man beim Gas U_0 allein zu schreiben hat, um das richtige ζ zu erhalten.

Hierbei waren Änderungen der Molekülzahl n noch nicht in Betracht gezogen. Um die Abhängigkeit von n zu erhalten, muß man Gleichgewichte betrachten (bzw. nach Ehrenfest n reversibel ändern).[1]) Betrachtet man Gleichgewichte derselben Moleküle oder Atome in zwei verschiedenen Zuständen, so ergibt sich, daß die Bildpunkte im μ-Raum sich wie Gasatome im wirklichen Raum verhalten, d. h. die Molekülzahlen zweier Körper verhalten sich wie die Zustandsintegrale. Oder anders ausgedrückt: Das Zustandsintegral, dividiert durch die Molekülzahl, ist in allen im Gleichgewicht befindlichen Körpern gleich. D. h.

$$e^{-\frac{\zeta}{RT}} = A' \frac{\Phi}{n},$$

wo A' noch von der Art der vorkommenden Atome abhängen könnte (vgl. Ehrenfest, a. a. O. S. 624), was aber bedeutungslos ist und daher weggelassen werden kann. Das n im Nenner kommt so auf vollständig natürliche Art herein, man kann auch sagen, daß in der Berechnung des Zustandsintegrals nur das auf ein Molekül entfallende Volum zu nehmen ist.

An dieses Resultat seien nun einige prinzipielle Bemerkungen geknüpft. ζ und damit die Entropie S ist (bis auf die Energiekonstante U_0 natürlich, wovon wir im folgenden absehen werden) vollständig bestimmt, auch wenn wir nur von der klassischen Theorie Gebrauch machen, denn das Zustandsintegral ist vollständig berechenbar, wenn wir nur die kinetischen Daten haben, und genügt vollkommen zur Berechnung der Gleichgewichte; ohne daß es ausdrücklich hervorgehoben wäre, beruht auf der Vergleichung der Zustandsintegrale die Miesche Dampfdruckformel[2]), die mit der Sterns identisch ist, und die Boltzmannschen[3]) Rechnungen über Gasdissoziation.[4]) Aus dem Zustandsintegral folgt dann die Entropie nach der Gleichung

$$S = -\frac{\partial \zeta}{\partial T}.$$

---

1) Wie es hiermit zusammenhängt, daß man nach Planck die Gibbssche Statistik anwenden muß, wäre noch klarzustellen.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. 11. S. 657. 1903.

3) L. Boltzmann, Gastheorie 2. Bd. S. 177. Leipzig 1898.

4) Daß O. Stern (Ann. d. Phys. 44. S. 497. 1914) aus dem Nernstschen Theorem geschlossen hatte, die „empfindlichen Bezirke" Boltz-

So findet man für die Entropie eines einatomigen Gases

$$S = \tfrac{3}{2} R \ln T + R \ln \frac{V}{n} + R \ln (2\pi m k)^{3/2} e^{5/2}.$$

Das unterscheidet sich von der üblichen Formel durch das Fehlen von h^3 im Nenner.

Während (bis auf diesen letzten Umstand, auf den später zurückgekommen wird) auch im allgemeinen Fall die klassische Theorie ebensoviel leistet und das gleiche wie die Quantentheorie ergibt, solange T hoch ist, unterscheiden sich die beiden Theorien bei tiefer Temperatur dadurch, daß nach der ersteren das Phasenvolum, auch von dem Faktor $e^{-\frac{U_0}{kT}}$ abgesehen, zu 0 geht, d. h. S logarithmisch unendlich wird, während nach der letzteren sich das Phasenvolumen nur zu $h^s \cdot e^{-\frac{U_0}{kT}}$ zusammenzieht, die Entropie also endlich bleibt.

Allerdings wird bei der Formulierung, die wir bisher vorgenommen haben, die Entropie nach der Quantentheorie beim absoluten Nullpunkte nicht 0, sondern

$$S = R \frac{\partial}{\partial T} \left(T \ln \frac{\Phi}{n} \right) = R s \ln h.$$

Um $S_{T=0}$ zu Null zu machen, dürfen wir den Phasenraum nicht in cm-g-sec, genauer in $\left(\mathrm{g}\,\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}}\right)^s$, sondern müssen ihn in h^s als Einheiten messen. In diesem Fall zieht sich der Phasenraum für $T = 0$ in einen Einheits„würfel" von $2s$ Dimensionen zusammen. Wir erhalten für das thermodynamische Potential

$$e^{-\frac{\zeta}{RT}} = \frac{e^{-\frac{U_0}{kT}}}{n} \frac{\int\int dx\,dz\, e^{-\frac{E_p}{kT}} \int d\xi\,d\zeta\, e^{-\frac{E_J}{kT}}}{h^s}.$$

Das letztere $2s$fache Integral hat nun eine sehr einfache Bedeutung. Es ist nämlich einfach die Zahl der „Einheits-

---

manns müßten die ganze Oberfläche bedecken, beruht auf folgendem: Das Theorem verlangt, daß bei Vereinigung zum Molekül im *festen* Zustand keine Änderung des „Orientierungsgewichtes" auftritt. Nun ist bei Ableitung der Dampfdruckformel stillschweigend die Voraussetzung gemacht, daß dies auch bei der Verdampfung nicht der Fall sei. Erst dann folgt daraus, daß auch bei der Molekülbildung im *Gas* ein solches Aufeinanderzudrehen nicht auftritt. Vgl. auch W. Schottky, Phys. Zeitschr. 22. S. 1. 1921; 23. S. 9. 1922.

würfel" h^s, die im Phasenraum enthalten sind. (Das braucht natürlich durchaus keine ganze Zahl zu sein, sondern ist ein Zeit- bzw. Scharmittel über das gesamte System. Nur bei Ausdehnung auf das gesamte System ist sie notwendig ganz.)

Nimmt man an, daß prinzipiell alle Systeme Quantenbedingungen zu unterwerfen sind, so erhält man

$$\zeta = NU_0 - RT(\sum_s \ln \bar{m}_i - \ln n),$$

wo die Summation über die s Freiheitsgrade eines Moleküls zu erstrecken ist und $\bar{m}_i$ die „mittlere Quantenzahl" ist, d, i. die Quantenzahl, die dem $i$ten Freiheitsgrad im (Zeit- oder Zahl-) mittel zukommt.

$\bar{m}_i$ ist natürlich erst definiert durch[1])

$$\bar{m}_i h = \sum h e^{-\frac{E_m}{kT}},$$

bzw. im Grenzwert

$$\int\int dx_i \, d\xi_i \, e^{-\frac{E_x + E_\xi}{kT}}.$$

Die Entropie wird

$$S = R \frac{\partial}{\partial T} (T \sum \ln \bar{m}_i - T \ln n).$$

Bei dieser Zählung werden natürlich für $T = 0$ alle $\bar{m}_i = 1$, bis auf eines, das n wird, also das Phasenvolumen

$$1^s e^{-\frac{U_0}{kT}}$$

und die Entropie Null.

Betrachten wir nun die bisherigen Methoden zur Berechnung der Entropiekonstanten einatomiger Gase, so können wir sie im wesentlichen in zwei Gruppen teilen. Bei der ersten (Sackur[2]), Tetrode, Brody) wird mehr oder weniger korrekt das Phasenvolumen in den Einheitswürfeln h^3 gemessen, wie

---

1) Beim festen Körper z. B. ist die Summation über alle Quantenzahlen vorzunehmen, die der Schwingung um *eine* Ruhelage entsprechen, und dann mit n, der Zahl der möglichen Ruhelagen zu multiplizieren, da das Atom um irgendeine der Ruhelagen schwingen kann.

2) O. Sackur, Ann. d. Phys. **36**. S. 958. 1911; **40**. S. 67. 1913; H. Tetrode, Ann. d. Phys. **38**. S. 434. 1912; **39**. S. 255. 1912; M. Brody, Zeitschr. f. Phys. **6**. S. 79. 1921; auch H. W. Keesom, Phys. Zeitschr. 14. S. 665. 1913; A. Sommerfeld, Göttinger Vorträge, Leipzig 1914, S. 125, wo mit Eigenschwingungen statt mit Molekülen gerechnet wird.

wir es eben beschrieben haben und so die Entropie ohne Beziehung auf andere Körper definiert.

Die zweite (Stern[1]), Tetrode) kommt darauf hinaus, daß das Phasenvolum zuerst in cm-g-sec berechnet und dann durch das Phasenvolum des „eingefrorenen" festen Körpers $N h^3$ dividiert wird. Das ist der innere Grund dafür, daß beide Methoden zum selben Resultat führen.

Zusammenfassung: Es wird das „Zustandsintegral" als Grundlage der Statistik empfohlen. Dann wird darauf hingewiesen, daß der Absolutwert der Entropie auch auf Grund der klassischen Theorie für hohe Temperaturen richtig berechnet werden kann und erst der Übergang zu tiefen Temperaturen das Eingreifen der Quantentheorie erfordert. Um aus der klassischen Theorie bei hohen Temperaturen dieselben Formeln zu erhalten wie aus der Quantentheorie, ist das Phasenvolumen nicht in absoluten Einheiten, sondern in Würfeln vom Inhalt h^s zu messen.

München, 6. Mai 1922.

---

1) O. Stern, Phys. Zeitschr. 14. S. 629. 1913; Z. f. Elektrochemie 25. S. 66. 1919; H. Tetrode, Amst. Proc. 17. S. 1167. 1915.

(Eingegangen 10. Mai 1922.)

3. *Strukturuntersuchungen mit Röntgenstrahlen;* *von Fritz Kirchner.*

(Hierzu Tafel I.)

Während die Bestimmung der Strukturkonstanten bei solchen Substanzen, die in Form von größeren, gut ausgebildeten Kristallen zur Verfügung stehen, durch die besonders von Siegbahn vervollkommnete Röntgenspektroskopie mit außerordentlich großer Genauigkeit durchgeführt werden kann, ist die entsprechende Meßgenauigkeit noch verhältnismäßig sehr gering bei solchen Substanzen, bei denen infolge des Mangels an gut ausgebildeten Kristallen das Debye-Scherrersche Kristallpulververfahren angewandt werden muß. Die störenden Fehlerquellen dieses Verfahrens sind in einer neueren Arbeit[1]) eingehend diskutiert worden; die wesentlichsten davon haben wohl ihre Ursache einerseits darin, daß die Linienmitten nicht scharf definiert sind und andererseits in der verschiedenen Eindringungstiefe der Strahlen bzw. der Dicke des Kristallstäbchens selbst. Diese Fehlerquellen vermeidet das von Seemann und Bohlin[2]) angegebene fokussierende Verfahren, dessen Prinzip weiter unten noch skizziert werden soll. Das Verfahren wurde aber, soweit hier bekannt ist, bisher nur von Bohlin[3]) selbst zu einigen Aufnahmen verwendet, deren Auswertung praktisch keine wesentlich höhere Genauigkeit erbrachte als die Auswertung guter Aufnahmen der Stäbchenmethode. Neben Vereinfachungen und Verbilligung der Aufnahmetechnik war es in methodischer Hinsicht das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Vorzüge des Bohlinschen Verfahrens bezüglich der Meßgenauigkeit praktisch möglichst weit auszunutzen. Andererseits konnte eine Reihe von neuen Untersuchungen durchgeführt werden, deren Resultate in einer kurzen Übersicht am Schluß der Arbeit zusammengestellt sind.

1) A. Hadding, Centralbl. f. Min. S. 631. 1921.
2) H Seemann, Ann. d. Phys. 59. S. 459.
3) H. Bohlin, Ann. d. Phys. 61. S. 421.

Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung wird schematisch durch Fig. 1 wiedergegeben.

In der Fig. 1 bedeutet *R* die Glühkathodenröntgenröhre, deren Strahlen bei *F* austreten. *B* ist eine isoliert aufgestellte Akkumulatorenbatterie von 12 Volt, die den Heizstrom für den

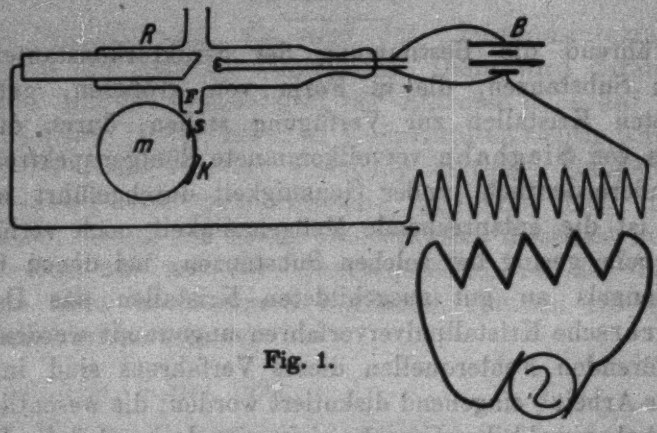


Fig. 1.

Glühdraht liefert, *T* ist ein Transformator, dessen Sekundärspannung — ohne Gleichrichter — an die Röntgenröhre gelegt wird. *M* ist die zylindrische Metallkamera mit dem Spalt bei *S* und der Substanz bei *K*.

Röntgenröhre. Als Röntgenröhre wurde die Glühkathodenröhre deswegen gewählt, weil sie zweifellos am besten zur Erzeugung großer Strahlungsintensität geeignet ist, da der Glühdraht bei Steigerung der Temperatur beliebig viel Elektronen zur Erzeugung der Röntgenstrahlen liefert. Auf den Bau einer geeigneten Röhre, die sehr große Strahlungsintensität liefern und dabei doch mit wenig Hilfsmitteln und billig herzustellen sein sollte, wurde viel Mühe verwendet.

In der Fig. 2 ist die Röhre von oben gesehen. Der zylindrische Körper der Röhre (Durchmesser 3,5 cm, Länge 12 cm) bestand aus Jenaer Geräteglas. Er besaß an den Enden zwei Ansatzrohre (7,5 bzw. 6 cm lang) mit Schliffen für Glühkathode und Antikathode und in der Mitte ein kleineres Ansatzrohr mit einem kreisrunden Loch zum Austritt der Röntgenstrahlen. Das diesem Ansatzrohr gegenüberliegende

Rohr *R* war in einigem Abstand von der Röhre nach oben gebogen und führte zur Pumpe.

Glühkathode. Bei Vorversuchen stellte sich heraus, daß ein in Form einer Spirale gewickelter Glühdraht bei Wechselspannungsbetrieb *ohne Gleichrichter* und bei starker Heizung des Glühdrahts von der nicht ausgenutzten Spannungsphase, die offenbar mit ihrer ganzen Feldstärke auf die Spirale wirkt, so stark deformiert wurde, daß ein längeres, gleichmäßiges

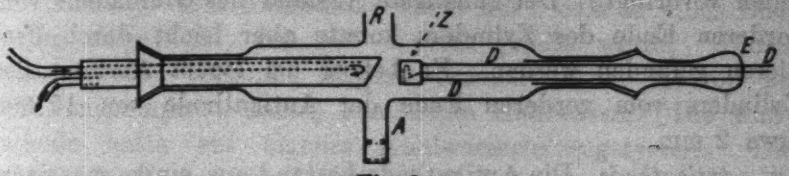


Fig. 2.

Arbeiten der Röhre unmöglich wurde. Der Glühdraht erhielt deshalb schließlich nur die Form eines U und wurde in seinem mittleren Teile noch durch einen besonderen, durch ein Quarzröhrchen isolierten Molybdändraht festgehalten (in der Zeichnung nicht angegeben, um die Übersicht nicht zu erschweren). Der Glühfaden bestand aus 0,2 mm starkem Wolframdraht und war zur Zentrierung des Elektronenstroms von einem Molybdänblech umgeben, das zu einem Zylinder von etwa 10 mm Durchmesser gebogen war (*Z*). Der Zylinder wurde mit dünnem Molybdändraht an den 1 mm starken Molybdändrähten *D* festgebunden — zum Teil unter Isolation durch ein Quarzröhrchen —, die gleichzeitig zur Zuführung des Heizstromes für den Glühdraht dienten. Diese stromzuführenden Drähte waren bei *E*, also an dem der Glühspirale entgegengesetzten Ende der Kathode in das Glas eingeschmolzen. Auf diese Weise wurde erreicht, daß eine besondere Kühlung für die Kathode überflüssig wurde.

Die ausschließliche Verwendung von Molybdän als Kathodenmetall erwies sich als vorteilhaft einmal wegen der Billigkeit und der bequemen Einschmelzung in Molybdänglas, und außerdem wegen seiner Eigenschaft, als Kathodenmetall nur außerordentlich wenig zu zerstäuben.

Der Heizstrom für den Glühdraht, der von einer isoliert aufgestellten Akkumulatorenbatterie von 12 Volt geliefert wurde, betrug 4—6 Ampere.

Zur Erzielung eines guten Brennfleckes war die Orientierung des Glühfadens in einem bestimmten Abstand von dem vorderen Ende des Molybdänzylinders notwendig. (Sitzt nämlich der Glühfaden zu tief, dann kommt es vor, daß trotz stärkster Heizung überhaupt kein Strom durch die Röhre geht, weil das positive Feld der Antikathode nicht bis zum Glühfaden vordringt.) Der günstigste Abstand des Glühfadens vom vorderen Ende des Zylinders konnte aber leicht durch Probieren gefunden werden. Er betrug bei einem Abstand des Zylinders vom vorderen Ende der Antikathode von 15 mm etwa 2 mm.

Antikathode. Die Antikathode bestand aus einem massiven, zylindrischen Kupfer- bzw. Eisenstab von 16 cm Länge und 1,6 cm Durchmesser, der am vorderen Ende abgeschrägt war und von außen eine Einbohrung von 1,2 cm Durchmesser hatte, durch die bis nahe (etwa 2 mm) zu seinem vorderen Ende ständig Kühlwasser floß. Auf den Stab war mittels Siegellack ein zum Gasschliff passender Messingkonus *K* aufgekittet, und zwar so, daß er nur wenig über das Ende des Glasschliffs hinausragte. Die Fuge zwischen äußerem Rande des Konus und dem Glasrand des Schliffs wurde dann mit Siegellack verstrichen. In derselben Weise wurde der Schliff der Kathode mit Siegellack abgedichtet.

Fenster zum Austritt der Strahlen. Das kreisrunde Loch im Ansatzrohr *A* hatte einen Durchmesser von 5 mm; auf das Rohr war zunächst ein Messingstück, etwa $^1/_2$ cm lang, mit dem Loch entsprechender Durchbohrung, und auf dieses eine Aluminiumfolie von 0,05 mm Dicke, möglichst gut aufliegend, aufgekittet. Das Einschalten des Messingstückes erwies sich deshalb als notwendig, weil beim unmittelbaren Aufkitten der Folie auf das Glas eine plötzliche, stoßweise Erwärmung des Fensters, wie sie beim Entgasen nicht zu vermeiden ist, wegen der geringen Wärmekapazität der Folie leicht ein teilweises Verdampfen des Siegellacks verursachte. Dieser Dampf bildete sofort auf der Antikathode einen dünnen Niederschlag von Kohlenstoff und wurde dadurch die Ursache einer Schwächung

der Eigenstrahlung des Antikathodenmetalles und einer Verstärkung des störenden Bremsspektrums. Aus demselben Grunde mußte natürlich auch sorgfältig darauf geachtet werden, daß nirgends der Siegellack direkt von Kathodenstrahlen getroffen werden konnte.

Zur Anbringung des Fensters soll noch bemerkt werden, daß die Folie auch ohne Siegellack dadurch abgedichtet werden konnte, daß sie mittels Gewindes auf einen Gummiring gepreßt wurde.

Kühlung. Der Röhrenkörper war mit Picein in einen Bleikasten eingebettet, der mit Wasser gefüllt wurde. Dieses Wasser wurde beständig langsam erneuert durch das von der Diffusionspumpe (s. unten) kommende Kühlwasser. Die Antikathode hatte ein eigenes Kühlwasserleitungssystem. Die Schliffe für Kathode und Antikathode befanden sich außerhalb des Bleikastens.

Auseinandernehmen. Dadurch wurde es möglich, die Betriebsunterbrechung beim Auseinandernehmen der Röhre, z. B. zum Einziehen eines neuen Glühfadens oder zum Säubern des Antikathodenspiegels, einschließlich des Auspumpens auf eine verhältnismäßig kurze Zeit (etwa 20—30 Minuten) herabzumindern. Die Schliffe wurden zum Auseinandernehmen der Röhre elektrisch mit einem umgewickelten Eisendraht bis zum Weichwerden des Siegellacks erwärmt und ebenso einfach wieder zusammengesetzt.

Spannungsquelle. Als Spannungsquelle zum Betrieb der Röntgenröhre diente ein kleiner Transformator für 500 Perioden von 2 Kilowatt Leistung und einem Übersetzungsverhältnis von 220:18000. Den Wechselstrom für die Primärspule des Transformators lieferte eine kleine Maschine für 1,25 Kilowatt, wie sie früher zur Erzeugung tönender Funken benutzt wurde. Da aber zum Antrieb der Maschine bei starker Belastung zeitweilig kein geeigneter Motor verfügbar war, wurde schließlich der Wechselstrom von einer größeren Maschine (2 Kilowatt) des Techn. Physik. Instituts geliefert, während die Tonfunkenmaschine, mittels Treibriemen durch einen Motor getrieben, nur noch zum Entgasen der Röhre verwendet wurde, wobei nur eine geringere Belastung nötig war.

Die Sekundärspannung betrug für die Aufnahmen mit Kupferantikathode etwa 18000—22000 Volt, für die Aufnahmen mit Eisenantikathode 12000—15000 Volt. Die Stromstärke betrug gewöhnlich 30—40 Milliampere, konnte aber bis über 60 Milliampere gesteigert werden. Sie hielt sich bei stundenlangem Betrieb auf 1—2 Milliampere konstant, ohne daß ein Eingriff in die Apparatur nötig war.

Pumpen. Zum Auspumpen der Röntgenröhre diente ein Aggregat von Gaedepumpen: rotierende Ölpumpe, rotierende Quecksilberpumpe und Diffusionspumpe. Zwischen Diffusionspumpe und Röntgenröhre war ein Quecksilberverschluß eingeschaltet (U-Rohr mit Barometerröhre), ferner ein Kühlgefäß, das mit einer Mischung aus Äther und fester Kohlensäure umgeben wurde. Die Röhre blieb während des Betriebes gewöhnlich mit den Pumpen verbunden; sie konnte aber auch, von den Pumpen abgeschlossen, längere Zeit in Betrieb bleiben. Die Pumpen wirkten so, daß z. B nach dem Einziehen eines neuen Glühfadens die Röhre nach 3 Minuten dauerndem Pumpen wieder betriebsfähig war.

Entwicklung und Verbesserung der Methodik; praktische Durchführung bei einer Neubestimmung der Gitterkonstanten des Aluminiums.

Grundzüge der fokussierenden Methode. Zu den Aufnahmen selbst wurde, wie schon in der Einleitung bemerkt, nicht die übliche Stäbchenmethode, die Debye und Scherrer mit ihren ersten Aufnahmen einführten, sondern eine von Seemann und Bohlin angegebene fokussierende Methode verwendet. Die Grundzüge der Methode sollen kurz angegeben werden.

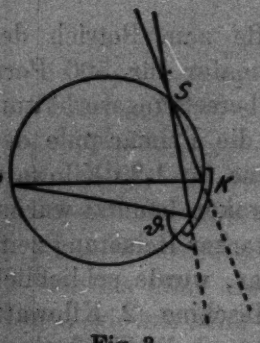


Fig. 3.

Wie aus Fig. 3 ersichtlich ist, besteht die Fokussierung darin, daß die durch den Spalt S tretenden divergenten Strahlen — der Spalt liegt im Mantel der zylindrischen Kamera, deren Grundriß die Zeichnung gibt — von allen Punkten der zu untersuchenden Substanz K aus zu demselben Punkt B des Films hin reflektiert werden. Eine einfache

geometrische Überlegung zeigt ferner, daß der in der Braggschen Reflexionsbedingung $n \cdot \lambda = 2l \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}$ auftretende Winkel ϑ gegeben ist durch $\vartheta = \frac{90}{R \cdot \pi} \cdot l$, wenn R der Radius der Kamera und l die Länge des Bogenstückes $\overset{\frown}{SKB}$ ist. Die im Zylindermantel liegende Kante des Spaltes S bildet sich demnach auf dem Film als scharfe Linie ab. Wie Bohlin geometrisch zeigte, bewirkt dabei die Reflexion an den tiefer liegenden Schichten der Substanz keine Störung, weil sie nur die Linien nach der unscharfen Seite hin verbreitert. Diese Verbreiterung der unscharfen Seite der Linien konnte ich an einigen meiner Aufnahmen feststellen; sie blieb aber bei den untersuchten Stoffen sehr gering.

Bohlin wies ferner darauf hin, daß die Genauigkeit der Auswertung größer ist wie bei der Stäbchenmethode, einmal, weil keine Korrektionen wegen der Eindringungstiefe usw. nötig sind und zweitens, weil stets nur die Abstände der Linien*kanten* gemessen werden. Die Linienkante ist dabei, wie Bohlin zeigte, Enveloppe einer Kurvenschar, die durch den Schnitt der von verschiedener Höhe des Kristallspiegels ausgehenden Reflexionskegel mit dem Zylindermantel der Kamera entstehen. Auf der anderen Seite der Linien erzeugen dieselben Reflexionskegel eine besenartige Verbreiterung der Linie, wie sie z. B. auf der Aufnahme Nr. 4 zu sehen ist. Diese Verbreiterung wandert nun bei Ablenkungswinkeln über 90 Grad nach der anderen Seite der Linie, kann also die Meßgenauigkeit beeinflussen.

Erhöhung der Meßgenauigkeit. Ich habe deshalb bei solchen Aufnahmen, die zu möglichst genauer Ausmessung dienen sollten, die Höhe des Spaltes und damit die Höhe des belichteten Teiles der Substanz so reduziert, daß keine besenartige Verbreiterung der Linien eintrat. Dadurch erhielten die Linien, die großen Ablenkungswinkeln entsprechen, die von der Stäbchenmethode her bekannte, gekrümmte Form.

Die Ausmessung geschah in der Weise, daß eine Glasscheibe mit Millimeterteilung bzw. $^1/_2$-Millimeterteilung auf den Film gelegt wurde. Die Abstände wurden dabei auf $^1/_{10}$ mm genau festgestellt.

Trotzdem im allgemeinen die Lage der Linienkante von der Breite des Spaltes unabhängig ist, erwies es sich doch als vorteilhaft, mit möglichst engem Spalt (etwa 0,1 mm) zu arbeiten und zwar aus folgendem Grunde: Das K_α-Dublet ist bei Ablenkungswinkeln, die größer sind als 90^0, merklich getrennt. Da nun aber die langwellige Komponente (die dem größeren Ablenkungswinkel entspricht) weniger intensiv ist, so kommt sie häufig gar nicht zum Vorschein, während die härtere Komponente, die dann eine verhältnismäßig schmale Linie bildet, gut sichtbar ist und daher ausgemessen wird. Diese Erscheinung trat besonders leicht dann auf, wenn bei mäßig engem Spalt die eine Komponente zu einem kleinen Teil von der anderen überdeckt und dadurch noch verstärkt wurde. Die Ablenkungswinkel wurden dadurch zu klein gemessen und lieferten zu große Werte der Gitterkonstanten.

Auswertungsverfahren. Um die nötigen Ausmessungen auf den Film selbst zu beschränken und damit unabhängig von der Orientierung des Films in der Kamera zu machen, wurden zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Das erste Verfahren ging von dem geometrisch bekannten Größenverhältnis der verschiedenen Netzebenenabstände aus. Die Indizes der Netzebenen, die die einzelnen Linien erzeugt haben, wurden durch grobe, lediglich orientierende Messungen festgestellt. Es wurden zwei gut zu messende Linien ausgewählt, die nicht zu nahe beieinander liegen. Ist dann das Verhältnis der Abstände der Netzebenen, die die beiden Linien erzeugt haben, gleich d_1/d_2, ferner die Länge des Kreisbogens vom Spalt bis zur gemessenen Linienkante gleich L_1 bzw. L_2, so gilt, da ja

$$\lambda = 2d \cdot \sin \frac{90}{2R\pi}$$

die Proportion $$d_1 : d_2 = \sin\left(\frac{90}{2R\pi} \cdot L_2\right) : \sin\left(\frac{90}{2R\pi} \cdot L_1\right)$$

oder, wenn wir $L_2 = L_1 + a$ und $\frac{90}{2R\pi} = C$

setzen: $$d_1 : d_2 = \sin C(L_1 + a) : \sin C \cdot L_1$$
$$= \cos C \cdot a + \cot (C \cdot L_1) \cdot \sin C \cdot a$$

oder

$$\cot (C \cdot L_1) = \frac{\frac{d_1}{d_2} - \cos (C\,a)}{\sin (C \cdot a)} .$$

Dabei ergibt sich d_1/d_2 rechnerisch aus den bekannten Indizes der reflektierenden Netzebenen, C ist durch den Radius der Kamera bestimmt und a ist der auf dem Film gemessene Abstand der Linienkanten. Die Gleichung liefert also den Glanzwinkel $C \cdot L_1$ einer Linie und daraus den wirklichen Abstand der reflektierenden Netzebenen. (Als Wellenlänge wurde der von Siegbahn[1]) an Steinsalz für die langwellige Komponente des K_α-Dublets des Kupfers bestimmte Wert 1,541 Å.-E. angenommen.) Bei der weiteren Ausmessung wurden dann die übrigen Linien auf die erste derart bezogen, daß der auf dem Film gemessene Abstand a_n zu L_1 addiert wurde und so den neuen Glanzwinkel $C \cdot L_n$ lieferte.

Als Beispiel soll die Auswertung der in Taf. I, Nr. 1 wiedergegebenen Aufnahme an Aluminiumfolie von 0,05 mm Dicke besprochen werden. Die Belichtungszeit betrug drei Stunden. Die Ausmessung geschah wie oben angegeben. Um subjektive Meßfehler möglichst auszuschalten, wurden die Abstände von acht verschiedenen Beobachtern gemessen. Die folgende Tabelle gibt die Meßresultate:

Verglichene Linien	Beobachter I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
022_{Cu} – 113	14,6	14,55	—	14,6	—	14,5	14,6	14,6	Abstände in mm
022_{Cu} – 022*)	22,3	22,3	22,4	22,4	22,3	22,3	22,5	22,4	
022_{Fe} – 133	30,3	30,3	30,3	30,3	30,4	30,2	30,3	30,25	
133 – 224	28,8	28,75	28,9	28,9	28,7	28,8	28,8	28,8	

Aus den gemessenen Abständen wurden folgende Werte für d berechnet (in Å.-E.):

Berechnet aus:	Beobachter I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
022_{Cu}	4,038	4,039	4,035	4,035	4,039	4,039	4,035	4,037
113	4,042	4,043	—	4,038	—	4,045	4,038	4,038
022_{Fe}	4,039	4,040	4,042	4,042	4,042	4,039	4,030	4,033
133	4,039	4,039	4,036	4,036	4,037	4,037	4,031	4,037
224	4,038	4,038	4,035	4,035	4,039	4,040	4,035	4,038
Mittel:	4,039	4,040	4,037	4,037	4,039	4,040	4,034	4,037

*) Durch Fe-Strahlung erzeugt. Auf dem Aluminiumfenster hatte sich während der vorhergehenden Aufnahmen mit Eisen als Antikathode ein dünner Niederschlag von Eisen gebildet.

1) M. Siegbahn, Ann. d. Phys. 59. 1919. S. 56.

Als Mittelwert ergibt sich für die Gitterkonstante des Aluminiums $d = 4{,}038$ Å.-E.

Das zweite Verfahren beruht auf einem unmittelbaren Vergleich des zu untersuchenden Gitterspektrums mit dem Normalspektrum des Chlornatriums. Die Aluminiumfolie wurde in reine Chlornatriumlösung getaucht und schnell getrocknet. Dabei schieden sich auf der Folie sehr kleine Kristalle aus (mikroskopisch ließ sich feststellen, daß sie nicht größer als 0,05 mm waren). Diese Kristallchen lieferten nun bei der Belichtung Reflexionspünktchen, wie sie neuerdings von Gerlach[1]) zur Bestimmung der Wellenlängendifferenz des K_α-Dubletts benutzt wurden, und ermöglichten es, den für Aluminium gefundenen Wert der Gitterkonstanten durch Ausmessung auf *demselben* Film mit dem Normalwert der Gitterkonstanten des Chlornatriums ($d = 2{,}814$ Å.-E.) zu vergleichen.

Auf einer in dieser Weise mit Cu-Antikathode gewonnenen Aufnahme sind neben den vom Aluminium herrührenden Linien die NaCl-Reflexionen der 024-Ebenen und der 001-Ebenen dritter Ordnung in Form von Reflexionspünktchen sichtbar. Die Abstände der Linien des Aluminiums von diesen Reflexionspünktchen wurden auf dem Film gemessen und lieferten die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte:

Indizes:	022	133	224
d_{Al}	4,037	4,042	4,041

Als Mittelwert ergibt sich für die Gitterkonstante $d = 4{,}040$ Å.-E.

Eine andere Aufnahme wurde mit Fe-Antikathode gewonnen. Auf ihr kann die 022-Reflexion des NaCl mit der 002-Reflexion des Aluminiums verglichen werden. Der gemessene Abstand ist $1{,}00 \pm 0{,}05$ mm. Für die Wellenlänge der K_α-Strahlung des Eisens wurde $\lambda = 1{,}936$ Å.-E.[2]) angenommen. Daraus ergab sich für die Gitterkonstante des Aluminiums $d = 4{,}040 \pm 0{,}005$ Å.-E.

Das Mittel aus den drei unter sich sehr gut übereinstimmenden Resultaten ist $d = 4{,}039$ Å.-E.

1) W. Gerlach, Phys. Zeitschr. Heft 5. S. 114. 1922.
2) M. Siegbahn, a. a. O.

Die Abweichung von dem durch Scherrer[1]) gefundenen Wert 4,07 Å.-E. ist größtenteils auf Rechnung des von Scherrer benutzten ungenauen Wertes der Wellenlänge der *K*-Strahlung ($\lambda = 1{,}549$) zu setzen; mit dem von Siegbahn 1919 gefundenen Mittelwert $\lambda = 1{,}539$ Å.-E. der Komponenten des K_α-Dublets ergibt sich aus den Scherrerschen Messungen $d = 4{,}043$ Å.-E.

Bei den späteren Aufnahmen wurde zur Erleichterung der Ausmessung folgendes Hilfsmittel angewandt: In die Wand der Kamera wurden — ungefähr da, wo die Mitte des Films lag — zwei feine Löcher gebohrt. Durch diese Löcher wurde der Film nach jeder Röntgenstrahlenexposition vor dem Herausnehmen aus der Kassette mit einer elektrischen Lampe kurz belichtet. Dadurch erhielt jeder Film zwei kreisrunde Marken, die sich als „Fixpunkte" bei der Ausmessung sehr gut verwenden ließen, nachdem sie durch Aufnahmen mit NaCl gewissermaßen geeicht waren. Auf diese Weise war es auch möglich, Fehler zu erkennen und auszuschalten, die ihre Ursache in dem nicht völligen Anliegen des Films an der Kassettenwand hatten. (Ein ähnliches Verfahren dürfte auch bei der Stäbchenmethode zur Erhöhung der Meßgenauigkeit beitragen.)

Die Aufnahmen an Aluminiumfolie wurden auch, da die Komponenten des K_α-Dublets bei den 224-, 133- und zum Teil auch 113-Reflexionen gut getrennt waren, zu einer Bestimmung der Wellenlängendifferenz des Dubletts verwendet. Aus sechs Messungen ergab sich als Mittelwert für $\lambda_1 - \lambda_2 = 0{,}00392$ Å.-E.

Verkürzung der Expositionszeit. Wenn andrerseits nicht auf erhöhte Meßgenauigkeit Wert gelegt wird, wenn also mit etwas breiterem Spalt gearbeitet werden kann (etwa 0,5 mm), läßt die fokussierende Methode eine erhebliche Verkürzung der Expositionszeit zu. Der Grund dafür liegt offenbar in der guten Ausnutzung der Röntgenstrahlenquelle, insofern als auch divergente Strahlen zur Erzeugung der scharfen Kante der Linie beitragen, während sie bei der Stäbchenmethode nur eine störende Verbreiterung der Linie hervorrufen würden. Diese Tatsache macht auch die Einschaltung von Blenden

1) P. Scherrer, Phys. Zeitschr. XIX. S. 23. 1918.

zwischen Antikathode und Kamera bei der fokussierenden Methode überflüssig. Als Beispiel einer sehr kurz exponierten Aufnahme soll die Aufnahme Nr. 4 dienen. Die belichtete Substanz ist wieder Aluminiumfolie von 0,05 mm Dicke. Die Belichtungszeit betrug 5 Minuten bei 40 Milliampere und etwa 22000 Volt. Auf dem Originalfilm sind die Reflexionen an den Ebenen 111, 002, 022, 113, 133, 024 und 224 so zu erkennen, daß sie zur Orientierung ausgemessen werden können.

Antikathodenmaterial. Schließlich soll noch eine Bemerkung über die Wahl des Antikathodenmaterials gemacht werden. Kupfer ist vor allem wegen der guten Wärmeleitfähigkeit und der daraus sich ergebenden Haltbarkeit des Antikathodenspiegels ein vorteilhaftes Antikathodenmaterial. Es eignet sich aber nicht zur Untersuchung solcher Substanzen, deren *K*-Serienabsorptionsgrenze bei benachbarten größeren Wellenlängen liegt als die Kupfer-*K*-Strahlung selbst, wie Eisen, Mangan, Chrom usw. oder ihrer Salze. Die Atome dieser Elemente werden nämlich durch die intensive Eigenstrahlung des Kupfers, die ja die Reflexionslinien erzeugen soll, zu ihrer eigenen *K*-Strahlung angeregt. Diese *K*-Strahlung der Substanz breitet sich nun praktisch völlig gleichmäßig nach allen Richtungen aus und man erhält trotz langer Expositionszeiten nur eine allgemeine Schwärzung des Films, die die Linien völlig überdeckt.

Untersuchungsergebnisse.

Elektrolytische Niederschläge. Metalle sind bereits in mannigfachen Formen untersucht worden: meist in Pulverform nach der Stäbchenmethode[1]), weiter in Form gut ausgebildeter Kristalle nach der Braggschen Ionisationsmethode[1]), ferner in Form von Metallschichten, die durch kathodische Zerstäubung im Vakuum gewonnen waren.[2])

Die Untersuchung elektrolytischer Niederschläge zeigte, wie zu erwarten war, daß auch in dieser Form die Strukturuntersuchung der Metalle möglich ist.

1) P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 19. S. 23. 1918; W. H. Bragg, Phil. Mag. 28. S. 355. 1914; L. Vegard, Phil. Mag. 31. S. 83. 1916; 32. S. 65. 1916; P. Debye, Phys. Zeitschr. 18. S. 483. 1917; A. Hull, Phys. Rev. 10. S. 661; Phys. Rev. 17. (5.) S. 571. 1921.

2) H. Kahler, Phys. Rev. 17. S. 280. 1921.

Zur Erzeugung der Niederschläge wurden die in der Galvanostegie üblichen Bäder verwendet.

Untersucht wurden Niederschläge von Kupfer, Blei und Eisen, die beiden ersten Metalle in verschiedener Schichtdicke. Die Schichtdicke wurde aus der Stromstärke bei der Erzeugung des Niederschlags berechnet und durch Wiegen kontrolliert; es ergaben sich Abweichungen von der Berechnung, die auch bei den geringsten Dicken nicht über 20 Proz. hinausgingen.

Die untersuchten Niederschläge gaben scharfe Interferenzlinien auch in den Fällen, wo die erzeugende Stromdichte sehr niedrig (etwa 0,2 Milliampere/cm^2) gehalten wurde.

Platinmohr ergibt keine Interferenzlinien. Eine Ausnahme machte Platinmohr. Es wurde in einer Schichtdicke von etwa 0,005 mm auf ein Kupferblech niedergeschlagen. Nach längerer Belichtungszeit zeigten sich auf dem Film nur die Gitterlinien des darunterliegenden Kupfers und außerdem eine allgemeine Schwärzung des Films, die offenbar durch unregelmäßige Zerstreuung am Platinmohr hervorgerufen war. Da die Gitterkonstante des Platinmohrs bei kristallinem Zustand seiner Dichte nach (17,7—22,9) in das Gebiet der die benutzten Röntgenstrahlen beugenden Dimensionen hineinfallen müßte, ist anzunehmen, daß Platinmohr *nicht* kristallinisch ist.

Maximum und Minimum der reflektierenden Schichtdicke. Die Niederschläge wurden im allgemeinen in solcher Schichtdicke gehalten, daß sowohl das „Gitterspektrum" des Niederschlags als auch das des darunterliegenden Metalls auf dem Film sichtbar wurde. Dadurch wurde es zunächst möglich, die Linien des einen Metalls bei der Ausmessung auf die des anderen zu beziehen. Ferner sollte eine Reihe von Aufnahmen ursprünglich dazu dienen, die an verschiedenen Substanzen unter sonst gleichen Bedingungen reflektierte Intensität photometrisch zu vergleichen. Dies ist noch nicht durchgeführt worden. Um aber schon allgemein den Einfluß des Absorptionskoeffizienten auf die Dicke der reflektierenden Schicht zu zeigen, sind trotzdem zwei von den Aufnahmen wiedergegeben (Nr. 3 und 4). Die erste gibt das Bild einer elektrolytischen Bleischicht von 0,0008 mm Dicke, die auf Kupfer niedergeschlagen ist, die zweite das einer elektrolytischen Kupferschicht von 0,0042 mm, die auf Blei niedergeschlagen ist.

Trotz der weniger als ein Fünftel der Kupferschicht betragenden Dicke der Bleischicht ist doch das Verhältnis der Intensität entsprechender Linien in der ersteren Aufnahme noch stark zugunsten des Bleis verschoben.[1]) Man könnte daran denken, durch photometrischen Vergleich der Intensität der Linien die Schichtdicke zu bestimmen; damit dies aber möglich wäre, müßte erst ein Faktor, den man wohl spezifisches Reflexionsvermögen nennen kann, und der offenbar stark von der Ordnungszahl des betreffenden Elements abhängt, näher definiert sein. Schließlich konnte versucht werden, das Maximum der an der Reflexion teilnehmenden Schichtdicke zu bestimmen, bzw. das Minimum der zur Erzeugung merklicher Reflexionsintensität notwendigen Schichtdicke. Bezüglich des Maximums ergab sich folgendes: Auf einer Aufnahme von elektrolytischem Kupfer, das in einer 0,01 mm dicken Schicht auf Zink niedergeschlagen war, waren neben den kräftigen Linien des Kupfers einige Linien, die vom Zink herrührten, gerade noch schwach zu sehen. Da die reflektierende Schicht etwa um 12° gegen den einfallenden Strahl geneigt war, ergab sich, daß die am Zink reflektierten Strahlen einen Weg von etwa 0,06 mm im Kupfer zurücklegen mußten. Andrerseits müssen die Strahlen, die an den untersten Kupferschichten reflektiert wurden, also denselben Weg im Kupfer zurücklegten, gerade noch bei der Erzeugung der Reflexionslinien des Kupfers mitgewirkt haben. Berechnet man nach der von Glocker angegebenen Formel[2]) den Absorptionskoeffizienten des Kupfers für die benutzte Wellenlänge, so ergibt sich, daß Strahlung von dieser Wellenlänge, die durch eine Schicht von 0,06 mm Kupfer hindurchgegangen ist, etwa auf $^1/_{10}$ ihrer ursprünglichen Intensität geschwächt ist. Dieses Resultat bestätigt durchaus die oben angestellten Überlegungen, denn

1) Die Verbreiterung der Linien, die vom Kupfer herrühren, in der zweiten Aufnahme, kann wegen der geringen Schichtdicke des Kupfers hier nicht auf Rechnung der Eindringungstiefe der Strahlen geschrieben werden; sie ist offenbar eine Folge davon, daß sich die ersten bei der Elektrolyse auftreffenden Kupferatome mit einem geringen Teil von Bleiatomen legierten und daß dadurch die Dimensionen des Kupferraumgitters um einen geringen Betrag vergrößert wurden.

2) Vgl. A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien, S. 209.

Linien, die weniger als $^1/_{10}$ der Intensität der stärksten Linien besitzen, sind eben bei der gewöhnlichen Belichtungsstärke der Reflexionsaufnahmen kaum noch zu sehen. Immerhin läßt sich dieses Verhältnis bei starker Belichtung und günstigsten Bedingungen (in bezug auf allgemeine Streuung und Empfindlichkeit des Films) sicher noch verringern.

Andrerseits erhielt ich schon an Schichten von weniger als 0,1 μ Dicke Interferenzlinien. Die Aufnahme Nr. 5 gibt das Bild von Aluminiumfolie mit einer 0,06 μ dicken Kupferschicht. Eine vom Kupferniederschlag herrührende Linie ist an der Aufnahme kenntlich gemacht. Bei geringer Höhe und Breite des Spalts war bei dieser Aufnahme die belichtete Fläche nur etwa 5 mm groß. Das bestrahlte Kupfer wog also nur etwa 0,002 mg. Daraus geht hervor, daß zur Strukturbestimmung unter Umständen schon Bruchteile eines Milligramm ausreichend sind.

Erkennung von Faserstruktur. Gewalzte Folien zeigen eine komplizierte Faserstruktur[1]), d. h. die Kristallite haben nicht nur eine bevorzugte Orientierung irgendeiner oder mehrerer kristallographischen Richtungen in der Walzrichtung, sondern außerdem noch bevorzugte Orientierung gewisser Ebenen in bezug auf die Walzfläche. Wie Polanyi gezeigt hat[2]), gibt sich Faserstruktur des untersuchten Materials dadurch zu erkennen, daß die Reflexionskegel um den einfallenden Strahl als Achse nicht mehr gleichmäßige Intensitätsverteilung aufweisen, wie bei völliger Unordnung der Kristallite, sondern sich, wenigstens beim „idealen" Faserdiagramm, in einzelne Strahlenbüschel auflösen, die beim Durchstoßen des photographischen Films einen Interferenzpunkt erzeugen würden. Da nun die Orientierung der Kristallite parallel zur Faserrichtung niemals vollständig ist, werden die Interferenzpunkte auf den Aufnahmen zu Kreisbogenstücken verzerrt, und das Charakteristische des „realen" Faserdiagramms ist demnach, daß z. B. die Schnittkreise der Reflexionskegel mit einer ebenen Platte senkrecht zum einfallenden Strahl an gewissen

1) K. Weissenberg, E. T. Z. v. 10. Nov. 1921. S. 1295.
2) M. Polanyi, Zeitschr. f. Phys. 7. Heft 3. S. 149. 1921.

symmetrisch liegenden Stellen ein starkes Anschwellen der Intensität aufweisen.

Diese Stellen vermehrter Intensität liegen nun für zwei verschiedene Netzebenengruppen, die auf der Platte zwei konzentrische Kreise erzeugen würden, im allgemeinen nicht auf einem gemeinsamen Radius der beiden Kreise, sondern auf Radien, die miteinander einen gewissen Winkel bilden. Diese Tatsache gibt uns aber die Möglichkeit, mit Hilfe der fokussierenden Methode, die ja nur einen kleinen Ausschnitt der Schnittkurven der Reflexionskegel mit dem Zylindermantel der Kamera liefert, das Vorhandensein der Faserstruktur einwandfrei festzustellen — und zwar daraus, daß sich starke Intensitätsabweichungen von dem Röntgenogramm eines Stoffes mit völliger Unordnung der Kristallite zeigen müssen.

Solche Intensitätsabweichungen zeigen die beiden Aufnahmen Nr. 6 und Nr. 7. Beide Aufnahmen sind mit Eisen-*K*-Strahlung gemacht an 0,05 mm starker Al-Folie, die von W. C. Heraeus bezogen war. Die Belichtungszeit betrug je eine Stunde. Zu Nr. 6 war die Folie so orientiert, daß die Walzrichtung im Zylindermantel der Kamera, also senkrecht zur Zylinderachse lag. Die Reflexionen an den 111- und 002-Ebenen sind vorhanden, während die Reflexion an der 022-Ebene völlig fehlt. Zu Nr. 7 lag die Walzrichtung parallel zur Achse der Kamera. Das Verhältnis der Intensitäten hat sich jetzt umgedreht: die Reflexionen an den 111- und 002-Ebenen sind schwach, während die Reflexion an der 022-Ebene sehr stark ausgeprägt ist. (Auch bei den früher besprochenen Aufnahmen an Al-Folie sind ähnliche Intensitätsabweichungen festzustellen.)

Nach kurzem Erwärmen derselben Folie auf 270° wurde das Reflexionsbild Nr. 8 erhalten. Die Aufnahme wurde mit Eisen-*K*-Strahlung bei einer Stunde Belichtungszeit und derselben Orientierung der Folie wie zu Nr. 6 gewonnen. Die Linien haben sich in einzelne Flecke aufgelöst, d. h. die Kristallite sind gewachsen. Die Bevorzugung einzelner Linien ist aber trotzdem noch stark ausgeprägt, d. h. die Kristallite haben auch nach dem Wachsen noch ihre Faserorientierung beibehalten. Diese Erhaltung der Orientierung der Kristallite war auch an einer anderen Aufnahme zu sehen, welche von

einer über dem Bunsenbrenner erwärmten Folie mit Kupfer-*K*-Strahlung gewonnen wurde.

Untersuchung einiger Legierungen. Bei einer Legierung von Eisen mit Nickel, die 25 Proz. Nickel enthält, bestehen, wie Hopkinson[1]) fand, merkwürdige Verhältnisse in bezug auf die Magnetisierbarkeit. Die Legierung ist magnetisierbar, wenn sie vorher in einer Kältemischung abgekühlt war; ihre Permeabilität ist dann ähnlich der von hartem Nickel. Erhitzt man die Legierung über 580° dann wird sie unmagnetisch und bleibt auch unmagnetisierbar, wenn man sie wieder auf Zimmertemperatur abkühlt (die Permeabilität beträgt in diesem Zustand nur 1,4). Die Tatsache, daß sich die beiden in bezug auf die Magnetisierbarkeit völlig verschiedenen Zustände auch hinsichtlich anderer physikalischen Eigenschaften unterscheiden (der spezifisch elektrische Widerstand ist im magnetischen Zustand 0,00052, im unmagnetischen Zustand 0,00072; der Zerreißmodul beträgt im magnetischen Zustand 135 kg/mm, im unmagnetischen Zustand nur 80 kg/mm) machte es wahrscheinlich, daß die beiden Formen irgendwelche Verschiedenheit der Gitter zeigten. Die beiden Aufnahmen Nr. 9 und 10 sind mit Eisen-*K*-Strahlung an einem massiven Stück Nickelstahl gewonnen worden, das so zugefeilt war, daß es sich dem Zylindermantel der Kamera einfügte. Nr. 9 gibt das Bild des unmagnetischen Zustands. Die Auswertung geschah in ähnlicher Weise, wie es früher an Aluminiumfolie gezeigt wurde; das Gitter ist ein flächenzentriertes. Die Linien sind weniger scharf, weil mit verhältnismäßig breitem Spalt gearbeitet wurde. Das Resultat der Auswertung zeigt folgende Tabelle:

Indizes	Gemessene Abstände	*d*
111	0	3,580
002	10,6	3,384
022	48,7	3,579
113	79,2	3,578
111 (n = 2)	91,9	3,580

1) J. Hopkinson, Proc. Roy. Soc. 47. S. 23, 138. 1889.

Als mittlerer Wert ergibt sich $d = 3{,}580$. Andrerseits läßt sich d berechnen aus der Gleichung

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot L}{N \cdot \rho}}$$

Darin bedeutet L das „mittlere" Atomgewicht der Legierung, das sich aus dem bekannten Prozentgehalt berechnen läßt mittels der Gleichung

$$\frac{75}{55{,}85_{(Fe)}} + \frac{25}{58{,}68_{(Ni)}} = \frac{100}{L}.$$

Es ergibt sich $L = 56{,}56$. Das spezifische Gewicht der Legierung ist im unmagnetischen Zustand gleich 8,15.[1]) Wir erhalten also:

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 56{,}56}{6{,}06 \cdot 10^{23} \cdot 8{,}15}} = 3{,}576.$$

Das Bild des magnetisierbaren Zustands ist im wesentlichen dasselbe geblieben; nur ist rechts von der 111-Linie eine neue Linie hinzugetreten mit der entsprechenden β-Linie und außerdem eine schwache Linie zwischen der 022- und 113-Reflexion. Der Abstand der Linien von der ursprünglichen 111-Linie beträgt 1,4 bzw. 61,3 mm. Einem neuen flächenzentrierten Gitter lassen sich die beiden Linien nicht zuordnen; dagegen ergibt sich, wenn man annimmt, daß sie die 022- bzw. 224-Linien eines raumzentrierten Gitters sind, aus ihnen die Gitterkonstante zu 2,862 bzw. 2,869. Das spezifische Gewicht der Legierung sinkt beim Übergang in den magnetisierbaren Zustand nach Hopkinson auf 7,98. Berechnet man hieraus unter der Annahme, daß die sämtlichen Kristallite in die raumzentrierte Form übergegangen wären, die Gitterkonstante, so erhält man

$$d = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 56{,}56}{N \cdot 7{,}98}} = 2{,}858,$$

während sich aus der Annahme der ursprünglichen Dichte 8,15

$$d = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 56{,}56}{N \cdot 8{,}15}} = 2{,}838$$

ergeben würde. Eine Änderung der Dimensionen des flächenzentrierten Gitters ließ sich beim Übergang in den magnetischen

1) J. Hopkinson, a. a. O.

Zustand nicht feststellen. Dagegen ließ sich auch im unmagnetischen Zustand bei genauem Zusehen stets eine Andeutung des raumzentrierten Gitters erkennen. Die Verschiedenheit der Gitterstruktur der beiden Zustände des Nickelstahls besteht also darin, daß der Anteil der raumzentrierten Kristallite, der im unmagnetischen Zustand sehr gering ist, sich beim Abschrecken beträchtlich vergrößert. Bezüglich des Zusammenhangs der magnetischen Eigenschaften mit der Gitterstruktur läßt sich nur Folgendes schließen: Dieselben Kraftwirkungen des Atoms, die die Ursache für den Ferromagnetismus bilden, müssen auch beim Aufbau des Raumgitters der Atome in irgendeiner Weise mitwirken.

Kupfer-Goldlegierungen. Schließlich wurde eine Reihe von Kupfer-Goldlegierungen untersucht, für deren Herstellung und leihweise Überlassung wir der Gold- und Silber-Scheideanstalt zu besonderem Dank verpflichtet sind. Die Legierungen wurden in Form von dünnen Blechen mit ziemlich geringer Spaltweite untersucht, um möglichst genaue Werte für die Gitterkonstanten zu erhalten. Sämtliche Aufnahmen, von denen drei wiedergegeben sind, zeigen ein einheitliches, flächenzentriertes Gitter an. Das Ergebnis der Auswertung ist in der folgenden Tabelle niedergelegt:

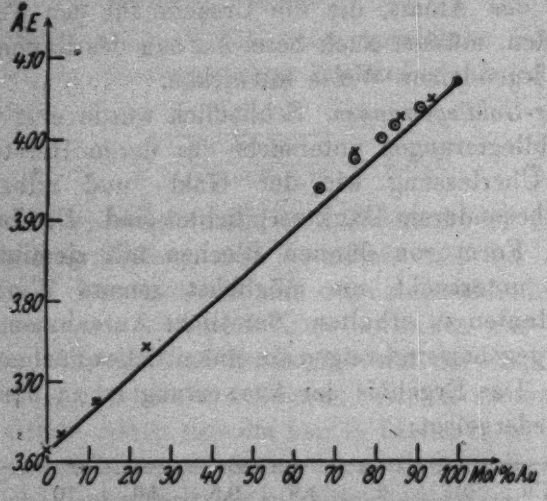
Gew.-Proz. Cu	(0)	2	4,9	9,5	50	70	90	100
$d =$	(4,067)	4,045	4,028	3,984	3,745	3,674	3,634	3,615

Das Additivitätsgesetz der Gitterkonstanten, das Vegard für das Mischkristallsystem KBr-KCl festgestellt hat[1]), ist auch hier annähernd erfüllt. Es treten aber systematische Abweichungen auf, deren Betrag z. T. das Fünffache der Fehlergrenze übersteigt. In der Skizze (vgl. folgende Seite) sind die Ergebnisse graphisch dargestellt.

Auf der Ordinate sind die Gitterkonstanten in Å.-E., auf der Abszisse die Anzahl Molekularprozente Gold in der Legierung aufgetragen. (Letztere Zahl gibt gleichzeitig die Prozentzahl der vorhandenen Goldatome.) Die Gerade verbindet die beiden Werte der Gitterkonstanten für reines Gold und reines Kupfer. Auf ihr müßten nach dem Additivitätsgesetz

1) L. Vegard, Zeitschr. f. Phys. 5. (1) S. 21. 1921.

alle Werte der Gitterkonstanten von Mischkristallen liegen. Die Kreuze sind die aus den Aufnahmen berechneten Werte; die eingekreisten Punkte sind aus Messungen des spezifischen Gewichts von Roberts-Austen (vgl. Tabelle von Landolt-Börnstein) berechnet. Sämtliche Werte zeigen Abweichungen nach der Seite der größeren Gitterkonstanten; diese Abweichungen sind offenbar auf den Einfluß des größeren Volumens des Goldatoms gegenüber dem Kupferatom zurückzuführen.



Gitterkonstanten der Cu-Au-Legierungen in Abhängigkeit vom Molprozentgehalt.

Fig. 4.

Bevor aber weitere Schlüsse gezogen werden können, müßte erst die grundsätzliche Frage geklärt sein, in welcher Weise bei der rein statistischen Verteilung der Gold- und Kupferatome auf die einzelnen Punkte des Raumgitters überhaupt ein einheitliches, scharf definiertes Gitter zustande kommt.

Sobald einmal das Gesetz der Änderung der Gitterkonstanten mit dem Prozentgehalt der Legierung festgestellt ist, kann man rückwärts aus der Bestimmung der Gitterkonstanten auf den Prozentgehalt schließen. Die günstigsten Bedingungen für dieses Verfahren bestehen dabei offenbar dann, wenn beim Legieren erhebliche Änderungen der Gitterkonstanten und re-

lativ geringe Änderungen des spezifischen Gewichts stattfinden, wie z. B. bei dem System Kupfer-Silber.

Bezüglich der Intensitätsverhältnisse der Aufnahmen ist bemerkenswert, daß sie eine von M. v. Laue (Ann. d. Phys. 56. S. 497. 1918) aus der Theorie gezogene Folgerung durchaus bestätigen. v. Laue fand (S. 503 der obigen Arbeit) für ein Raumgitter, in dem verschiedene Atomarten *nach Zufall* über die Gitterpunkte verteilt sind, daß besonders dann, wenn Atome mit sehr verschiedener Elektronenzahl in Frage kommen, die Intensität der Interferenzmaxima auf Kosten einer stärkeren zerstreuten Strahlung geschwächt sein müßte. Der Ausdruck für die Intensität der zerstreuten Strahlung ist cet. par. für den vorliegenden Fall proportional $p_{Cu} \cdot p_{Au}$, d. h. proportional dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten, daß ein Gitterpunkt entweder mit einem Kupfer- oder einem Goldatom besetzt ist. Diese Wahrscheinlichkeiten sind andererseits aber proportional dem Molprozentgehalt des betreffenden Metalls in der Legierung. Für die wiedergegebenen Aufnahmen nimmt die Größe $p_{Cu} \cdot p_{Au}$ folgende Werte an:

Prozentgehalt an Cu	4,9	9,5	90
$p_{Cu} \cdot p_{Au}$	0,12	0,19	0,08

Die relative Intensität der Interferenzlinien zeigt beim Vergleich der Aufnahmen qualitativ in der Tat deutlich den von der Theorie vorhergesagten Verlauf, d. h. die Interferenzmaxima werden schwächer mit dem Wachsen der Größe $p_{Cu} \cdot p_{Au}$.

Die Untersuchungen sollen im hiesigen Institut auf weitere Legierungen ausgedehnt werden.

Zusammenfassung.

1. Es wird eine brauchbare Glühkathoden-Röntgenröhre angegeben für hohe Dauerbelastung bei Wechselspannungsbetrieb (ohne Gleichrichter).

2. Mit Hilfe der von Seemann und Bohlin angegebenen fokussierenden Methode der Kristallpulveruntersuchung wurde einerseits erhebliche Erhöhung der Meßgenauigkeit, andrerseits wesentliche Verkürzung der Expositionszeit gegenüber der üblichen Stäbchenmethode erreicht.

3. Die Gitterkonstante des Aluminiums wurde neu bestimmt. Der neue Wert wurde durch ein einfaches Verfahren am Gitterspektrum des NaCl kontrolliert.

4. Es wurden elektrolytische Niederschläge verschiedener Schichtdicke von Cu, Pb und Fe untersucht. Alle Niederschläge ergaben, auch wenn sie bei sehr geringer Stromdichte erzeugt waren, scharfe Interferenzlinien. Platinmohr zeigte keine Interferenzen.

5. An Aluminiumfolie wurde gezeigt, in welcher Weise sich bei der verwendeten Anordnung Faserstruktur bemerkbar macht.

6. Am 25 prozentigen Nickelstahl wurde die Strukturänderung beim Übergang vom magnetisierbaren in den unmagnetisierbaren Zustand untersucht.

7. An einer Reihe von Gold-Kupferlegierungen wurde durch genaue Messungen die Abhängigkeit der Gitterkonstanten vom Prozentgehalt festgestellt.

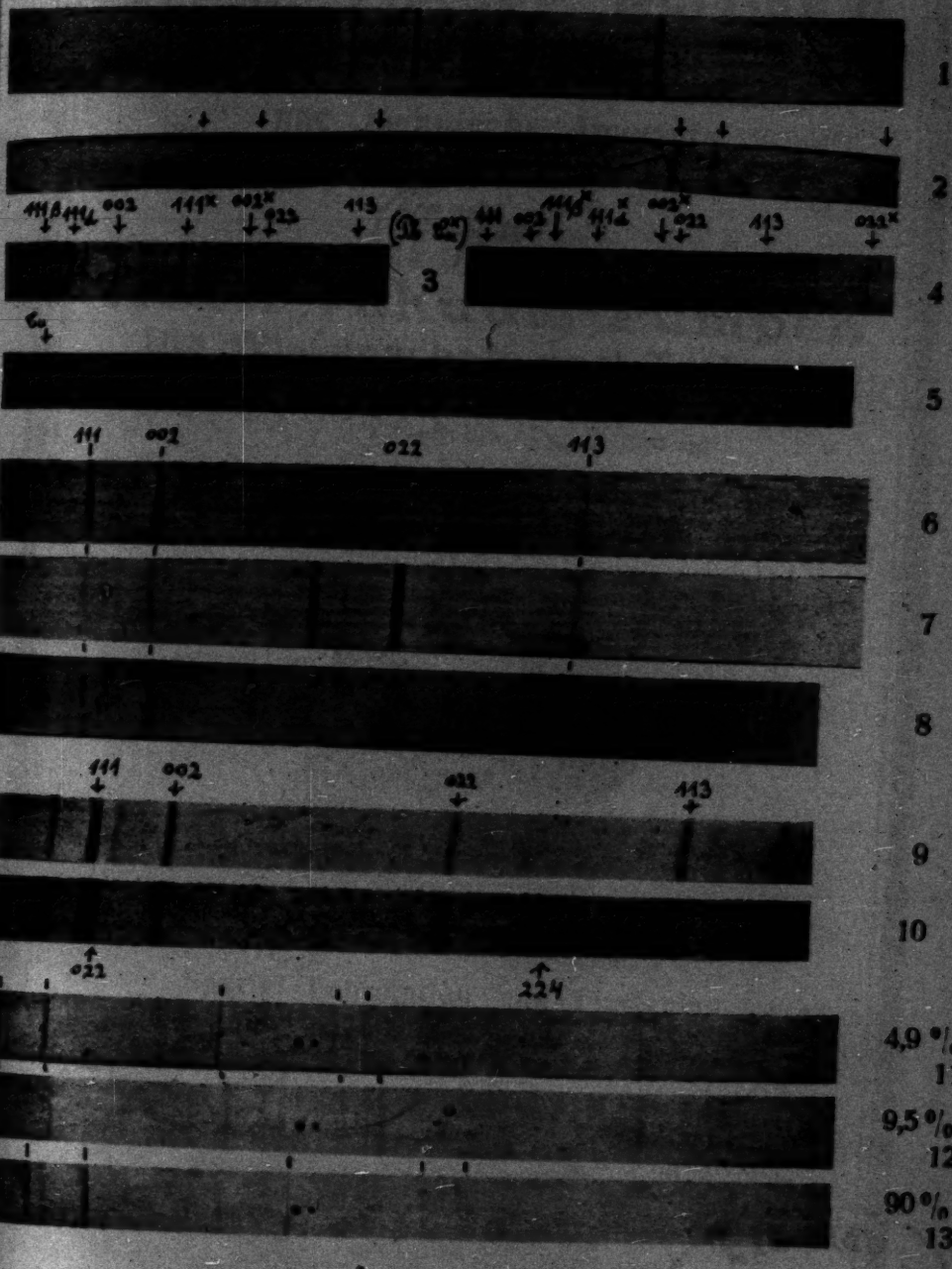
Die vorliegende Arbeit habe ich in den Jahren 1920/21 im Physikal. Institut der Universität Jena ausgeführt.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimrat Prof. Dr. M. Wien danke ich für das rege Interesse und die dauernde Unterstützung, die er meiner Arbeit zuteil werden ließ, und insbesondere auch für die Überlassung aller notwendigen, z. T. aus seinem Privatbesitz stammenden Hilfsmittel. Für wertvolle technische Ratschlägs bin ich außerdem Herrn Prof. Dr. Busch und für die Überlassung einer Wechselstrommaschine des Techn. Physik. Instituts Herrn Prof. Dr. Schumann zu Dank verpflichtet.

Jena, Physikal. Institut der Universität, 9. April 1922.

(Eingegangen 12. April 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.


1
2
111β 111α 002 111ˣ 002ˣ 022 113 (Ni 22ˢᵗ) 111 002 111ˣ 111αˣ 002ˣ 022 113 022ˣ
3
4
Cu
5
111 002 022 113
6
7
8
111 002 022 113
9
10
022 224
4,9 % Cu
11
9,5 % "
12
90 % "
13

F. KIRCHNER.

1922. № 18.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 69.

1. *Die Dispersion der Luft und ihrer Hauptbestandteile im Spektralintervall: 4388—9224 Å.-E.;* *von Eugen Stoll.*

Inhalt: I. Einleitung. — II. Versuchsanordnung. — III. Methode der Messungen und deren nähere Beschreibung. — IV. Resultate der Messungen und deren gleichzeitige Vergleichung mit denen anderer Beobachter. 1. Dispersion von Luft. a) Laboratoriumsluft. b) Gartenluft. c) Verwertung der Luftrefraktionswerte zur Berechnung von Vakuumwellenlängen. 2. Dispersion von Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure. a) Sauerstoff (elektrolytisch). b) Sauerstoff in Bombe. c) Stickstoff aus dem Gasometer. d) Stickstoff in Bombe. e) Kohlensäure (aus der Bombe). — V. Die Genauigkeit der Messungen. — VI. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Die genaue Kenntnis der Refraktion und Dispersion der atmosphärischen Luft hat hauptsächlich praktisches Interesse. Bei allen genauen Wellenlängenbestimmungen ist sie für die nötigen Korrektionen unentbehrlich und für serientheoretische Arbeiten dient sie zur Berechnung der Vakuumwellenlängen und damit der Wellenzahlen.

Während für das sichtbare und das ultraviolette Spektralgebiet Messungen vieler Beobachter vorliegen[1]), ist dies für das

1) E. Ketteler, Pogg. Annalen 124. S. 390—406. 1865; L. Lorenz, Wied. Annalen 11. S. 70—103. 1880; E. Mascart, Ann. de l'école norm (2) 6. S. 9—78. 1877; Compt. Rend. 78. S. 617. 1874; J. Chappuis & Ch. Rivière, Ann. de Chim. et de Phys. (6) 14. S. 5—34. 1888. R. Benoît, Journ. de phys. (2) 8. S. 451. 1889; H. Kayser & C. Runge, Wied. Ann. Vol 50. S. 293. 1893; F. Perreau, Ann. de Chim. et de phys. (7) 7. S. 289—348. 1896; H. G. Gale, Phys. Review. 14. S. 1. 1902; G. W. Walker, Phil. Trans. 201. S. 435. 1903; W. Kaiser, Ann. der Physik 13. S. 210. 1904; L. Magri, Phys. Zeitschrift 6. S. 629. 1905; K. Scheel, Verhdlg. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. S. 24. 1907; H. C. Rentschler, Astrophys. Journal 28. S. 345. 1908; C. u. M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. of London 83. S. 151. 1910; G. Gruschke, S. A. Jahresb. Schles. Ges. f. Vaterl. Kultur Natura Sept. 1910; F. Ahrberg, Dissertation, Halle 1909; J. Koch, Nova Acta. Reg. Soc. Ups.

äußerste Rot und den photographisch gut erreichbaren Teil des Ultrarot nicht der Fall. Im ultraroten Spektralgebiete sind besonders die Messungen von John Koch (a. a. O.) zu erwähnen, der mit Steinsalzrefraktometer und Thermosäule die Refraktion der Luft für 6,7 und 8,7 μ bestimmte.

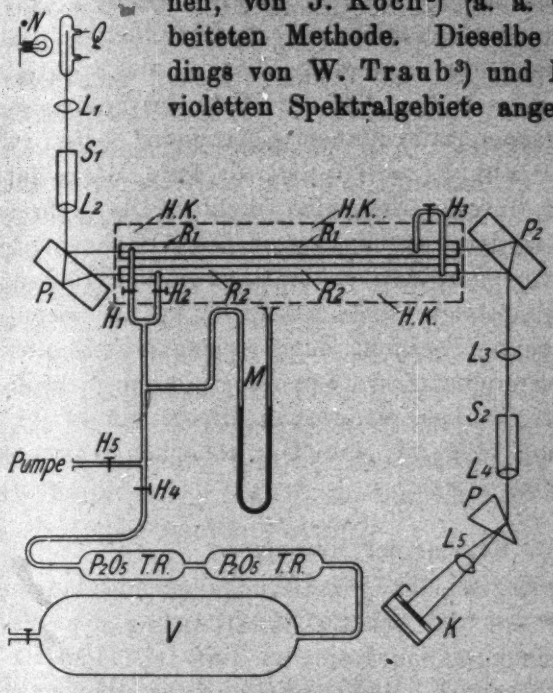
Während der Ausführung der vorliegenden Arbeit erschien eine Abhandlung des Bureau of Standards[1]), in der Messungen von $\lambda = 2218$ bis $\lambda = 9000$ Å.-E. mitgeteilt sind. Diese Messungen wurden mit einem Interferenzetalon nach Fabry and Perot ausgeführt, einer Methode, wie sie schon früher Rentschler und Howell (a. a. O.) benutzt hat.

Die von diesen Forschern gebrauchte Anordnung eignet sich indessen für Refraktionsbestimmungen nicht so gut wie die bekannte Jaminsche Methode, da der Abstand der versilberten Glas- oder Quarzplatten im allgemeinen nicht größer gemacht werden kann, als ca. 5 cm. Sie wird daher mit Vorteil besonders für solche Gase Anwendung finden, von denen nur geringe Mengen zur Verfügung stehen. Wenn die Messungen von Rentschler und Howell von denen anderer Beobachter stark abweichen, so liegt das wohl sicher an der benützten Methode. Bei Rentschler betrug die Plattendistanz 0,78 cm, so daß im Maximum nur etwa 8 Interferenzringe gezählt werden konnten bei einer Druckdifferenz von einer Atmosphäre. Dieser Mangel wird nur teilweise ausgeglichen durch die große Schärfe der Interferenzstreifen. Dieselbe Ursache bewirkt wahrscheinlich auch die starken Differenzen in den Einzelmessungen der Arbeit von Meggers u. Peters (a. a. O.), wie am besten aus der S. 723 (a. a. O.) mitgeteilten Kurve ersichtlich ist. Trotz des umfangreichen Materials, das diese amerikanischen Forscher in ihrer durch die Güte der Druck- und Temperaturmessung ausgezeichneten Versuchsanordnung

S. 4. Vol. 2 (5). S. 32 1909; Annalen der Physik 17. S. 658. 1905; Arkiv för Mat., Astr. och Physik. 8. S. 20. 1912; M. Howell, Phys. Review. 6. S. 81. 1915; J. Dickey, Astroph. Journal. 45. S. 188. 1917; S. Loria & J. Patkowski, Bulletin de l'Acad. Cracovie A. Oktober S. 494. 1913.

1) „Measurements on the Index of Refraction of Air for Wave Lengths from 2218 Å to 9000 Å" by W. F. Meggers and C. G. Peters, Bulletin of the Bureau of Standards. Washington, Vol. 14. No. 4. S. 695—740. 1919.

erzielten, schien es daher nicht zwecklos, im Interesse des ganzen Dispersionsverlaufes vom äußersten sichtbaren violetten bis in das photographisch noch gut erreichbare rote Spektralgebiet (von $\lambda = 4388$ bis 9224 Å.-E.) Refraktionsmessungen auszuführen und zwar nach der bewährten Jaminschen Refraktometermethode, in der zuerst von Puccianti[1]) angegebenen, von J. Koch[2]) (a. a. O.) weiter ausgearbeiteten Methode. Dieselbe wurde auch neuerdings von W. Traub[3]) und M. Kirn[4]) im ultravioletten Spektralgebiete angewandt.



Daten:

N Nitralampe
Q Spektralröhre
L_1 Abbildungslinse
S_1 Spalt } des Kollimators
L_2 Linse }
P_1, P_2 Jaminsche Platten
R_1, R_2 Jaminsche Röhren
M Manometer
$H.K.$ Wärmeisolierung
$H_1 - H_5$ Hähne
L_3 Abbildungslinse
S_2, L_4 } Teile des Spektralapparates
P, L_5 }
K Kamera
$T.R.$ Trockenröhren
V Vorratsraum

Fig. 1.

II. Versuchsanordnung.

Die benutzte Anordnung ist aus Fig. 1 ersichtlich. P_1 und P_2 sind die Platten des von Hilger in London gelieferten Refraktometers, R_1 und R_2 zwei horizontal liegende Glasröhren von gleicher Länge L, die durch sorgfältig ausgeführte kathetometrische Messungen zu $L = 499{,}96$ mm bestimmt wurde; diese

1) L. Puccianti, Il nuovo Cimento 2. S. 257, 1901 und Mem. Spett. Ital. 33. S. 133. 1904.
2) J. Koch, Nova Acta Reg. Soc. Ups. S. 4. Vol. 2. S. 32. 1909.
3) W. Traub, Ann. d. Phys. 61. S. 533—548. 1920.
4) M. Kirn, Ann. d. Phys. 64. S. 566. 1921.

Refraktometerröhren stammten gleichfalls von Hilger und waren durch Aufkitten mit planparallelen Glasplättchen verschlossen. Durch die Linse L_1 wurde die verwendete Lichtquelle (Spektralröhre oder Nitralampe) auf dem Spalte S_1 scharf abgebildet, der in der Brennebene des Objektives L_2 sich befand. Die bei richtiger Justierung auftretenden horizontalen Interferenzstreifen wurden durch das mikrometrisch verschiebbare Objektiv L_3 auf dem Spalte S_2 des Spektralapparates scharf abgebildet, so daß man in der Brennebene des Kameraobjektives L_5 das spektral zerlegte Interferenzbild erhielt. Auf der Mitte des Spaltes S_2 war ein Messingrähmchen mit dünnem Quarzfaden befestigt, der senkrecht zum Spalte S_2 verlief und als feste Marke für die Ausmessung der Interferenzstreifen diente. Die Röhren R_1 und R_2 konnten in der üblichen Weise durch Hähne miteinander, mit der Pumpe, dem Manometer M, sowie den Trockenröhren T mit anschließendem Vorratsraum V des zu untersuchenden Gases verbunden werden. Zur Erreichung konstanter Temperatur im Interferometer wurden die Röhren dicht in Watte gepackt. Zur Temperaturmessung diente ein in 0,1° geteiltes Thermometer, das mit vier Baudinschen Thermometern verglichen worden war.

III. Methode der Messungen.

Nach einigen zur allgemeinen Orientierung dienenden kurzen Vorversuchen wurde mit der okularen Bestimmung des Absolutwertes des Brechungsexponenten von Luft (aus dem Laboratorium) im sichtbaren Teil des Heliumspektrums begonnen und dabei das übliche Versuchsverfahren eingeschlagen. Zur Beobachtung der Streifen diente ein Fernrohr, das mit einem Schraubenokularmikrometer von Zeiß ausgestattet war.

Beide Refraktometerröhren wurden, mit Laboratoriumsluft gefüllt, bei beständig geschlossenem Hahn H_3 auf ein Vakuum von 2 bis 0,2 mm Hg Druck anfangs mit einer Geryk-Ölpumpe, später mit einer Gaedeschen Kapselpumpe ausgepumpt, nachdem noch das Fadenkreuz im Zeißschen Okularmikrometer auf die Mitte eines Interferenzstreifens der als Standardlinie $\lambda = 5875{,}64$ Å.-E. dienenden gelben Heliumlinie eingestellt war. Da das Okularmikrometer noch eine Messung von ca. 1/100 Streifenbreite gestattete, konnte ein etwaiges, sehr geringes

Wandern der Streifen mit hinreichender Genauigkeit innerhalb der Beobachtungsfehlergrenzen (s. S. 108) festgestellt werden; Manometerstand, zugehörige Zimmer- und Röhrentemperatur, sowie Einstellung des Fadenmikrometers wurden beobachtet und hernach durch Öffnen des Hahnes H_4 langsam Luft in R_1 eingelassen, sodaß ein langsames Wandern der Interferenzstreifen durch das Fadenkreuz einsetzte. Sorgfältig wurde die Anzahl der vorbeiziehenden Streifen gezählt, bis in R_1 atmosphärischer Druck herrschte und damit die Streifenwanderung beendigt war. Hierauf wurde etwa ein bis zwei Minuten zugewartet, bis jede Druckschwankung in R_1, welches durch die Zuleitung und Trockenröhren mit der Laboratoriumsluft in Verbindung blieb, ausgeschlossen war, und sodann der noch übrige Bruchteil der durchgewanderten Streifen mit dem Okularmikrometer ermittelt. Nach erfolgter Zählung wurde wieder die Röhrentemperatur abgelesen und Hahn H_2 langsam geöffnet, bis auch R_2 wieder mit Luft von atmosphärischem Druck gefüllt und so die Anfangsstellung kontrolliert war. Damit war eine Messung der am Mikrometerfadenkreuz im ganzen vorbeigezogenen Streifen beendigt, und der Absolutwert des Brechungsindex für die Linie 5875,64 Å.-E. konnte rechnerisch ermittelt werden nach der bekannten Formel[1]):

$$(n_0 - 1)\cdot 10^7 = \frac{N\cdot\lambda}{p_0\cdot L}\cdot 760 \quad (1+\alpha\cdot t_i),$$

worin bedeutet:

$(n_0 - 1)\cdot 10^7$ die Refraktion für Luft von 0° C und 750 mm Hg.

N = Anzahl der gewanderten Streifen.

λ = die Vakuumwellenlänge des angewandten Lichtes.

---

1) Siehe F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 12. Auflage. S. 294 ff. 1914. — St. Loria, Die Lichtbrechung in Gasen als physikalisches und chemisches Problem. Sammlung Vieweg, Heft 4. S. 25. 1914.

Die Beobachtungen von Posejpal (Ann. d. Phys. 53. S. 629. 1917) über die Druckabhängigkeit des Brechungsexponenten blieben dabei unberücksichtigt. Bei den in vorliegender Arbeit angewandten Drucken liegen aber die dadurch hervorgerufenen Abweichungen innerhalb der unten angegebenen Fehlergrenze. Zudem sind die Resultate Posejpals noch keineswegs bestätigt und stehen im Widerspruch mit Messungen von J. Koch (a. a. O.).

p_o = der auf 0° C reduzierte Manometerstand.

α = der thermische Ausdehnungskoeffizient (für Luft $\alpha = 0{,}003670$).

t_i = die abgelesene Röhrentemperatur.

In der eben angedeuteten Weise wurden für jede gut sichtbare Spektrallinie acht bis zwölf Einzelzählungen vorgenommen und derart das Heliumspektrum von $\lambda = 4388 - 7065$ Å.-E. ausgemessen.

In Tabelle I sind einige Resultate dieser Messungen mitgeteilt.

Tabelle I.

Refraktionswerte in *Laboratoriumsluft* einer Zählung im *sichtbaren Heliumspektrum.*

In Luft λ	Druck Po	Streifenzahl N	$(n_0 - 1)\cdot 10^7$ beobachtet	$(n_0 - 1,\cdot 10^7$ berechnet	Differenz beob.-ber.
4388	719,40	298,19	2955,60	2955,69	— 0,09·
4437	718,94	294,47	2953,64·	2953,81·	— 0,17·
4471	720,17	292,63	2952,49·	2952,56·	— 0,07·
4713	718,40	276,21	2944,50·	2944,48·	+ 0,02·
4921	719,54	264,35	2938,46·	2938,40·	+ 0,06·
5015	720,20	259,40·	2935,62·	2935,91·	— 0,29·
5047	720,80·	257,93·	2935,28·	2935,08·	+ 0,20·
5875	719,46·	219,92·	2918,50·	2918,41·	+ 0,09·
6678	719,45·	192,80·	2907,92·	2907,79·	+ 0,13·
7065	720,00	182,13·	2904,08·	2903,96·	+ 0,12·

Die beobachteten Resultate, nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgewertet, ergeben die folgende Dispersionsformel:

$$(n_0 - 1)\cdot 10^7 = 2871{,}40 + \frac{16{,}2304}{\lambda^2} \cdot \qquad (\lambda \text{ in } \mu).$$

Dieselbe ist vom einfachen Cauchyschen Typus und gleicht der von Scheel[1]) für trockene, kohlensäurehaltige Luft gefundenen:

$$(n_0 - 1)\cdot 10^7 = 2870{,}50 + \frac{16{,}230}{\lambda^2} .$$

In den obigen Zählungen war der thermische Ausdehnungskoeffizient der Luft, nach Chappuis und Regnault, zu

1) K. Scheel, Verhandlungen der Deutschen Phys. Ges. 9. S. 24. 1907.

$\alpha = 0{,}003670$ angenommen; die Röhrentemperatur wurde zu 18,70° C, die Zimmertemperatur zu 20,0° C bestimmt.

Für die in den Zählungen erreichte Genauigkeit mag folgendes, der Linie 4471 Å.-E. angehörendes Beispiel dienen:

$(n_0 - 1)\cdot 10^7$	
2952,58	2952,49
2952,54	2952,53
2952,56	2952,55

so daß der mittlere Beobachtungsfehler jedenfalls 0,01 Proz. nicht übersteigt.

Die Bestimmung des absoluten Brechungsexponenten für irgend eine Wellenlänge benötigt also neben der genauen Kenntnis von Druckvariation, der Temperatur des Versuchsgases und der Länge der Refraktometerröhren insbesondere die Ermittlung der Zahl der Interferenzen für die verschiedenen Wellenlängen bei der betreffenden Druckänderung in einer der Röhren. Indessen erfordert das Abzählen der Interferenzen für die einzelnen Wellenlängen viel Mühe und Zeit und zudem muß für jede Zählung ein vollständiger Versuch ausgeführt werden. Nach der von J. Koch[1]) vervollkommneten Methode Pucciantis[2]) kann die Ermittlung der Dispersion des Gases wesentlich vereinfacht werden, falls man nur für eine *einzige* Wellenlänge eine Absolutbestimmung des Brechungsexponenten ausführt. Da diese Methode selbst in der Arbeit von Koch nicht eingehend besprochen worden ist (auch die Arbeit von W. Traub[3]) verzichtet auf eine vollständige Darstellung), darf wohl hier eine ausführliche Beschreibung Platz finden.

Nähere Beschreibung der Meßmethode.

In beiden Refraktometerröhren R_1 und R_2 möge gleiche Gasdichte herrschen und das Refraktometer so justiert sein, daß der dem Gangunterschied Null entsprechende achromatische Streifen gerade auf dem Quarzfaden des Spaltes S_2 abgebildet wird. Bei Beleuchtung mit weißem Licht — es kam bei diesen Versuchen immer eine Nitralampe in Verwendung — sieht man auf der Mattscheibe der Kamera (oder der Brennebene des

1) J. Koch, a. a. O.
2) L. Puccianti, a. a. O.
3) W. Traub, a. a. O.

Fernrohrobjektivs) das spektral zerlegte Interferenzbild: eine „graphische Darstellung" des Zusammenhanges zwischen Gangunterschied und Wellenlänge. Die hellen gegen das violette Ende konvergierenden Kurven entsprechen bestimmten Gangunterschieden. Die horizontale Symmetrielinie bildet der spektral zerlegte achromatische Streifen. Durch ihn zieht sich als dunkle Linie das Bild des Quarzfadens auf dem Spalte S_2. Die Form der „Kurven gleichen Gangunterschiedes", die sich in der eben skizzierten Nullstellung zeigt, ist in Fig. 3 wiedergegeben, die der Vergrößerung der photographischen Aufnahme Nr. 48 entspricht. Die Interferenzstreifen der Heliumlinien sind darauf gut erkennbar. Die jedem Streifen zukommende „Ordnungszahl" ist beigeschrieben; denn jeden Streifen kennzeichnen wir durch eine Ordnungszahl, die den Gangunterschied der interferierenden Strahlen in Wellenlängen angibt. Da nun bei langsam erfolgender Druckänderung in der Röhre R_1 die Wanderungsgeschwindigkeit der Streifen mit abnehmender Wellenlänge wächst, so biegen sich die ursprünglich (in der Nullage) nahezu horizontalen Interferenzstreifen merklich vom roten gegen den violetten Spektralteil durch und gehen mit zunehmendem Druckunterschied in R_1 gegenüber R_2 in ein schiefes Streifensystem über, den horizontalen Quarzfaden unter immer größerem Richtungswinkel, in beständig engerem gegenseitigem Abstande, schneidend. Jedem Streifen entspricht wieder eine bestimmte ganze Ordnungszahl N, und es läßt sich leicht aus der photographischen Aufnahme der Sinn der Zählung bzw. die Wanderungsrichtung der Interferenzen ablesen.

Wird nun außer dem kontinuierlichen Grund auch noch das Spektrum irgend einer selektiv emittierenden Lichtquelle aufgenommen, so treten die horizontalen Interferenzen in jeder Linie deutlich hervor.

In irgend einer als Standardlinie dienenden Spektrallinie, hier He 5875,64 Å.-E. mögen die S. 86 erwähnten vorläufigen Zählungen vorgenommen sein, so daß man zum voraus aus den Druck- und Temperaturdaten leicht die angenäherte Zahl der für dieses λ gewanderten Streifen kennt. (Ein Fehler in einer Einheit ist dabei ausgeschlossen.) Im Interferenzstreifensystem dieser Linie kennt man also dann die Ordnungszahlen jedes Streifens und mit Hilfe der schiefen Interferenzstreifen

im kontinuierlichen Grund kann man durch einfaches Abzählen der Streifen längs der Quarzfadenlinie die Ordnungszahl für jede beliebige Wellenlänge bestimmen. Dies ist aus Fig. 3b ersichtlich, in der die zugehörigen Ordnungszahlen angeschrieben sind.

Zu der genauen Bestimmung der Brechungsexponenten für verschiedene λ genügt also ein angenäherter Wert von N für eine Standardlinie und die genaue Bestimmung der Bruchteile der gewanderten Streifen, während die ungefähre *ganze* Zahl der gewanderten Streifen aus der Photographie zu ersehen ist. Der große Vorteil der Methode liegt darin, daß man aus *einer Photographie* den *ganzen Dispersionsverlauf* im Versuchsgase erhält; dadurch ist auch die große Genauigkeit der relativen Brechungsexponenten bedingt.

Die Bruchteile der gewanderten Streifen wurden aus den beiden Aufnahmen 1 und 2 mit einem Zeißschen Komparator bestimmt. Fällt der Quarzfaden in Aufnahme 1 mit einer Stelle der Ordnungszahl $O + \Delta_1$, auf Aufnahme 2 mit einer Stelle der Ordnungszahl $N + \Delta_2$ zusammen, so ist die Anzahl der gewanderten Interferenzstreifen offenbar: $N_w = N + \Delta_2 - \Delta_1$. Hierbei sind Δ_1 und Δ_2 die genannten Bruchteile, N die Ordnungszahl des noch vollständig über den Quarzfaden gewanderten Streifens. Die Bestimmung von Δ_1 und Δ_2 geschah in folgender Weise: In Figur 2a sei das Interferenzstreifensystem

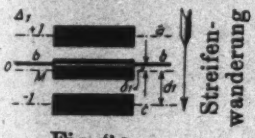


Fig. 2a.

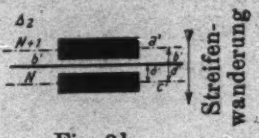


Fig. 2b.

einer Linie gegeben. Die Ablesung der Mitte des oberen Interferenzstreifens $+1$) sei a, die Einstellung des Quarzfadens b, diejenige des untern Interferenzstreifens c, wobei $c > b > a$ sein möge. Dann ist die Mitte des achromatischen Streifens M gegeben durch

$$\frac{a+c}{2},$$

die Entfernung des Quarzfadens von M:

$$\delta_1 = \frac{a+c}{2} - b.$$

Diese Entfernung ist, in Bruchteilen eines Interferenzstreifens ausgedrückt, offenbar:

$$\Delta_1 = \frac{\delta_1}{d_1} = \frac{\frac{a+c}{2} - b}{\frac{a+c}{2}} .$$

Die Ordnungszahl des Quarzfadens ist in Fig. 2b offenbar:

$$N + \Delta_2 = N + \frac{d'}{\delta'},$$

wobei: $\delta' = c' - b'$; $d' = c' - a'$ ist.

Somit ergibt sich die Zahl der gewanderten Streifen zu:

$$N_x = N + \frac{\delta'}{d'} - \frac{\delta_1}{d_1} .$$

Photographische Aufnahme No. 48. 8. Oktober 1920.
in „Laboratoriumsluft". $10^{00} - 1^{00}$ nachts.

Daten: Reduzierter Manometerstand : p_0 = 719,26 mm Hg.
Laboratoriumstemperatur : t_a = 18,00° C.
Röhrentemperetur : t_i = 18,01° C.
Röhrenlänge : L = 499,96 mm.
Thermischer Ausdehn. Koeffizient = 0,003670.

Komparatorische Ausmessung der Streifenbruchteile an den Linien:

λ = 5875,64 Å.-E.

I. Δ_1.

— 1) 56,3928. b) 56,0210. + 1) 55,7230.
+ 1) 55,7230. o) 56,0579. — 1) 56,3928.

o) 56,0579. δ_1 = 0,0369. d_1 = 0,3349.

$$\Delta_1 = \frac{\delta_1}{d_1} = \frac{0{,}0369}{0{,}3349} = +0.11.$$

II. Δ_2

N) 61,3125. b) 61,1508. N+1) 60,9825.
N + 1) 60,9825. N) 61,3125.

d' = 0,3300. δ' = 0,1617.

$$\Delta_2 = \frac{\delta'}{d'} = \frac{0{,}1617}{0{,}3300} = +0.49.$$

Da nun in der Linie 5875 bei 1 mm Druckdifferenz in den Röhren eine Streifenwanderung von 0,3064 Streifen beobachtet wurde, wanderten in dieser Linie $N = 0{,}3064 \cdot 719{,}26 = 220, \ldots$ ganze Streifen. Somit wird

$N_x = N + \Delta_2 - \Delta_1 = 220 + 0{,}49 - 0{,}11$
$N_x = 220{,}38.$

λ = 6678,15 Å.-E.

I. Δ_1.

— 1) 56,4074. b) 56,0210. — 1) 56,4074.
+ 1) 55,6714. o) 56,0394. + 1) 55,6714.

o) 56,0394. δ_1 = 0,0184. d_1 = 0,3680.

$$\Delta_1 = \frac{\delta_1}{d_1} = \frac{0{,}0184}{0{,}3680} = +0{,}05.$$

II. Δ_2

M) 61,2446. b) 61,1506. N+1) 60,8846.
N + 1) 60,8846. N) 61,2446.

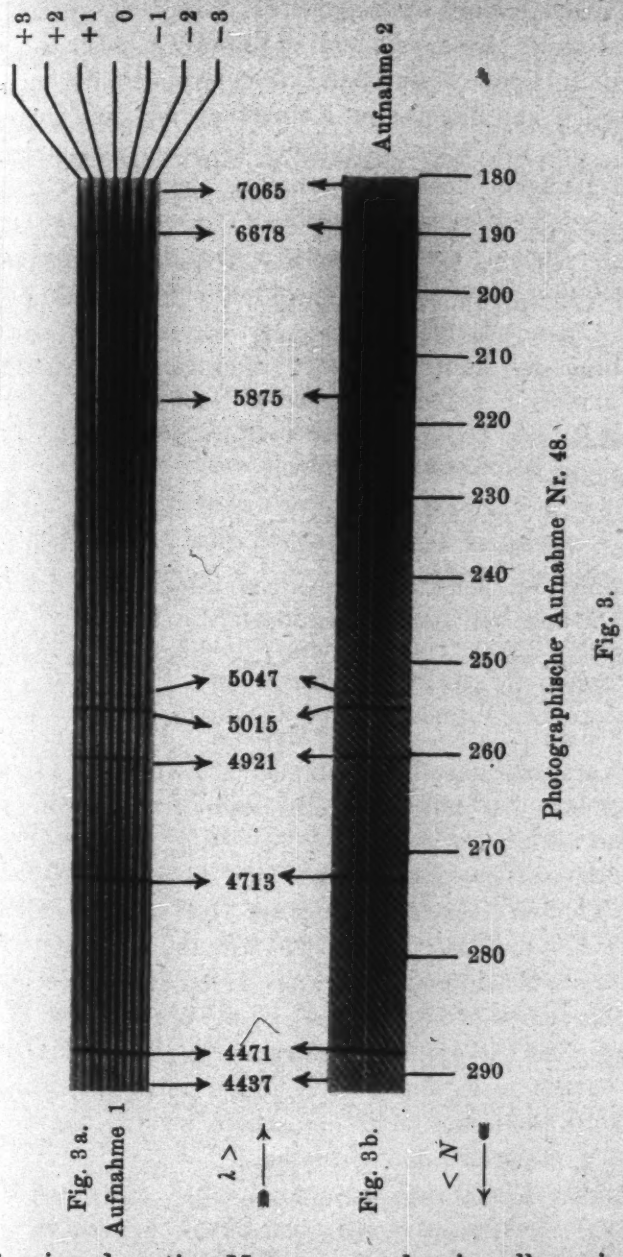
d' = 0,3600. δ' = 0,0940.

$$\Delta_2 = \frac{\delta'}{d'} = \frac{0{,}0940}{0{,}3600} = +0{,}26.$$

Eine Abzählnng der schiefen Streifen in Aufnahme 2 längs des Quarzfadens von 5875—6678 ergibt, daß bei obigem Druckunterschied in 6678 27 Streifen weniger wanderten als in 5875. Somit wird hier

$N_x = N + \Delta_2 - \Delta_1 = 193 + 0{,}26 - 0{,}05$
$N_x = 193{,}21.$

Folgendes Beispiel möge die Methode klar machen:



Für eine derartige Messung wurden im allgemeinen fünf Aufnahmen gemacht. Nachdem beide Röhren R_1 und R_2, mit-

einander kommunizierend, bis auf das maximal erreichbare Vakuum ausgepumpt waren, wurde Hahn H_6 geschlossen, Manometerstand, Zimmer- und Röhrentemperatur abgelesen und durch Justieren einer Refraktometerplatte der achromatische Streifen zur ungefähren Koinzidenz mit dem Quarzfaden gebracht. Um die schiefen Interferenzen im kontinuierlichen Spektrum genügend scharf zu erhalten, darf man nur bis zu einer gewissen Spaltbreite gehen, die durch Vorversuche ermittelt war und für jeden Versuch an der Spektraltrommel eingestellt werden konnte. Nach diesen Einstellungen erfolgten die Aufnahmen:

1. Exposition des kontinuierlichen Spektrums der Nitralampe bei evakuierten kommunizierenden Röhren.
2. Exposition des Helium- oder Argonspektrums bei gleichen Bedingungen.
3. a) Expos. d. kontinuierl. Spektr. } bei maxim. Druckunter-
   b) „ „ He-o. Argon-Spektr. } schied in beiden Röhren.
4. Aufnahme der selektiven Spektren allein ohne kontinuierlichen Grund bei den Bedingungen wie in 3.
5. Exposition wie in 1. oder 2. bei luftgefüllten kommunizierenden Röhren.

Auf einer Platte wurden bisweilen drei derartige vollständige Versuchsreihen aufgenommen (also 15 Einzelaufnahmen), was besonders bei gut sensibilisierten Platten von großem Vorteil war.

Die Expositionszeiten schwankten zwischen 10 Sekunden und 30 Minuten; für die äußersten ultraroten Linien 9123 und 9224 Å.-E. mußte bis zu 45 Minuten belichtet werden. Als Plattenmaterial fanden für das sichtbare Gebiet gewöhnlich Panchromatic von Wratten und Wainright, für das ultrarote Gebiet Dicyaninbadeplatten Verwendung. Die Dicyaninplatten wurden nach dem von K. W. Meißner[1]) angegebenen Rezept hergestellt und meist innerhalb 24 Stunden nach der Herstellung exponiert und entwickelt.

Von den Aufnahmen wurden nur die schärfsten für die Messungen zugelassen.

---

1) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. 50. S. 713. 1916.

Die dabei verwendeten Spektrallinien sind aus den Tabellen mit den Resultaten der Messungen zu ersehen.

Die starken Argonlinien: 7503,87, 8006,16, 8103,69,
7514,65, 8014,79, 8115,31,

fanden keine Verwendung, da der Prismenapparat diese Linien zu wenig trennte, so daß die zugehörigen Interferenzen kaum voneinander geschieden waren.

Als Grundlinie für die Zählung, d. h. Ermittlung der ganzen Zahl der gewanderten Streifen diente die Heliumlinie 5875,64 Å.-E., an die aber auch die Argonlinie 7067 Å.-E. angeschlossen war; von ihr ging man gewöhnlich bei den ultraroten Messungen aus.

IV. Resultate der Messungen und deren Vergleich mit denen anderer Beobachter.

1. Dispersion von Luft.

Die untersuchte Luft entstammte in der ersten Versuchsreihe dem Laboratorium („Laboratoriumsluft"), in der zweiten Versuchsreihe wurde sie dem Institutsgarten entnommen („Gartenluft"). Die Luft wurde in mehreren Trockenröhren mit $CaCl_2$ und P_2O_5 von ihrem Wasserdampfe befreit, doch wurde ihr der CO_2-Gehalt als wesentlicher Bestandteil dieses Gasgemisches gelassen.

a) Laboratoriumsluft.

Tabelle II enthält die Zusammenstellung der ausgeführten besten Messungen in diesem Versuchsgase. Bei einem red. Drucke von $p_0 = 719{,}30$ m/m · Hg, $t_i = 18{,}06°$ C Röhrentemperatur wurden in der Linie 5875 Å.-E.: 220,35 Streifen beobachtet. Die Mittelwerte der beobachteten Einzelwerte lassen sich gut durch die einfache Cauchysche Dispersionsformel: $(n_0 - 1) \cdot 10^7 = 2871{,}66 + \frac{16{,}163}{\lambda^2}$ mit im ganzen Dispersionsverlaufe minimalen Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung wiedergeben.

b) Gartenluft.

Nach demselben Verfahren wurden mehrere Versuche in Gartenluft unternommen. Zu diesem Zwecke wurde die Apparatur dahin abgeändert, daß an die frisch eingefüllten Trockenröhren

eine Bleirohrschlange[1]) angeschlossen wurde, die sich in einem Wasserbad von Zimmertemperatur befand und von der eine aus dickem Glasrohr bestehende Leitung durch eine Bohrung im Fensterrahmen nach dem Institutsgarten führte. Diese Leitung endigte im Freien in ca. 2 m Höhe über dem Boden und war sorgfältig auf Dichthalten geprüft. Vor Beginn der Versuche wurde während 3 Stunden durch die ganze Leitung, die Kühlschlange, Trockenröhren und den Interferenzapparat zur Spülung der Apparatur atmosphärische Luft angesaugt. Da die Exposition von Aufnahme 2, 3 und 4 mit sensibilisierten Platten je bis zu 50 Minuten beanspruchte, hatte bei Nachtaufnahmen die in der Leitung inkl. Trockenröhren befindliche Luft genügend Zeit, die Temperatur des umgebenden Raumes anzunehmen, so daß man, durch mehrfache Kontrollmessungen der Röhrentemperatur hierin bestätigt, sicher war vor Temperaturschwankungen während der dreistündigen Versuchsdauer. Bei einem Drucke von $p_0 =$ 720,00 mm Hg und $t_i = 18{,}0^0$ C Röhrentemperatur wurden in der gelben Heliumlinie 220,76 Streifen gemessen.

Die Mittelwerte der Beobachtungen ergaben als Dispersionsverlauf die Formel:

$$(n_0 - 1) \cdot 10^7 = 2871{,}87 + \frac{16{,}170}{\lambda^2}.$$

Ein Vergleich der in beiden Luft-„Arten" erhaltenen, in den Tabb. II und III mitgeteilten Resultate zeigt, daß die der Gartenluft angehörenden Absolutwerte die in Laboratoriumsluft entsprechenden durchschnittlich um 2—3 Einheiten in der ersten Dezimale des Refraktionswertes: $(n_0 - 1) \cdot 10^7$ übertreffen, was auch in den Konstanten der beiden einander nahezu äquivalenten Dispersionsformeln zum Ausdrucke kommt. Dementsprechend ist der Verlauf der Dispersion in Gartenluft fast parallel dem in Lab.-Luft. Die nahezu konstante Wertedifferenz ist wohl dem in Lab.-Luft gegenüber Gartenluft verminderten O_2- und entsprechend erhöhten CO_2-Gehalte zuzuschreiben. Die Tabellen zeigen im allgemeinen sehr gute Übereinstimmung der einzelnen Absolutwerte untereinander. Die Abweichungen der beobachteten von den jeweils berechneten Werten sind so

1) Im folgenden kurz „Kühlschlange" bezeichnet.

Tabelle II.

Refraktion in Laboratoriumsluft.

Wellenlängen	1	2	3	4	5	6	7	8	beob. Mittel	berechn.	Differenz beob.-ber.
4388,100	2955,66	2955,64	2955,67	2955,60	2955,62	2955,64	2955,60	2955,60	2955,63	2955,60	+ 0,03
4437,713	2953,65	2953,67	2953,66	2953,68	2953,65	2953,66	2953,68	2953,68	2953,66	2953,73	− 0,07
4471,482	2952,47	2952,48	2952,45	2952,48	2952,47	2952,44	2952,46	2952,43	2952,46	2952,50	− 0,04
4713,143	2944,47	2944,42	2944,40	2944,43	2944,48	2944,45	2944,42	2944,45	2944,44	2944,42	+ 0,02
4921,918	2938,38	2938,42	2938,42	2938,40	2938,42	2938,44	2938,40	2938,38	2938,41	2938,38	+ 0,03
5015,722	2935,71	2935,68	2935,73	2935,71	2935,70	2935,68	2935,72	2935,67	2935,70	2935,91	− 0,21
5047,816	2935,20	2935,18	2935,12	2935,14	2935,17	2935,10	2935,10	2935,11	2935,14	2935,09	+ 0,05
5875,640	2918,46	2918,49	2918,48	2918,46	2918,48	2918,44	2918,52	2918,51	2918,48	2918,48	—
6678,150	2907,94	2907,91	2907,98	2907,90	2907,94	2907,98	2908,07	2907,93	2907,95	2907,90	+ 0,05
7065,200	2904,10	2904,07	2904,10	2904,10	2904,09	2904,13	2904,19	2904,10	2904,11	2904,12	− 0,01
7281,810	—	2902,10	2902,08	2902,08	—	2902,10	2902,13	2902,18	2902,12	2902,14	− 0,02
7030,230	2904,38	2904,40	2904,33	2904,39	2904,42	2904,37	2904,39	2904,36	2904,38	2904,36	+ 0,02
7067,218	2904,04	2904,08	2904,04	2904,10	2904,06	2904,09	2904,08	2904,02	2908,08	2904,02	+ 0,06
7147,036	2903,34	2903,30	2903,38	2903,36	2903,38	2903,34	2903,30	2903,32	2903,34	2903,30	+ 0,04
7272,940	2902,22	2902,23	2902,20	2902,16	2902,20	2902,18	2902,15	2902,19	2902,19	2902,20	− 0,01
7383,978	2901,32	2901,34	2901,32	2901,38	2901,30	2901,36	2901,40	2901,38	2901,35	2901,32	+ 0,03
7635,107	2899,36	2899,38	2899,37	2899,38	2899,39	2899,38	2899,37	2899,33	2899,37	2899,39	− 0,02
7723,760	2898,68	2898,69	2898,63	2898,70	2898,74	2898,60	2898,60	2898,60	2898,65	2898,67	− 0,02
7948,177	2897,24	2897,20	2897,29	2897,23	2897,22	2897,27	2897,28	2897,27	2897,25	2897,25	—
8264,521	2895,30	2895,24	2895,30	2895,35	2895,32	2895,30	2895,28	2895,31	2895,30	2895,33	− 0,03
8521,480	2894,00	2894,03	2894,01	2894,00	2894,05	2894,01	2894,04	2894,02	2894,02	2893,92	+ 0,10
8667,953	2893,16	2893,11	2893,17	2893,20	2893,14	2893,12	2893,18	2893,12	2893,15	2893,17	− 0,02
9123,000	2891,06	2891,04	2891,07	2891,05	2891,06	2891,05	2891,05	2891,10	2891,06	2891,08	− 0,02
9224,515	2890,68	2890,67	2890,73	2890,69	2890,70	2890,68	2890,72	2890,73	2890,70	2890,67	+ 0,03

Tabelle III.

Refraktion in Gartenluft.

Wellenlängen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	beob. Mittel	berechnet	Differenz beob.-ber.
4388,100	2955,80	2955,84	2955,89	2952,88	2955,84	—	—	—	—	—	2955,85	2955,85	+ 0,00
4437,713	2953,90	2953,88	2953,93	2953,84	2953,85	—	—	—	—	—	2953,88	2953,98	− 0,10
4471,482	2952,62	2952,65	2952,69	2952,67	2952,71	—	—	—	—	—	2952,68	2952,74	− 0,06
4713,143	2944,65	2944,68	2944,64	2944,60	2944,65	—	—	—	—	—	2944,64	2944,66	− 0,02
4921,918	2938,56	2938,59	2938,56	2938,58	2938,59	—	—	—	—	—	2938,58	2938,62	− 0,04
5015,732	2935,84	2935,88	2935,92	2935,88	2935,94	—	—	—	—	—	2935,89	2936,15	− 0,24
5047,816	2935,38	2935,34	2935,38	2935,39	2935,36	—	—	—	—	—	2935,37	2935,33	+ 0,04
5875,640	2918,74	2918,78	2918,74	2918,72	2918,77	—	—	—	—	—	2918,75	2918,71	+ 0,04
6678,150	2908,16	2908,18	2908,16	2908,20	2908,20	—	—	—	—	—	2908,18	2908,13	+ 0,05
7065,200	2904,30	2904,35	2904,37	2904,34	2904,35	—	—	—	—	—	2904,34	2904,27	+ 0,07
7281,810	2902,36	2902,30	2902,37	2902,36	2902,36	—	—	—	—	—	2902,35	2902,37	− 0,02
7030,230	2904,58	2904,60	2904,64	2904,60	2904,66	2904,64	2904,62	2904,60	2904,62	2904,62	2904,62	2904,59	+ 0,03
7067,218	2904,30	2904,30	2904,36	2904,36	2904,34	2904,32	2904,36	2904,30	2904,36	2904,34	2904,34	2904,26	+ 0,08
7147,036	2903,58	2903,52	2903,58	2903,59	2903,52	2903,50	2903,54	2903,58	2903,59	2903,60	2903,56	2903,53	+ 0,03
7272,94	2902,40	2902,38	2902,44	2902,40	2902,44	2902,38	2902,42	2902,40	2902,46	2902,47	2902,42	2902,44	− 0,02
7383,978	2901,58	2901,56	2901,58	2901,54	2901,50	2901,52	2901,58	2901,56	2901,57	2901,52	2901,55	2901,53	+ 0,02
7635,107	2899,56	2899,58	2899,60	2899,56	2899,54	2899,58	2899,64	2899,64	2899,66	2899,64	2899,60	2899,61	− 0,01
7723,760	2898,95	2898,93	2898,92	2898,96	2898,95	2898,94	2898,96	2898,92	2898,94	2898,93	2898,94	2898,98	− 0,04
7948,177	2897,48	2897,50	2897,44	2897,50	2897,48	2897,52	2897,51	2897,48	2897,52	2897,57	2897,50	2897,47	+ 0,03
8264,521	2895,50	2895,49	2895,50	2895,46	2895,54	2895,52	2895,54	2895,52	2895,54	2895,57	2895,52	2895,54	− 0,02
8521,480	2894,20	2894,28	2894,24	2894,24	2894,25	2894,26	2894,28	2894,28	2894,29	2894,28	2894,26	2894,14	+ 0,12
8667,953	2893,40	2893,34	2893,44	2893,36	2893,40	2893,38	2893,42	2893,36	2893,37	2893,33	2893,38	2893,39	− 0,01
9128,000	2891,35	2891,31	—	—	—	—	2891,28	2891,30	—	2891,26	2891,30	2891,30	+ 0,00
9224,515	2890,90	2890,92	—	—	—	—	2890,96	2890,98	—	2890,94	2890,94	2890,87	+ 0,07

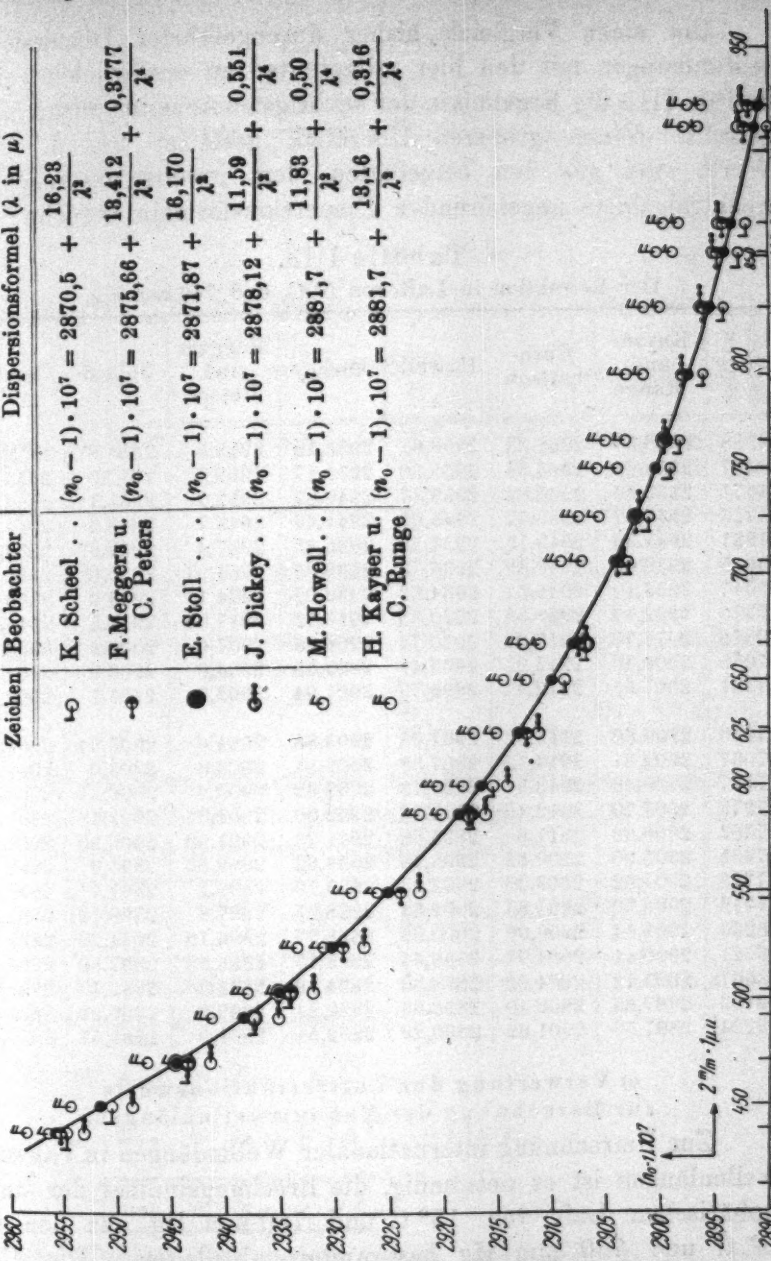


Fig. 4. Dispersionsverlauf in trockener, kohlensäurehaltiger Luft. Spektralintervall: 4388 – 9224 Å.-E.

minimal, daß die erhaltenen Dispersionsformeln eine sehr gute Berechnung der beobachteten Resultate innerhalb des gesamten untersuchten Spektralgebietes zulassen.

Um einen Vergleich bisher durchgeführter Dispersionsbestimmungen mit den hier mitgeteilten zu ermöglichen, sind in Tab. IIIa die Ergebnisse der wichtigsten Arbeiten zusammengestellt. Einen gröberen Überblick gestattet Fig. 4. Die Werte sind aus den beigefügten, dem jeweils untersuchten Spektralgebiete angehörenden Dispersionsformeln berechnet.

Tabelle IIIa.

Der Refraktion in Luft von 0° C. und 760 mm Hg.

Wellenlängen	Kayser und Runge	Cuthbertson	Howell	Dickey	Meggers und Peters	Scheel	Stoll
4388	2958,57	2968,33	2956,61	2953,18	2955,5	2954,8	2955,85
4437	2956,66	2966,34	2955,30	2951,17	2953,5	2952,9	2953,88
4471	2955,39	2964,83	2953,37	2949,87	2952,2	2951,7	2952,68
4713	2947,32	2955,77	2945,09	2941,46	2943,7	2943,6	2944,64
4921	2941,36	2949,15	2937,35	2935,33	2937,4	2937,5	2938,58
5015	2938,00	2946,48	2936,73	2932,89	2934,91	2935,0	2935,89
5047	2938,10	2945,61	2934,83	2932,09	2934,1	2934,2	2935,37
5875	2922,46	2928,35	2920,35	2916,32	2917,80	2917,5	2918,75
6678	2912,78	2917,92	2910,74	2906,88	2907,6	2906,9	2908,18
7065	2909,40	2914,21	2907,41	2903,55	2904,0	2903,0	2904,34
7281	2907,63	2912,41	2905,79	2901,94	2902,3	2901,1	2902,35
7030	2909,60	2914,52	2907,69	2903,83	2904,0	2903,34	2904,62
7067	2909,31	2914,19	2907,39	2903,54	2903,8	2903,0	2904,34
7147	2908,66	2913,51	2906,78	2902,92	2903,4	2902,27	2903,56
7273	2907,70	2912,49	2905,86	2902,00	2902,3	2901,18	2902,42
7383	2906,90	2911,62	2905,08	2901,23	2901,50	2900,30	2901,55
7635	2905,20	2909,82	2903,46	2899,62	2899,80	2898,3	2899,60
7723	2904,62	2909,23	2902,93	2899,10	2899,2	2897,7	2898,94
7948	2903,30	2907,83	2901,68	2898,35	2897,8	2896,19	2897,50
8265	2901,64	2906,06	2900,09	2896,27	2896,10	2894,20	2895,52
8521	2900,41	2904,77	2898,94	2895,13	2894,80	2892,60	2894,26
8667	2899,76	2904,09	2898,33	2894.52	2894,2	2892,1	2893,38
9123	2897,66	2902,40	2896,64	2892,84	2892,2	2890,00	2891,30
9224	2897,59	2901,82	2896,29	2892,51	2891,9	2889,57	2890,94

c) Verwertung der Luftrefraktionswerte zur Berechnung der Vakuumwellenlängen.

Zur Umrechnung internationaler Wellenlängen in Vakuumwellenlängen ist es notwendig, die Brechungsindizes der atmosphärischen Luft von 15° C und 760 mm Hg aus den für 0° C und 760 mm Hg bestimmten abzuleiten. Die Umrechnung erfolgt durch die Beziehung:

$$\frac{n_o - 1}{d_o} = \frac{n_t - 1}{d_t}.$$

Tabelle IIIb.

Dispersionsformeln
für trockene, kohlensäurehaltige Luft von 0° C und 760 mm Hg.

Beobachter	Formel	Untersuchtes Spektralgebiet
	$(n_0 - 1) \cdot 10^7 = (\lambda \text{ in } \mu)$	
Kayser u. Runge (1893) .	$2881{,}7 + \frac{13{,}16}{\lambda^2} + \frac{0{,}316}{\lambda^4}$	2360—5630 Å.-E.
Scheel (1907)	$2870{,}5 + \frac{16{,}23}{\lambda^2}$	4358—7056 Å.-E.
Cuthbertson (1910)	$2885{,}4 + \frac{13{,}38}{\lambda^2} + \frac{0{,}50}{\lambda^4}$	4861—6563 Å.-E.
Howell (1915)	$2881{,}7 + \frac{11{,}83}{\lambda^2} + \frac{0{,}50}{\lambda^4}$	2652—6678 Å.-E.
Dickey (1917)	$2878{,}12 + \frac{11{,}59}{\lambda^2} + \frac{0{,}551}{\lambda^4}$	2493—6401 Å.-E.
Bureau of Standards (1918)	$2875{,}66 + \frac{13{,}412}{\lambda^2} + \frac{0{,}3777}{\lambda^4}$	2218—9000 Å.-E.
Stoll (1922)	$2871{,}87 + \frac{16{,}1700}{\lambda^2}$	4388—9224 Å.-E.

Aus der oben mitgeteilten, alle Messungen gut darstellenden Dispersionsformel für Gartenluft wurde so die auf 15° C und 760 mm Hg reduzierte Formel ermittelt:

$$\boxed{(n-1)\,{}^{760\text{ mm}}_{15^0} \cdot 10^7 = 2721{,}96 + \frac{15{,}321}{\lambda^2}}$$

und aus ihr die Refraktionswerte für die von 100 zu 100 Å.-E. fortschreitenden λ-Werte bestimmt.

Es ist: $\lambda_{vac.} = \lambda_{Int.} \cdot n\,{}^{760}_{15^0}$

$$\lambda_{vac.} = \lambda_{Int.} + \left\{ n\,{}^{760}_{15^0} - 1 \right\} \cdot \lambda_{Int.}$$

$$\boxed{\lambda_{vac.} = \lambda_{Int.} + \Delta\lambda.}$$

Die Tabelle IV enthält neben den Refraktionswerten $(n-1)\,{}^{760}_{15^0} \cdot 10^7$ in der dritten Kolonne die für die Umrechnung nötigen $\Delta\lambda$, die also zu den jeweiligen $\lambda_{Int.}$-Werten zu addieren sind.

Tabelle IV.

Refraktion der atm. Luft bei 15° C. und 760 mm Hg. Wellenlängenkorrektion auf Vakuum.

Wellenlängen	$(n_{15} - 1) \cdot 10^7$	Korrektionsglied	Differenz $\cdot 10^4$	Wellenlängen	$(n_{15} - 1) \cdot 10^7$	Korrektionsglied	Differenz $\cdot 10^4$
4000	2817,75	1,1271	263	7000	2753,24	1,9273	269
4100	2813,13	1,1534	263	7100	2752,36	1,9542	269
4200	2808,84	1,1797	264	7200	2751,52	1,9811	269
4300	2804,85	1,2061	264	7300	2750,72	2,0080	270
4400	2801,12	1,2325	264	7400	2749,95	2,0350	270
4500	2797,64	1,2589	265	7500	2749,31	2,0620	269
4600	2794,39	1,2854	265	7600	2748,49	2,0889	269
4700	2791,34	1,3119	265	7700	2747,81	2,1158	270
4800	2788,48	1,3384	266	7800	2747,15	2,1428	269
4900	2785,79	1,3650	266	7900	2746,52	2,1697	270
5000	2783,26	1,3916	266	8000	2745,91	2,1967	270
5100	2780,88	1,4182	267	8100	2745,32	2,2237	270
5200	2778,64	1,4449	267	8200	2744,75	2,2507	270
5300	2776,52	1,4716	267	8300	2744,01	2,2777	270
5400	2774,52	1,4983	267	8400	2743,68	2,3047	270
5500	2772,63	1,5250	267	8500	2743,17	2,3317	270
5600	2770,83	1,5517	267	8600	2742,68	2,3587	270
5700	2769,14	1,5784	267	8700	2742,21	2,3857	270
5800	2767,52	1,6051	268	8800	2741,73	2,4127	270
5900	2765,99	1,6319	268	8900	2741,31	2,4397	270
6000	2764,53	1,6587	268	9000	2740,82	2,4667	271
6100	2763,15	1,6855	268	9100	2740,41	2,4938	271
6200	2761,83	1,7123	268	9200	2740,07	2,5209	270
6300	2760,57	1,7391	268	9300	2739,68	2,5479	271
6400	2759,38	1,7659	269	9400	2739,31	2,5750	270
6500	2758,23	1,7928	269	9500	2738,94	2,6020	270
6600	2757,14	1,8197	269	9600	2738,59	2,6290	271
6700	2756,10	1,8466	269	9700	2738,25	2,6561	271
6800	2755,10	1,8735	269	9800	2737,92	2,6832	271
6900	2754,15	1,9004	269	9900	2737,60	2,7103	271
7000	2753,24	1,9273		10000	2737,29	2,7374	

2. Dispersion von Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure.

Mit der gleichen Anordnung und Methode wurden auch die Dispersionsmessungen der drei Hauptbestandteile der atmosphärischen Luft: Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure vorgenommen. Eine kurze Beschreibung der Herkunft und Reinigung dieser Gase, sowie die Vergleichung der gewonnenen Resultate mit den Ergebnissen anderer Autoren sollen genügen.

a) Sauerstoff (elektrolytisch).

Die Herstellung dieses Gases erfolgte in einem zweckmäßig abgeänderten Hoffmannschen Apparate. Der bei einer

Stromstärke von 2,5—4,5 Amp. entwickelte Sauerstoff wurde in einem ca. 2 Liter fassenden, vorher mit Sauerstoff aus der Stahlbombe gespülten und dann evakuierten Vorratsgefäß gesammelt. Aus diesem wurde das Gas zur Befreiung von etwaigem Ozon durch verschiedene, mit Gummiabfällen gefüllte Röhren und Waschflaschen geleitet, die Kaliumjodidstärkelösungen enthielten. Von hier konnte das Gas durch die Kühlschlange und mehrere frisch gefüllte Trockenröhren mit $CaCl_2$ und P_2O_5 in die Interferometerröhren gelangen. Die endgültigen Versuche wurden erst begonnen, nachdem die ganze Apparatur mehrere Tage lang mit elektrolytischem Sauerstoff durchgespült war. Chemische Reaktionen zeigten sich während der ganzen Versuchsdauer in der Gasreinigungsapparatur nicht. Die in der Standardlinie $\lambda = 5875{,}64$ Å.-E. öfter nachkontrollierte Zählung ergab eine Wanderung von 210,77 Streifen, bei 743,78 mm Hg reduziertem Druck und einer Röhrentemperatur von 19,98° C und 20,0° Zimmertemperatur. Der thermische Ausdehnungskoeffizient wurde nach Jolly zu $\alpha = 0{,}003670$ gewählt.

Die endgültigen Resultate sind aus Tabelle V ersichtlich.

Die berechneten Werte liefert die zweigliedrige Cauchysche Dispersionsformel:

$$(n_0 - 1) \cdot 10^7 = 2650{,}86 + \frac{20{,}074}{\lambda^2};$$

ein Vergleich der erhaltenen Mittelwerte mit den nach der Dispersionsformel Cuthbertsons[1]):

$$(n_0 - 1) = \frac{3{,}397 \cdot 10^{27}}{12807 \cdot 10^{27} - n^2}$$

berechneten Daten zeigt durchweg gute Übereinstimmung.

C. und M. Cuthbertson bestimmten die Refraktion in reinem Sauerstoff im Spektralgebiete von $\lambda = 6563$—4861 Å.-E., nach einer von Rentschler (a. a. O.) angegebenen, aber etwas abgeänderten Methode. Das Gas entstammte reinem K_2CO_3, war frei von Ozon und von verunreinigenden Mischbestandteilen.

Im Hinblick auf die großen Diskrepanzen in dem bisher vorliegenden Beobachtungsmaterial (vgl. etwa die Zusammen-

1) C. u. M. Cuthbertson, Proc. Royal Soc. (A) 83. S. 164. 1909.

Tabelle V.

Refraktion in elektrolytischem Sauerstoff.

Wellenlängen	1	2	3	4	5	6	Mittel	berechnet	Differenz beob.-ber.	Cuthbertson berechnet
4388	2755,09	2755,05	2755,10	2755,12	—	—	2755,09	2755,11	− 0,02	2753,48
4437	2752,89	2752,87	2752,86	2752,86	—	—	2752,87	2752,79	+ 0,08	2751,80
4471	2751,38	2751,39	2751,45	2751,38	—	—	2751,40	2751,26	+ 0,14	2749,20
4713	2741,24	2741,20	2741,16	2741,19	—	—	2741,20	2741,28	− 0,08	2737,50
4921	2733,60	2733,44	2733,54	2733,50	—	—	2733,52	2733,72	− 0,20	2730,20
5015	2730,48	2730,44	2730,40	2730,45	—	—	2730,44	2730,65	− 0,21	2729,40
5047	2729,42	2729,46	2729,39	2729,42	—	—	2729,42	2729,64	− 0.22	2728,00
5875	2709,10	2709,04	2709,05	2709,05	—	—	2709,06	2709,03	+ 0,03	2708,30
6678	2695,96	2695,92	2695,94	2695,90	—	—	2695,93	2695,87	+ 0,06	2695,60
7065	2690,98	2690,94	2691,06	2691,06	—	—	2691,01	2691,08	− 0,07	2691,40
7281	2688,78	2688,76	2688,82	2688,80	—	—	2688,79	2688,72	+ 0,07	2688,80
7030	2691,46	2691,54	2691,48	2691,52	2691,54	2691,46	2691,50	2691,48	+ 0,02	2691,30
7067	2691,20	2691,12	2691,15	2691,14	2691,09	2691,20	2691,15	2691,05	+ 0,10	2691,35
7147	2690,34	2690,38	2690,27	2690,34	2690,33	2690,32	2690,33	2690,16	+ 0,17	2690,10
7273	2688,94	2688,94	2688,86	2688,98	2688,79	2688,90	2688,90	2688,99	− 0,09	2688,90
7383	2686,70	2686,68	2686,69	2686,74	2686,76	2687,75	2687,72	2687,68	+ 0,04	2687,80
7635	2685,48	2685,37	2685,22	2685,30	2685,30	2685,43	2685,35	2685,30	+ 0,05	2685,40
7723	2684,64	2684,70	2684,56	2684,60	2684,53	2684,63	2684,61	2684,51	+ 0,10	2684,70
7948	2682,43	2682,46	2682,40	2682,44	2682,46	2682,45	2682,46	2682,64	− 0,18	2683,00
8264	2680,27	2680,35	2680,24	2680,14	2680,36	2680,38	2680,29	2680,25	+ 0,04	2680,70
8521	2678,62	2678,53	2678,48	2678,54	2678,52	2678,49	2678,53	2678,48	+ 0,05	2678,48
8667	2677,64	2677,65	2677,60	2677,64	2677,58	2677,61	2677,62	2677,58	+ 0,04	2678,10
9123	2674,94	2674,96	2675,04	2675,04	2675,03	2674,99	2675,00	2674,98	+ 0,02	2675,60
9224	2674,44	2674,54	2674,54	2674,54	2674,48	2674,52	2674,51	2674,45	+ 0,06	2675,20

stellung bei Loria (a. a. O.) S. 45) muß diese Übereinstimmung mit C. und M. Cuthbertson als eine sehr gute gelten.

Die sorgfältigen Messungen J. Kochs[1]), die allerdings mehr zur Bestimmung der Refraktion im Ultrarot unternommen wurden, lassen leider keine direkte Vergleichung zu, da er für seine Versuche Sauerstoff einer Stahlbombe entnahm und über die Zusammensetzung oder Herstellung des Gases keine Mitteilung macht. Seine Werte sind im Gebiete $\lambda = 4360—6708$ Å.-E. um ca. 14 Einheiten der 7. Stelle kleiner als die hier angegebenen. Dieser Unterschied ließe darauf schließen, daß sein Sauerstoff elektrolytisch hergestellt und mit Wasserstoff verunreinigt war.

Daß ein geringer Prozentgehalt eines Fremdgases die Refraktionswerte bedeutend ändern kann, zeigen die Messungen, die mit der hier beschriebenen Anordnung an Bombensauerstoff gewonnen wurden.

b) Sauerstoff aus der Bombe.

Aus der Stahlbombe wurde dieses Gas durch die Kühlschlange und mehrere Trockenröhren in den Interferenzapparat geleitet. Bei einem gewöhnlich angewandten Maximaldruck von $p_0 = 765{,}00$ mm Hg wanderten in der Standardlinie 5875,64 Å.-E.: 218,30 Streifen bei einer Röhrentemperatur von $t_i = 18{,}44°$ C. Der thermische Ausdehnungskoeffizient wurde wie in dem vorigen Versuchsgas zu 0,003670 gewählt.

Dieser Sauerstoff war durch Luftverflüssigung gewonnen und enthielt ca. 96 proz. reinen Sauerstoff und ca 4 proz. reinen Stickstoff.

Natürlich wurden an diesem Gas nur wenig Messungen ausgeführt. Tabelle VI gibt die Mittelwerte sämtlicher Messungen.

Die Anwendung der Mischregel ergab übrigens unter der Veraussetzung, daß das Bombengas aus Sauerstoff und Stickstoff zusammengesetzt sei, die mit den gasanalytischen Angaben des Sauerstoffwerkes übereinstimmenden Gehalte von 96 Proz. O_2 und 4 Proz. N_2.

---

1) J. Koch, Nova Acta Reg. Soc. Ups. Ser. 4. 2. (5) S. 32. 1909.

Tabelle VI.

Refraktion in Sauerstoff in Bombe.

Wellenlänge	Mittelwerte	Wellenlänge	Mittelwerte
4388	2766,86	7030	2702,42
4437	2764,09	7067	2701,88
4471	2762,45	7147	2701,04
4713	2752,38	7273	2699,54
4921	2744,65	7383	2698,44
5015	2741,58	7635	2696,11
5047	2740,66	7723	2694,91
5875	2719,88	7948	2693,15
6678	2706,86	8265	2690,52
7065	2701,76	8521	2688,67
7281	2699,62	8667	2687,79
		9123	2685,14
		9224	2684,68

c) Stickstoff aus dem Gasometer.

Zur Herstellung möglichst reinen Stickstoffs wurde das Gas der Stickstoffbombe entnommen, durch Waschflaschen mit Pyrogallol in alkalischer Lösung und über glühendes Kupferdrahtnetz zur Absorption etwaigen Sauerstoffs geleitet und im Gasometer aufgefangen. Aus diesem gelangte das Gas durch eine weitere zweckentsprechende Reinigungsapparatur in die Kühlschlange und durch mehrere mit P_2O_5 angefüllte Trockenröhren in die Interferometerröhren. Eine mehrmals nachgeprüfte Zählung in der Standardlinie 5875 Å.-E. ergab: 220,20 Streifen bei 716,83 mm Hg und 19,47° C Röhrentemperatur. Der Ausdehnungskoeffizient wurde nach Jolly zu 0,0036750 gewählt.

Tabelle VII veranschaulicht den ganzen Dispersionsverlauf, dem rechnerisch die Formel zugrunde liegt:

$$(n_0 - 1)\cdot 10^7 = 2907{,}27 + \frac{22{,}65}{\lambda^2} .$$

Die gute Übereinstimmung mit den nach der Scheelschen Interpolationsformel:

$$(n_0 - 1)\cdot 10^7 = 2906{,}10 + \frac{22{,}47}{\lambda^2}$$

gerechneten Daten ist augenscheinlich. Mit diesen zeigt sich ein vollkommen paralleler, um die nahezu konstante Wertzu-

Tabelle VII.

Refraktion in Stickstoff. (Aus dem Gasometer).

Wellenlängen	1	2	3	Mittel	berechnet	Differenz beob.-berech.	Scheel berechnet	Cuthbertson berechnet
4388	3024,90	3024,92	3024,86	3024,89	3024,90	− 0,01	3022,80	3027,90
4437	3022,29	3022,37	3022,36	3022,34	3022,28	+ 0,06	3020,20	3025,90
4471	3020,55	3020,53	3020,57	3020,55	3020,55	∓ 0,00	3018,48	3024,60
4713	3009,25	3009,28	3009,22	3009,25	3009,23	+ 0,02	3007,25	3016,40
4921	3000,72	3000,74	3000,85	3000,77	3000,79	− 0,02	2998,85	3010,50
5015	2997,53	2997,56	2997,53	2997,54	2997,30	+ 0,24	2995,42	3008,00
5047	2996,15	2996,11	2996,18	2996,13	2996,16	− 0,03	2994,29	3007,10
5875	2972,94	2972,91	2972,85	2972,90	2972,88	+ 0,02	2971,19	2990,60
6678	2958,04	2958,04	2957,98	2958,02	2958,06	− 0,04	2956,48	2980,20
7065	2952,61	2952.64	2952,62	2952,63	2952,65	− 0,02	2951,10	2976,30
7281	2950,02	2950,03	2949,98	2950,01	2949,99	+ 0,02	2948,48	2974,00
7030	2953,11	2953,10	3953,12	2953,11	2953,10	+ 0,01	2951,57	2976,60
7067	2952,62	2952,60	2952,58	2952,60	2952,62	− 0,02	2951,09	2976,80
7147	2951,61	2951,63	2951,59	2951,61	2951,61	+ 0,00	2950,09	2975,60
7273	2950,00	2950,14	2950,13	2950,09	2950,09	+ 0,00	2948,58	2974,50
7383	2948,82	2948,84	2948,86	2948,84	2948,81	+ 0,03	2947,31	2973,60
7635	2946,15	2946,12	2946,15	2946,14	2946,12	+ 0,02	2944,65	2971,70
7723	2945,19	2945,21	2945,14	2945,18	2945,24	− 0,06	2943,77	2971,20
7948	2943,11	2943,12	2943,10	2943,11	2943,12	− 0,01	2941,67	2969,80
8265	9240,42	2940,38	2940,49	2940,43	2940,43	+ 0,00	2939,00	2967,90
8521	2938,44	2938,46	2938,45	2938,45	2938,46	− 0,01	2937,04	2966,50
8667	2937,39	2937,46	2937,38	2937,41	2937,42	− 0,01	2936,01	2965,20
9123	2934,36	2934,42	2934,50	2934,43	2934,48	− 0,05	2933,10	2963,70
9224	2933,78	2933,84	2933,83	2933,80	2933,88	− 0,08	2932,51	2963,30

nahme von 1,6 Einheiten erhöhter Dispersionsgang, während die aus:

$$(n_0 - 1) = \frac{5{,}0345 \cdot 10^{27}}{17095 \cdot 10^{27} - n^2}$$

erhaltenen Resultate Cuthbertsons besonders nach dem Ultraroten hin stark gesteigerte Abweichungen erkennen lassen.

Loria[1]) gibt in tabellarischer Übersicht 5 schlecht miteinander übereinstimmende Meßreihen in Stickstoff; so gering ist die Anzahl der voneinander unabhängigen diesbezüglichen Refraktionsmessungen. In teilweise gutem Einklang mit Cuthbertsons Daten sind die von J. Koch beobachteten Resultate.

d) Stickstotf in Bombe.

Wie bei Sauerstoff wurden auch für Stickstoff einige Messungen an dem der Stahlbombe direkt entnommenen Gas durchgeführt. Dieses gelangte aus der Bombe durch die Kühlschlange und Trockenröhren in dem Jaminschen Apparat. Die Zählung in der gelben Linie ergab bei: $p_0 = 765{,}10$ und $t_i = 18{,}67^0$ C 238,1 Streifen. Als Ausdehnungskoeffizient wurde wieder 0,003675 angenommen.

Tabelle VIII gibt nur die beobachteten Mittelwerte sämtlicher Messungen. Dieses Versuchsgas stammte aus demselben Werk wie der technische Sauerstoff und enthielt nach den gasanalytischen Angaben 99,5—99,9 proz. reinen Stickstoff. Unter der Annahme, daß die Bombe neben Stickstoff noch geringe Mengen von Sauerstoff aufweise, ergab die Anwendung der Mischregel auf vorliegende Refraktionswerte in guter Übereinstimmung mit der Gasanalyse einen Gehalt von 99,5 Proz. Stickstoff und 0,5 Proz. Sauerstoff in der Bombe. Dementsprechend zeigt die folgende Tabelle einen durchweg guten Dispersionsgang, der, in den Absolutwerten um die nahezu konstante Größe von 1,3 Einheiten gegenüber den in Tabelle VII gegebenen Daten erniedrigt, demjenigen in Stickstoff aus dem Gasometer parallel läuft.

---

1) St. Loria, Die Lichtbrechung in Gasen als physikalisches und chemisches Problem. Sammlung Viehweg, Heft 4. S. 47. 1914.

Tabelle VIII.

Wellenlänge	Mittelwerte	Wellenlänge	Mittelwerte
4388	3023,54	7030	2951,74
4437	3020,89	7067	2951,30
4471	3019,15	7147	2950,28
4713	3007,88	7273	2948,70
4921	2999,39	7383	2947,48
5015	2995,92	7635	2944,81
5047	2994,83	7723	2943,92
5875	2971,53	7948	2941,85
6678	2956,70	8265	2939,10
7065	2951,32	8521	2937,10
7281	2948,61	8667	2936,06
		9123	2933,14
		9224	2932,49

e) Kohlensäure.

Für die Messungen an Kohlensäure wurde das Gas einer Stahlbombe entnommen und in der beschriebenen Weise in die Interferometerröhren geleitet. Die provisorische Zählung der bei $p_0 = 762{,}11$ mm Hg $t_i = 19{,}19^0$ C. für die Linie 5875,64 Å.-E. durchgewanderten Streifen ergab 357,74; für α wurde der Wert von Chappuis: 0,003716 gewählt.

Die erhaltenen Werte können in dem beobachteten Intervall gut durch die Formel dargestellt werden:

$$(n_0 - 1)\cdot 10^7 = 4406{,}97 + \frac{29{,}584}{\lambda^2}$$

und sind in Tabelle IX wiedergegeben.

Die Werte von C. u. M. Cuthbertson[1]) entstammen ihrer neuesten Arbeit über Kohlensäure und sind aus der dort angegebenen Dispersionsformel:

$$(n_0 - 1) = \frac{6{,}2144\cdot 10^{27}}{14097\cdot 10^{27} - n^2}$$

berechnet.

Mit den ebenfalls sehr zuverlässigen Messungen von J. Koch[2]) stimmen die hier mitgeteilten auch sehr gut überein. Es handelt sich um vier Werte:

---

1) C. u. M. Cuthbertson, Proc. of the Roy. Soc. of London A. 97. 1920.

2) J. Koch, Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 8. 20. 1912.

λ	$(n_0 - 1) \cdot 10^7$	
	Koch	Stoll
4359	4563	4562,7
5461	4506	4506,2
5896	4492	4492,1
6708	4471	4472,7

V. Die Genauigkeit der Messungen.

Es erübrigt noch, einiges über die in der vorliegenden Arbeit erreichte Genauigkeit zu sagen.

Die der Messung zugrunde liegende Refraktionsgleichung lautete:

$$(n_0 - 1) = \frac{N \cdot \lambda}{p_0 \cdot L} \cdot 760 \cdot (1 + \alpha t) \cdot$$

Daraus ergibt sich die Fehlergleichung:

$$\frac{d n_0}{n_0 - 1} = \frac{d N}{N} + \frac{d p}{p} + \frac{d L}{L} + \frac{d t}{1 + \alpha t} \cdot$$

Nun sind die abgeschätzten *maximalen* Beobachtungsfehler der einzelnen Größen:

$d N = 0{,}01$, $N =$ ca. 200, $d p = 0{,}02$, $p =$ ca. 730,
$d L = 0{,}02$, $L = 500$, $d t = 0{,}02$, $t = 18^\circ$ C

somit beträgt der maximale Fehler einer Einzelmessung:

$$\boxed{d n_0 = 5 \cdot 10^{-8} \cdot}$$

Der durchschnittliche Gesamtbeobachtungsfehler in der Absolutbestimmung der Brechungsexponenten ist somit: $4 - 5 \cdot 10^{-8}$; d. h. die erhaltenen Resultate sind richtig bis auf: *4—5 Einheiten in der achten Dezimale.* In der relativen Wertebestimmung beträgt der Beobachtungsfehler, da dann der Beobachtungsfehler in der Längenbestimmung wegfällt, im Maximum: $2{,}9 \cdot 10^{-8}$, d. h. 0,01%. Damit stimmt die hier erreichte Genauigkeit mit der von anderen Beobachtern gewonnenen gut überein. W. Traub bekommt gleichfalls: 0,01% in der Relativbestimmung, während J. Koch den mittleren Beobachtungsfehler seiner Relativbestimmungen auf weniger als 0,01% angibt. Den Absolutwert bestimmt Koch in seinen

Tabelle IX.

Refraktion in Kohlensäure in Bombe.

Wellenlängen	1	2	3	4	Mittel	berechnet	Differenz beob.-ber.	Cuthbertson
4388	4560,78	4560,71	4560,73	4560,78	4560,75	4560,61	+ 0,14	4559,4
4437	4557,19	4557,18	4557,15	4557,24	4557,19	4557,19	+ 0,00	4556,0
4471	4554,69	4554,72	4554,67	4554,72	4554,70	4554,93	− 0,23	4553,7
4713	4540,22	4540,21	4540,25	4540,16	4540,21	4540,15	+ 0,06	4538,7
4921	4529,30	4529,38	4529,28	4529,30	4529,32	4529,09	+ 0,23	4527,8
5015	4524,86	4524,89	4524,84	4524,85	4524,88	4524,65	+ 0,23	4523,2
5047	4523,28	4523,30	4523,30	4523,32	4523,30	4523,07	+ 0,23	4521,5
5875	4492,98	4493,05	4492,95	4492,94	4492,98	4492,66	+ 0,32	4491,5
6678	4473,16	4473,08	4473,16	4473,12	4473,13	4473,31	− 0,18	4472,3
7065	4465,93	4465,92	4465,99	4465,92	4465,94	4466,24	− 0,30	4465,3
7281	4462,74	4462,72	4462,71	4462,74	4462,73	4462,76	− 0,03	4462,1
7030	4466,69	4466,60	4466,66	—	4466,65	4466,83	− 0,18	4466,0
7067	4465,95	4465,94	4466,05	—	4465,98	4466,20	− 0,22	4465,0
7147	4464,87	4464,86	4464,88	—	4464,87	4464,89	− 0,02	4464,0
7273	4462,87	4462,75	4462,74	—	4462,79	4462,90	− 0,11	4462,8
7383	4461,11	4461,07	4461,09	—	4461,09	4461,23	− 0,14	4460,5
7635	4458,02	4457,87	4458,08	—	4457,99	4457,72	+ 0,25	4457,0
7723	4456,69	4456,76	4456,80	—	4456,75	4456,56	+ 0,19	4456,1
7948	4453,64	4453,70	4453,61	—	4453,65	4453,80	− 0,15	4453,5
8265	4450,34	4450,46	4450,28	—	4450,36	4450,28	+ 0,08	4450,0
8521	4447,80	4447,62	4447,53	—	4447,65	4447,41	+ 0,24	4447,4
8667	4446,07	4446,14	4446,28	—	4446,16	4446,25	− 0,09	4446,23
9123	4442,29	4442,34	4442,42	—	4442,34	4442,52	− 0,18	4442,4
9224	4441,37	4441,50	4441,48	—	4441,45	4441,74	− 0,23	4441,4

Dispersionsmessungen im Ultravioletten nicht genau. Auch Scheel gibt den mittleren Beobachtungsfehler seiner Refraktionsbestimmungen nicht an; die maximale Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung beträgt bei ihm: $2 \cdot 10^{-7}$. C. und M. Cuthbertson, die in ihrer neuesten Publikation über Kohlensäure nach der Jaminschen Interferometermethode arbeiteten und für die grüne Hg-Linie 5461 Å.-E. 4 Doppelexperimente jeweils bei zu- und abnehmendem Drucke ausführten, erreichten für den Refraktionswert einen Genauigkeitsgrad von 0,08%. Meggers und Peters bestimmen den Gesamtbeobachtungsfehler ebenfalls nicht genau; derselbe dürfte aber den von Cuthbertson angegebenen wohl noch übersteigen; den wahrscheinlichen Fehler zwischen Beobachtung und Rechnung geben sie folgendermaßen an:

Bei den Messungen	0° C zu 3,8	Einheiten im Werte der Refraktion: $(n_0 - 1) \cdot 10^7$.
„ „ „	15° C zu 3,1	
„ „ „	30° C zu 2,9	

VI. Zusammenfassung.

In vorliegender Arbeit wurden Refraktionsmessungen in Luft und deren Hauptkomponenten nach der Jaminschen Methode im Spektralgebiet: 4388—9224 Å.-E. ausgeführt.

Die für reine „Gartenluft" gefundenen Werte lassen sich sehr gut durch die Interpolationsformel:

$$\left(n_0 - 1\right)_{0^\circ}^{760} \cdot 10^7 = 2871{,}87 + \frac{16{,}170}{\lambda^2} \cdot \qquad (\lambda \text{ in } \mu)$$

darstellen. Ihre Umrechnung auf 15° C und 760 mm Hg gestattet, eine Tabelle aufzustellen für Wellenlängenreduktion auf das Vakuum.

Der kleine Unterschied, der für die Refraktionswerte in „Laboratoriumsluft" und „Gartenluft" gefunden wurde, fällt für diese Umrechnung außer Betracht.

Die Resultate für Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure sind, soweit sich Vergleiche anstellen lassen, in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Autoren.

Die in den Messungen erreichte Genauigkeit von $(n_0 - 1)$ beträgt für die Absolutbestimmung ca. 0,02%, für die Relativbestimmungen (Dispersionsmessung) ca. 0,01%.

Ein Teil der in vorliegender Arbeit benötigten Apparate war aus Mitteln der *Stiftung für wissenschaftliche Forschung an der Universität Zürich* beschafft. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. Edgar Meyer für die gütige Überlassung der Instrumente und sein stets bereitwilliges Entgegenkommen in jeder meine Arbeit betreffenden Angelegenheit herzlich zu danken. Insbesondere spreche ich Hrn. Privatdozent Dr. K. W. Meissner für die Anregung zu dieser Arbeit und seine reiche Unterstützung, die er mir während meiner ganzen Arbeitszeit in so freundlicher Weise zuteil werden ließ, meinen herzlichen Dank aus.

Zürich, Physikalisches Institut der Univ., Juni 1922.

(Eingegangen 19. Juni 1922.)

2. *Über die Diffraktion Hertzscher Wellen in einem Raumgitter;*

von N. Kapzov.

(In der Sitzung der Moskauer Lebedewschen Physikalischen Gesellschaft am 23. Dezember 1920 vorgetragen.)

Seitdem die ersten Kristallröntgenogramme von M. Laue erhalten sind und das Röntgenstrahlenspektrometer von Vater und Sohn Braggs erbaut worden ist, ist das Raumgitter — aus den Atomen oder Ionen eines Kristalls bestehend — ein ebenso wichtiges Mittel der Spektralanalyse geworden wie das gewöhnliche flache oder konkave Gitter. Deshalb scheint es von Interesse zu sein, ein Raumgitter von sichtbaren Dimensionen zu erbauen und experimentel das Studium der Diffraktionserscheinungen in solch einem Gitter bei verschiedener Beschaffenheit und Form der Gitterelemente und verschiedener Gitterstruktur vorzunehmen.

Hr. Prof. W. Romanoff hat mir vorgeschlagen die Diffraktion der kurzen Hertzschen Wellen in einem Raumgitter zu studieren und den Versuch zu machen experimentell nachzuweisen, daß die Diffraktion der elektromagnetischen Wellen in einem räumlichen Resonatorengitter ein Bild ergibt, welches analog den Erscheinungen ist, die beim Durchdringen der Röntgenstrahlen durch ein Kristall stattfinden.[1])

1. Die Versuchsanordnung und die Apparate.

Im Fokus eines sphärischen Metallspiegels S (Fig. 1) — Öffnung 60 cm, Radius 54 cm — befindet sich der Vibrator O. Das parallele Strahlenbündel, welches vom Spiegel gegeben

---

1) Daß es „möglich sein dürfte", zu diesen Erscheinungen „ein elektromagnetisches Analogon nachzuweisen", weist schon K. F. Lindman in Ann. d. Phys. 45. S. 603. (1914) nach.

wird, ist durch das Diaphragma D abgegrenzt und fällt, nachdem es vom Raumgitter G abgelenkt oder „reflektiert" worden ist, auf die Glaslinse L. Im Fokus dieser Linse befindet sich der Resonator R, welcher mit einem mit dem Galvanometer T verbundenen Thermoelement versehen ist.

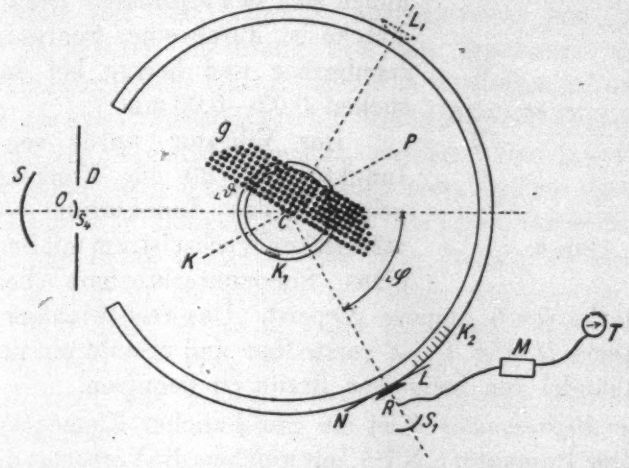


Fig. 1.

Das Gitter G und die Linse L sind um die Vertikalachse C drehbar aufgestellt, und ihre jeweiligen Langen werden an den in Grade eingeteilten Kreisen K_1 und K_2 abgezählt. Durch die Ablesung der Galvanometerausschläge bei verschiedenen Lagen des Gitters G und der Linse L wird die Richtung und die relative Intensität der vom Gitter G abgelenkten oder „reflektierten" Strahlen ermittelt, welche verschiedenen Einfallswinkeln zwischen primärem Strahlenbündel und Gitter entsprechen.

Um die Wellenlänge λ unabhängig von der Beobachtung der Diffraktionserscheinungen im Gitter zu messen, wurde ein Paar Boltzmannsspiegel[1]) S_3 (Fig. 2) im Wege des primären parallelen Stahlenbündels aufgestellt. Das von den Spiegeln S_3 reflektierte Stahlenbündel wurde mittels des flachen Spie-

1) L. Boltzmann Wied. Ann. 40. S. 349 (1890); J. Klemenčič und P. Czermak, Wied. Ann. 50. S. 174. 1893.

gels S_2[1]) auf die Linse L geworfen. In ähnlicher Weise war es möglich die Wellenlänge in einem Strahlenbündel zu messen, welches vom Gitter „reflektiert" wurde, bevor es die Boltzmannspiegel traf.

Die Elektroden *des Vibrators* (je 3 mm lang und 2 mm Durchmesser) sind aus reinem Wolframdraht[2]) angefertigt und befinden sich in Petroleum. Die Funkenstrecke ist durch einen Schraubengang regulierbar und betrug bei den Versuchen 0,02—0,03 mm.[3])

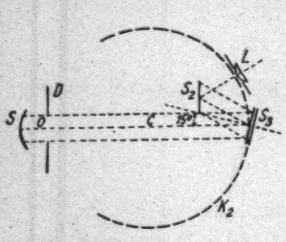


Fig. 2.

Der Vibrator wurde von einem Induktorium (30 cm Funkenstrecke) geladen, das Induktorium — vom städtischen Wechselstrom mit Benutzung eines Simonunterbrechers bei einer Stromstärke von 5 Ampere gespeist. Das rechtwinklige Metalldiaphragma D (Fig. 1) ist verstellbar und erlaubt ein paralleles Stahlenbündel von beliebiger Breite zu benutzen.

Der Meßresonator R ist ein gewöhnlicher Klemenčičresonator.[4]) Der Resonator („N 7"), mit welchem die Versuche, die durch die Tabellen I—IV und die Figg. 8 und 9 dargestellt sind, gemacht worden sind, hatte eine (volle) Länge von 9 mm bei 1,3 mm Durchmesser und einem Abstande zwischen den beiden Resonatorenhälften von 1,6 mm.[5]) Die dünnen Drähte des Thermoelements sind zweimal[6]) umeinander gewunden. Die Resonatorenhälften sind an einem Ebonitstäbchen mittels Schellack angekittet.

Das du Bois Rubenssche *Panzergalvanometer* ist bis zu

---

1) Die Spiegel S_2 (50 × 64 cm) und S_3 (jeder 55 × 28 cm) sind: Spiegelglas mit Stanniol beklebt.

2) Wolframelektroden verursachen eine sehr schöne Konstanz der Wirkung des Vibrators wie die Untersuchung von W. Romanoff, Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges. 50. S. 70. 1918. gezeigt hat.

3) Vgl. W. Arkadiew ebenda 4. S. 165. 1912.

4) J. Klemenčič, Wied. Ann. 43. S. 413. 1898.

5) Es wurde *ein* Resonator aus zwei Hälften bestehend benutzt nach K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 7. S. 833. 1902 u. W. Arkadiew, Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges. 45. S. 48. 1912; Ann. d. Phys. 45. S. 135. 1914.

6) Nach K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 4. S. 617. 1901.

einer Schwingungsdauer (Halbperiode) von 4 sec astasiert und zeigt eine Empfindlichkeit von $4{,}4 \times 10^{-10}$ Amp. pro Millimeter Skalenteil bei 1 m Skalenabstand.

Um die Wirkung der Schwingungen großer Periode die in der sekundären Windung des Induktoriums und in verschiedenen Teilen dér Primärleitung entstehen können, ebenso wie die Wirkung der vom Vibrator ausgestrahlten und dann im Zimmer zerstreuten Strahlung auf den Resonator und das System Thermoelement Galvanometer zu vermeiden, ist nach der von W. Romanoff ausgearbeiteten Methode[1]) eine doppelte Abschirmung der Apparate benutzt worden. Das Induktorium (nebst Rheostat) befindet sich in einer metallischen Hülse: das ganze System der Zuleitungen vom Thermoelement bis zum Galvanometer nebst letzterem und dem Ballast Wiederstandmagazin M (Fig. 1) ist ebenso von einer metallischen Hülle umhüllt. Auf diese Weise sind die „Restausschläge" gänzlich eliminiert; wenn der Weg durch die Linse L den Wellen versperrt ist, zeigt das Galvanometer bei Stromschließung gar keinen Ausschlag.

Die Glaslinse L ist längst dem Kreise K_2 auf einem Wagen (Fig. 3) der über mehrere zusammengerückte und horizontal eingestellte Tische rollt verschiebbar.[2]) Der sphärische Spiegel S_1 (Radius 21 cm), der den Resonator R in seinem Zentrum hat, verstärkt die Wirkung der Strahlen auf letzteren auf etwa 7 Proz. Dicht vor der Linse L ist der Ekran N 80×80 cm mit einer kreisförmigen Öffnung von 29 cm Durchmesser aufgestellt. N wird von demselben Wagen wie die Linse L getragen.

Das Thermoelement ist gegen Luftzüge im Zimmer und gegen Erwärmung durch Wärmestrahlen durch eine doppelte Kartonhülse geschützt.

Das Raumgitter, mit welchem die weiter unten beschriebenen Versuche ausgeführt worden sind, ist in Perspektive

1) W. Romanoff, Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges. 50. S. 98. 1918. Ann. d. Phys. 40. S. 284. 1913.

2) Nach der Versuchsanordung von O. Bartenstein, Ann. d. Phys. 29. S. 204. 1909; siehe ebenda über das Fokussieren der Glaslinse für elektrische Wellen.

durch die schematische Fig. 4 dargestellt. Die Gitterelemente sind hohle Zylinder r aus Kupfer 12 mm lang und 3 mm Durchmesser, welche in vertikaler Lage auf Leinenfäden aufgehängt sind. Durch Verschieben der Holzstangen B ist es

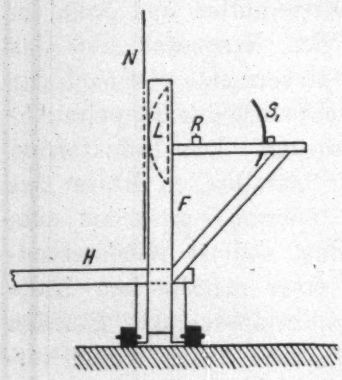


Fig. 3.

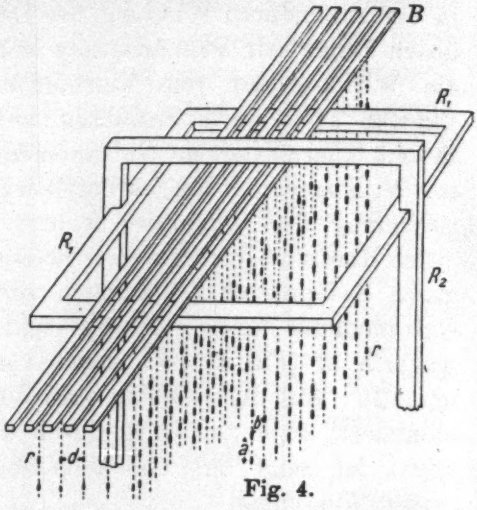


Fig. 4.

möglich, den Abstand zwischen zwei Nachbarschichten oder „die Periode" d des Gitters zu variieren. Die Mittelpunkte der Gitterelemente befinden sich in den Ecken eines Systems sich berührender rechtwinkliger Parallelepipede, die Vertikalrippen $a = 4$ cm und Horizontale — $b = 4{,}5$ cm (in der Richtung der Breite des Gitters) und d (in der Richtung der Tiefe des Gitters) je nach der Einstellung haben.[1])

II. Die Versuche.

Es wurde immer der erste Ausschlag des Galvanometers abgelesen. Alle Intensitätsmessungen fanden mit Benutzung der Methode der abwechselnden Ablesungen statt.[2]) Die Konstanz der Wirkung des Wolframvibrators erlaubt es eine kleine Zahl von Ablesungen (3—5) für die Ermittelung jedes einzelnen Kurvenpunktes zu benutzen.

Bei den Versuchen, welche zur Messung der Wellenlängen dienten, blieb der obere der Boltzmannspiegel fest, der untere wurde durch einen Schraubengang verschoben, λ wurde aus

1) Das Gitter bestand im ganzen aus 2108 Elementen.

2) Siehe W. Arkadiew, Ann. d. Phys. 45. S. 139, 141 u. 142. 1914.

dem Abstande zwischen der ersten Minimalstellung dieses Spiegels und den folgenden Maxima und Minima berechnet.[1])

Die Kurven der Figuren 5 und 6 zeigen, wie scharf sich die Richtung eines Strahlenbündels bei den Diffraktionsversuchen

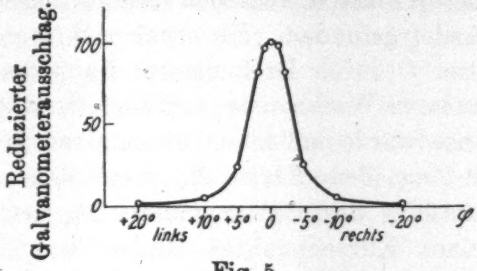


Fig. 5.

kundgab und mit welcher Genauigkeit man diese Richtung bestimmen konnte; Fig. 5 für den direkten Strahlenbündel und Fig. 6 für einen vom Gitter „reflektierten" Strahl. In diesen Kurven geben die Abszissen die Stellung der Linse L auf dem

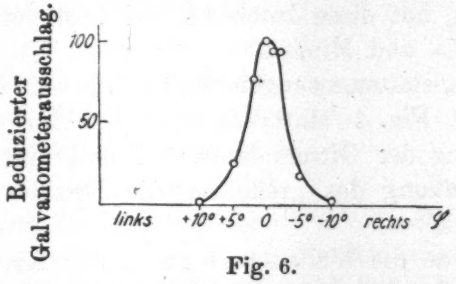


Fig. 6.

Kreise K_2, auf die Strahlenbündelachse als Null bezogen an. Die Ordinaten sind die dazugehörigen Galvanometerausschläge, auf den Maximalausschlag wie auf 100 bezogen. Wie aus Fig. 5 und 6 ersichtlich ist kann die Richtung eines Strahlenbündels leicht bis zu 1° bestimmt werden.

Die Versuche mit Hertzschen Wellen von etwa 3 cm Länge und mit dem beschriebenen Raumgitter wurden in nächstfolgenden Richtungen geführt:

1. Das Gitter G wurde so aufgestellt, daß die Fläche der ersten Schicht durch die Achse C (Fig. 1) ging und die Richtung des primären Strahlenbündels mit dieser Fläche den

1) S. Z. B. N. Andreew, „Die elektrischen Schwingungen und ihre Spektra". Dissertation Moskau 1917 (russisch).

„Gleitungswinkel“ ϑ bildete. Durch Verschiebung der Linse L auf dem Kreise K_2 wurde die Stellung der Linse bestimmt bei welcher der Maximalausschlag bei gegebenem Winkel ϑ stattfand. So wurde die Richtung des „reflektierten“ Strahlenbündels und der Winkel φ zwischen dieser Richtung und dem Primärstrahlbündel gefunden. Es ergab sich $\varphi = 2\vartheta$. Dann wurde das Gitter C durch Drehung des Rahmens R_2 (Fig. 4) unter einem anderen Winkel zum primären Strahlenbündel gestellt. Die Linse wurde auf einen zweimal so großen Winkel wie das Gitter längs dem Kreise K_2 verschoben und es wurde wieder der Ausschlag des Galvanometers abgelesen. Bei der Ermittelung eines Kurvenpunktes fanden die Galvanometerablesungen bei den zu diesem Punkte gehörenden Winkeln ϑ und φ abwechselnd mit den Ablesungen bei je ein und demselben ϑ_0 und φ_0 Platz. Auf diese Weise wurde die relative Intensität des reflektierten Strahlenbündels bei verschiedenen „Gleitungswinkeln“ ϑ gemessen. Wie die Kurven der Figuren 8 und 9 zeigen, hat diese Intensität bei veränderlichem ϑ bestimmte Maxima und Minima.

Diese Intensitätsmessungen fanden wie mit der Versuchsanordnung der Fig. 1 statt, so auch bei der dazu symmetrischen Stellung der Gitters längs KP und der Linse in L_1, also mit Ablenkung des „reflektierten“ Strahles nach rechts statt nach links.[1])

2. Es wurde die Wellenlänge im „reflektierten“ Strahlenbündel bestimmt, indem der Gleitungswinkel ϑ dem ersten Intensitätsmaximum des reflektierten Strahlenbündels entsprach, und man diesen Strahl auf die Boltzmannspiegel fallen ließ.

3. Es wurde die Intensität eines Strahlenbündels, das von einem aus nur einer einzigen Schicht bestehenden Gitter bei verschiedenen Winkeln ϑ reflektiert wurde, mit der Intensität des primären ungestört die Linse treffenden Strahlenbündels verglichen. Ebenso wurde die relative Intensität des reflek-

1) Die Kurvenpunkte welche bei gleichem ϑ rechts und links ermittelt sind, fallen nahe nebeneinander. Hieraus ist es erlaubt zu schließen, daß ein möglicherweise stattfindendes Durchbiegen der Tischdecke und andere ähnliche Ursachen, die hier wirken könnten, nur einen geringen Einfluß auf die Versuchsergebnisse auszuüben vermochten. Zur Weiterführung dieser Versuche wird jetzt ein spezielles Spektrometer erbaut.

tierten Strahles bei einem aus 2, 3 usw. Schichten bestehenden Gitter bestimmt, wobei das Gitter den dem ersten Maximum entsprechenden Winkel ϑ mit dem primären Strahlenbündel bildete. Schließlich wurde auch die relative Intensität des Strahlenbündels, welches bei derselben Lage des Gitters und der Schichtenzahl 1, 2, 3, usw. das Gitter, ohne abgelenkt zu sein durchsetzte, gemessen.

Alle diese Beobachtungen wurden bei verschiedenem Abstande d zwischen den Gitterschichten wiederholt.

4. Was die Strahlenbündel betrifft, welche von den inneren Flächen des Raumgitters (z. B. den Flächen parallel AB — Fig. 7) reflektiert sein könnten und den Flecken auf Laues Photogrammen entsprechen würden — während die Versuchsanordnung der Fig. 1 dergleichen bei Braggs Spektrometer entspricht —, so konnten solche Beobachtungen mit dem oben beschriebenen Gitter nicht gemacht werden wegen der starken Absorption, welche die äußeren Gitterelemente auf solch ein Strahlenbündel ausübten, zu der noch die geringe Intensität dieses Bündels hinzukam, die ihren Grund in der kleinen Zahl der Elemente jeder Fläche AB hatte. Wenn die äußeren Gitterelemente allmählich entfernt wurden, zeigte das Galvanometer einen wachsenden Ausschlag, welcher der Richtung des in Frage stehenden Strahlenbündels entsprach; und wenn endlich alle Gitterelemente, welchen in Fig 7 Punkte oberhalb AB entsprechen, entfernt waren, so daß AB zu einer „Grenzfläche" des Gitters wurde, so wurde der Strahl welcher von den AB parallelen Flächen reflektiert war, deutlich wahrnehmbar, und das Maximum seiner Intensität fand bei einem Gleitungswinkel ϑ_1 statt, welcher dem Abstande zwischen diesen Flächen entsprach.[1])

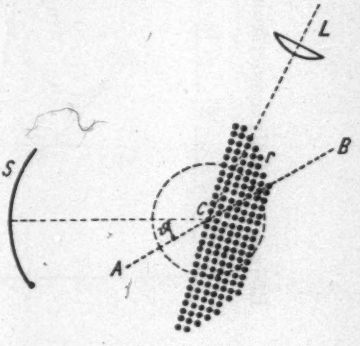


Fig. 7.

1) Vermutlich wird ein Gitter aus Elementen die nicht zu nahe in Resonanz mit der auffallenden Welle stehen werden, diese starke Absorption zu vermeiden gestatten.

III. Die Versuchsergebnisse.

Figg. 8 und 9 stellen die Intensitätskurven des „reflektierten" Strahlenbündels bei variierendem Gleitungswinkel ϑ dar. Fig. 8 entspricht einem Gitter aus sieben Schichten mit den Konstanten $a = 4$ cm, $b = 4{,}5$ cm und der Gitterperiode $d = 4{,}5$ cm. Die Kreise stellen Punkte, welche der rechten Seite der Apparatur (Fig. 1) entsprechen, schwarze Punkte der linken dar.[1]) Die gestrichelte Kurve II gibt die Intensität desselben Strahlenbündels, wenn es von einem aus nur einer einzigen Schicht

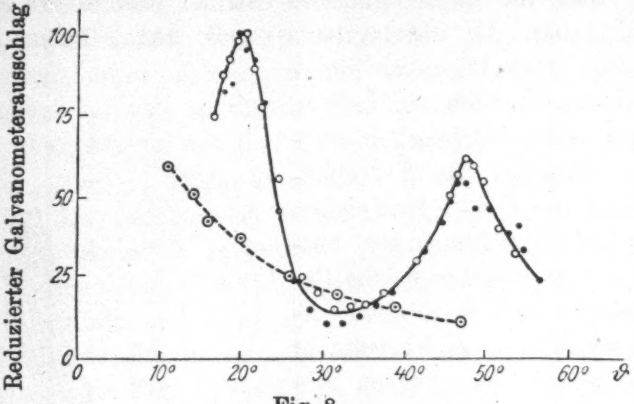


Fig. 8.

bestehenden Gitter reflektiert wurde, an. Nächstfolgende Tab. I gibt die Stellen der Maxima und Minima der Intensitätskurven an und enthält in der letzten Kolonne die Wellenlänge λ, wie letztere, diesen Maxima und Minima gemäß, nach der Formel von Bragg und Wulf: $n\lambda = 2d \sin \vartheta$ für Maxima und $\frac{2n-1}{2}\lambda = 2d \cdot \sin \vartheta$ für Minima sich ergibt.

Tabelle I.

$d = 4{,}5$ cm. $D = 40$ cm.

	ϑ in Grad	λ cm
I. Maximum	20	3,1
II. Minimum	32	3,2
II. Maximum	47,5	3,3

1) Gegen Null sind die Kurven, ohne das erste Minimum zu erreichen, abgebrochen, weil das Gitter bei $\vartheta < 14^0$ die ganze Breite des Strahlenbündels $D = 40$ cm nicht mehr umfaßt.

Die Kurve der Fig. 9 entspricht einem Gitter aus sechs Schichten mit den Konstanten $a = 4$ cm, $b = 4{,}5$ cm und der „Periode“ $d = 6$ cm, bei einer Breite des Primärstrahlenbündels $D = 35$ cm.

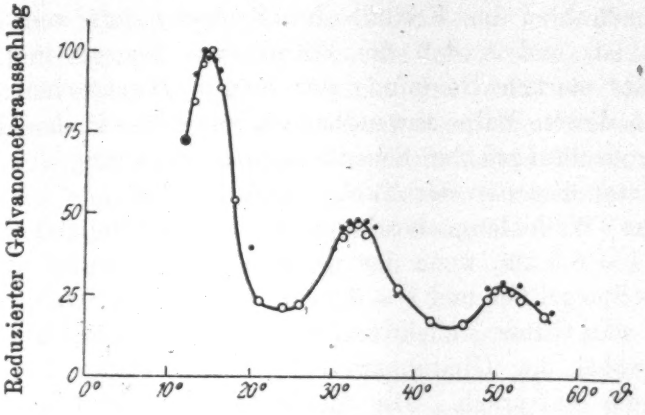


Fig. 9.

Tab. II gibt die Lage der Maxima und die Wellenlänge nach Bragg-Wulfs Formel an.

Tabelle II.

$d = 6$ cm. $D = 35$ cm.

	ϑ in Grad	λ cm
I. Maximum	14,5	3,0
II. Maximum	33	3,3
III. Maximum	51	3,1

Der Versuch mit dem Strahlenbündel, das von den Flächen AB der Fig. 7 „reflektiert“ wurde, ergab $\vartheta_{\text{Max.}} = 31{,}5^0$ und hieraus, da die gegenseitige Entfernung zweier benachbarten AB parallelen Flächen $d_1 = d \cos 45^0 = 3{,}2$ cm betrug, $\lambda = 3{,}3$ cm.

Der Mittelwert von λ berechnet sich aus diesen Daten zu

$$\lambda = 3{,}2 \text{ cm}.$$

Die Kurven der Figg. 8 und 9 und die Tabb. I und II erlauben es, den Schluß zu ziehen: 1. daß die Diffraktion der kurzen Hertzschen Wellen in einem Raumgitter, das aus geradlinigen Resonatoren besteht, ein Bild der „Spiegelung" an den Gitterschichten zeigt, welches der Diffraktion der Röntgenstrahlen im Kristall des Spektrometers von Bragg analog ist, und 2. daß die Formel von Bragg und Wulf trotz der starken Dämpfung der kurzen Hertzschen Wellen auch in diesem Falle anwendbar ist, wie es die in den Grenzen der Beobachtungsfehler liegende Übereinstimmung der Zahlen der letzten Kolonne der Tabb. I und II zeigt.

Die Wellenlängenbestimmung mittels Boltzmannspiegel ergab $\lambda = 3{,}5$ cm, wenn das primäre Strahlenbündel ungestört auf die Spiegel fiel, und $\lambda = 3{,}2$ cm, wenn dieses Strahlenbündel zuerst vom Gitter „reflektiert" wurde und dann erst die Spiegel traf, wobei der Gleitungswinkel ϑ dem ersten Intensitätsmaximum entsprach. Die Resonatoren, welche die Gitterelemente bilden, besitzen naturgemäß eine viel kleinere Dämpfung, als der Vibrator (wegen der Funkenstrecke des letzteren) und als der Meßresonator R (wegen dem Widerstande der dünnen Drähte des Thermoelements). Bei den Diffraktionserscheinungen sind diese Gitterelemente als Oszillationszentra zu betrachten, die miteinander interferierende Wellen aussenden. Deshalb ist es wahrscheinlich, daß bei der Beobachtung dieser Erscheinungen mittels des Meßresonators R die Eigenperiode der Gitterelemente auf das Resultat der Messung eine merkliche Wirkung ausübt, und hier die Ursache liegt, weshalb die Bestimmung von λ aus den Kurven der Figg. 8 u. 9 und mittels Boltzmannspiegel im reflektierten Strahle den übereinstimmenden Wert 3,2 cm ergibt, während die Bestimmung im direkten Strahlenbündel den etwas abweichenden Wert 3,5 cm liefert.

Tab. III gibt die Resultate der Intensitätsbeobachtung bei verschiedener Schichtenzahl des Gitters an, für ein vom Gitter im ersten Maximum reflektiertes Strahlenbündel und zugleich den Vergleich dieser Intensität mit der Intensität des Strahlenbündels, welches zu gleicher Zeit das Gitter, ohne abgelenkt zu werden, durchsetzt. N bezeichnet die Zahl der Gitterschichten, P den „reduzierten" Galvanometerausschlag

beim „reflektierten“, Q beim „durchgegangenen“ Strahl. Der Galvanometerausschlag, welcher dem primären direkt die Linse treffenden Strahlenbündel entspricht, ist dabei gleich 100 gesetzt worden. Es stellt also P das in Prozenten ausgedrückte „Reflexionsvermögen“, Q das „Durchlässigkeitsvermögen“ des Gitters dar. Tab. IV gibt die Resultate der gleichen Messungen für ein Gitter an, dessen Elemente weitere Abstände voneinander hatten: in jeder Schicht des oben beschriebenen Gitters war die Hälfte der Vertikalreihen der Gitterelemente entfernt, so daß der Abstand b zwischen zwei Vertikalreihen jetzt 9 cm wurde, der Abstand a zweier horizontaler Reihen in einer Schicht blieb 4 cm, die Gitterperiode war 6 cm.

Tabelle III.

$d = 4{,}5$ cm. $\vartheta = 20°$. $D = 40$ cm.
$b = 4{,}5$ cm. $a = 4$ cm.

N	P	Q	$P+Q$
0	—	100	100
1	13,2	53,2	66,4
2	26,4	28,4	54,8
3	33,0	16,3	49,3
4	34,9	11,2	46,1
5	35,1	9,2	44,3

Tabelle IV.

$d = 6$ cm. $\vartheta = 14{,}5°$. $D = 35$ cm.
$b = 9$ cm. $a = 4$ cm.

N	P	Q	$P+Q$
0	—	100	100
1	7,5	65,5	73,0
2	10,3	46,5	56,8
3	12,9	31,5	44,4
4	13,1	27,0	40,1

Wie die Tabb. III und IV zeigen, ist die Summe $P+Q$ der Intensitäten des „reflektierten“ und des durch das Gitter ohne Ablenkung durchgegangenen Strahlenbündels kleiner als die Intensität des primären auf das Gitter fallenden Strahlenbündels. Dabei weicht $P+Q$ desto mehr von den 100 Proz. dieser letzteren Intensität ab, je größer die Zahl der Schichten des Raumgitters ist. Hieraus darf geschlossen werden, daß ein aus Resonatoren bestehendes Raumgitter dessen Konstanten a, b und d größer als die Wellenlänge der auf das Gitter fallenden elektromagnetischen Wellen sind, einen merklichen Teil der Energie dieser Wellen „absorbiert“, wenn unter „Absorption“ kurz die Summe der „wahren Absorption“ der

Strahlen und ihrer Schwächung durch Zerstreuung verstanden wird.[1])

Zusammenfassung.

1. Hertzsche Wellen von etwa 3 cm Wellenlänge zeigen in einem Raumgitter, das aus Resonatoren besteht, ein Diffraktionsbild, welches analog der Diffraktion der Röntgenstrahlen im Kristallraumgitter bei der Versuchsanordnung in Braggs Spektrometer ist.

2. Die Formel von Bragg und Wulf $n\lambda = 2d \cdot \sin\vartheta$ ist auch in diesem Falle anwendbar.

3. Ein Raumgitter, dessen Elemente eine Eigenperiode haben, die beinahe der Resonanz mit den einfallenden Hertzschen Wellen entspricht, besitzt eine große „Absorptions-" und „Zerstreuungsfähigkeit".

Diese Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Moskauer Reichsuniversität auf Kosten des Physikalisch-Technischen Reichsinstituts ausgeführt.

Zum Schluß erlaube ich mir meine tiefe Dankbarkeit Hrn. Prof. W. Romanoff für die mir von ihm verschaffte Möglichkeit, experimentell zu arbeiten, das vorgeschlagene Thema und die ständige Führung und Unterstützung bei der Arbeit auszusprechen.

Moskau, im April 1921.

---

1) Wie man es tut, wenn man von „Absorption" der Röntgenstrahlen spricht. Vgl. z. B. B. R. Glocker, Phys. Zeitschr. **19**. S. 68. 1918. Was das Ergebnis anbetrifft, daß die Intensität des Strahlenbündels, welches von einem Gitter, das nur aus zwei Schichten besteht, reflektiert wird, schon 75 Proz. der Intensität, die durch Spiegelung an einem Gitter aus fünf Schichten erhalten wird, beträgt und daß die Intensität des von vier Schichten reflektierten Strahles fast gleich der Intensität des von fünf Schichten reflektierten ist, so ist diese Angelegenheit nicht nur durch die große Absorption der Wellen beim Durchdringen der einzelnen Schichten, sondern auch einfach durch rein geometrische Bedingungen der Versuchsanordnung zu erklären, derenthalber nur wenig Elemente der vierten und desto weniger der fünften Schicht bei der Spiegelung wirksam sein konnten.

(Eingegangen 10. April 1922.)

3. *Über selektive Absorption elektrischer Wellen in Dielektrika;*
von W. Romanoff.

(In der Sitzung der Moskauer Lebedewschen Physikalischen Gesellschaft vorgetragen am 11. März 1917.)

Eines der Mittel, welche eine Erkenntnis der molekularen Eigenschaften der Materie und des Aufbaues der Moleküle und der Atome erlauben, ist die Erforschung ihrer Emissions- und Absorptionsspektra. Damit eine solche Untersuchung fruchtbar sein kann, ist das Studium womöglich aller Teile des elektromagnetischen Spektrums unentbehrlich, da verschiedene Gebiete desselben Schlüsse über diese oder jene Seiten des Lebens der Atome und Moleküle zu ziehen erlauben. Am vollständigsten ist der optische Teil des Spektrums untersucht worden; auch in den benachbarten, dem ultravioletten und dem infraroten Teile des Spektrums besitzen wir genügende Angaben. Unlängst ist das Studium der Spektra im Bereiche der Röntgenstrahlen angefangen worden und wird jetzt mit großem Erfolge weiter entwickelt.

Am schwächsten ist die Untersuchung des elektrischen Teiles des Spektrums sowohl im Gebiete der Hertzschen Wellen, wie auch für längere benachbarte Wellen entwickelt worden. Indessen kann auch dieser Bereich zur Aufklärung der molekularen Eigenschaften der Materie beitragen. Während die Spektrogramme im Gebiete der Röntgenstrahlen die Atomeigenschaften der Materie charakterisieren und die Möglichkeit verschaffen über die Anordnung der Atome im Molekül einer kristallinischen Substanz zu urteilen, während die Spektralbanden im Infraroten die Anordnung einzelner Gruppen im Moleküle charakterisieren — so haben wir alle Rechte zu vermuten, daß die spektralen Untersuchungen in dem Gebiete der Hertzschen Wellen und ebenso in dem Bereiche noch längerer

Wellen die Vervollständigung dieser Kenntnisse fördern werden, und dies insbesondere hinsichtlich der Bildung der komplizierteren molekularen Gruppen und der Solvate.

Die anomale Dispersion und die Absorption der elektrischen Wellen in Dielektriken die von Drude[1]) entdeckt worden ist, zeigt uns im Einklange mit den Arbeiten von Colley[2]), daß wir in den Partikeln der flüssigen und der festen Körper diesen Wellen entsprechende Resonatoren finden können. Die Untersuchungen, welche Colley[3]), Obolensky[4]) und Ivanoff[5]) im Gebiete des elektrischen Spektrums von Flüssigkeiten geführt haben, haben eine Reihe eng zusammengerückter Dispersionsstreifen in allen untersuchten Flüssigkeiten gezeigt. Das Vorhandensein der anomalen Dispersion für Wasser ist weiter von Rukopp[6]) gefunden worden, und Wildermuth[7]) konnte die anomale Absorption im Wasser für kurze Hertzsche Wellen konstatieren. Über das Vorhandensein der anomalen Absorption für längere Wellen, deren Länge mehrere Dekameter beträgt, kann man aus einigen Resultaten der Arbeit von Harms[8]) schließen. Endlich wurde vom Verfasser[9]) eine Untersuchung der anomalen Absorption elektrischer Wellen von 50 cm bis 1 m Länge durch Alkohole gemacht worden. Von allen diesen Arbeiten ist das Vorhandensein der selektiven Absorption elektrischer Wellen durch die Materie festgestellt worden, aber alle diese Forschungen haben einen unzusammenhängenden nicht systematischen Charakter.

Deswegen wissen wir sehr wenig über das elektrische Spektrum der Materie, zu dessen Beobachtung wir außerdem keine einfache und bequeme Methode besitzen.

---

1) P. Drude, Abh. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss. **33.** S. 1. 1896; Wied. Ann. **58.** S. 1. 1896.

2) A. Colley, Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges. **39.** S. 210. 1907; **40.** S. 121, 228. 1908; Phys. Zeitschr. **10.** S. 471, 657. 1909; **11.** S. 324. 1910.

3) A. Colley, a. a. O.

4) N. Obolensky, Phys. Zeitschr. **11.** S. 533. 1910.

5) K. Ivanoff, Nachrichten der Warschauer Universität 1915.

6) H. Rukopp, Ann. d. Phys. **42.** S. 489. 1913.

7) K. Wildermuth, Ann. d. Phys. **8.** S. 212. 1902.

8) F. Harms, Ann. d. Phys. **5.** S. 565. 1901.

9) W. Romanoff, Journ d. Russ. Phys.-Chem.-Ges. **44.** S. 377. 1912; Ann. d. Phys. **40.** S. 281. 1912.

In der vorliegenden Arbeit ist eine neue Methode zur Untersuchung der selektiven Absorption elektrischer Wellen, welche besonders bequem für die Beobachtung der anomalen Absorption von stark absorbierenden Substanzen ist, beschrieben und sind die Resultate die mit dieser neuen Methode für die selektive Absorption der Alkohole der Fettreihe erhalten worden sind, angeführt.

I. Die Untersuchungsmethode.

Die elektrischen Wellen wurden mittels eines vom Verfasser[1]) erbauten Spektrometers erregt und hatten eine sehr kleine Dämpfung von 0,01 biss 0,005. Die Anordnung der Apparate ist durch Fig. 1 angegeben. *M* ist ein Trog mit

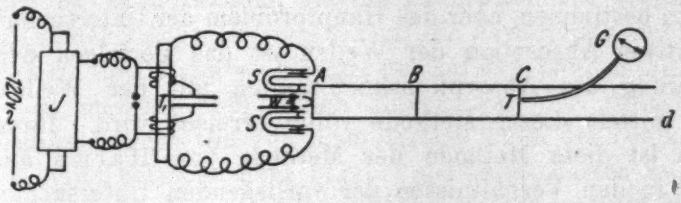


Fig. 1.

Petroleum, in welchem sich der Vibrator *W* des Systems von Colley[2]) befindet. Der Vibrator wird vom Hochspannungsstrom eines Tesla-Transformators T_1, welcher am Schild befestigt ist, gespeist. Der Transformator wird vom Induktor *J* (40 cm Funkenstrecke), dessen Leitungen an die Klemmen der Funkenstrecke *F* des Tesla-Transformators angeschlossen sind, geladen. Das Induktorium wird unmittelbar vom Wechselstromnetz (120 Volt Spannung) ohne Unterbrecher gespeist. Die Stromstärke in der Primärleitung des Induktoriums wurde zwischen 10—12 Amp. reguliert. *d* sind Drähte, in welchen sich die Wellen vom Colleyschen Vibrator verbreiten, *B* — eine Brücke welche das „erregende" System vom Resonator *BC*, *C* — eine Brücke, welche den Resonator von dem übrigen Teile der Drähte abgrenzt. Um die Drähte *d* von der unmittelbaren Wirkung des Tesla-Transformators zu schützen,

1) W. Romanoff, Journ. d. Russ. Phys.-Chem.-Ges. 50. S. 57. 1918.

2) A. Colley, Phys. Zeitschr. 10. S. 329. 1909.

befanden sich der Colleysche Vibrator, der Tesla-Transformator und das Induktorium im Inneren von Metallkasten, die alle zusammen eine Schutzkammer bildeten. Alle einzelnen Teile dieser Kammer müssen miteinander verlötet sein.

Bei dieser Versuchsordnung verbreiten sich längst der Drähte reine starke Wellen, deren Periode von der Periode des „erregenden" Systems abhängt. Wenn wir zwischen den Drähten d eine kleine Menge (ein Paar Tropfen) eines Dielektrikums bringen, das die elektrische Welle absorbiert, so können wir aus seiner Erwärmung über die Absorptionskoeffizienten urteilen.

Es ist wahr, daß diese Methode an und für sich nicht die Möglichkeit gibt die absoluten Werte der Arbsorptionskoeffizienten zu bestimmen, aber das Hauptproblem der Untersuchung der selektiven Absorption der Wellen ist das Verfolgen der Veränderung des Absorptionskoeffizienten mit der Wellenlänge, was mittels dieser Methode völlig erreicht wird. Ihrer Idee nach ist diese Methode der Methode von Harms analog.[1]) aber in den Verhältnissen der vorliegenden Untersuchung bekommt sie eine andere praktische Ausführung, welche den kurzen Wellen angepaßt ist, mit denen die Messungen in dieser Arbeit ausgeführt sind.

Im Falle, daß ein Dielektrikum der Absorptionskoeffizient auf eine andere Weise für eine bestimmte Wellenlänge gemessen worden ist, kann man durch vergleichen der Resultate auch nach dieser Methode über die absolute Größe der Absorptionskoeffizienten anderer Dielektrika urteilen.

Wie die Vorversuche gezeigt haben, sind bei starker Absorption nur ein oder wenige Tropfen der zu untersuchenden Substanz zwischen die Drähte zu bringen. Die Erwärmung dieser Substanz kann mittels eines in das Innere des Tropfens gebrachten Thermoelements bestimmt werden. Selbstverständlich darf das Material des Tropfens keine chemische Wirkung auf die Drähte des Thermoelements ausüben. Deswegen bestand das thermoelektrische Paar aus einem Platindraht, das mit einem Draht aus Platin-Rhodium Legierung verlötet war. Die Erwärmung dieses Thermoelements wird durch ein emp-

1) F. Harms, a. a. O.

findliches Galvanometer von Du Bois-Rubens bestimmt. Auf diese Weise wurde nach der Erwärmung des Thermoelements, welches in das Innere eines Tropfens des Dielektrikums gebracht war, die Absorption elektrischer Wellen bestimmter Länge durch ein gegebenes Dilektrikum ermittelt. Diese Methode wurde in der vorliegenden Arbeit an ein Wellenintervall von 57 bis 88 cm Wellenlänge angewandt. Durch schrittweise Verlängerung der Wellenlänge ist es möglich, die Kurve, welche die Abhängigkeit der Erwärmung des Dielektrikums von der Länge der absorbierten Wellen darstellt, in diesem Intervalle zu konstruieren. Da diese Erwärmung von der Dämpfung der absorbierten Welle abhängen kann, so ist es unentbehrlich das logarithmische Dämpfungsdekrement der Welle zu bestimmen. Endlich ist es notwendig, um die Absorption der Wellen bei verschiedener Länge zu vergleichen, die Erwärmung des Tropfens bei ein und derselben Energie der auf den Tropfen fallenden Welle zu messen. Für diesen Zweck war der Brücke des Resonators, welche ihn von dem übrigen Teile der Drähte abgrenzte, ein Thermoelement parallel geschaltet, dessen Angaben proportional der Energie der im Meßresonator erregten Wellen war. Dieses Thermoelement gab außerdem die Möglichkeit die Resonanzkurve zwischen dem Resonator und dem „erregenden" System zu konstuieren und das logarithmische Dämpfungsdekrement der Wellen zu ermitteln. Da das „erregende" System und der Resonator ganz gleich gebaut sind, kann man das logarithmische Dekrement des Resonators gleich der Hälfte des aus der Resonanzkurve bestimmten logarithmischen Dekrements setzen. Um die Methode bequemer zu machen, wurden die Erwärmung des Dielektrikums und die Ermittlung der Resonanzkurve gleichzeitig ausgeführt. In der Tat genügt es, um das logarithmische Dekrement zu ermitteln, den oberen Teil der Resonanzkurve zu konstruieren, wo die Wellenenergie schon genügend groß ist, um ihre Absorption messen zu können; wenn dem so ist, so kann man beide Messungsreihen gleichzeitig ausführen. Zu diesem Zwecke konnte das Du Bois Rubenssche Galvanometer mittels eines Umschalters entweder mit dem Thermoelement im Inneren des Tropfens oder mit dem Thermoelement, das der Brücke parallel geschaltet war, verbunden werden. Indem man das Galvanometer abwechselnd

durch das eine oder das andere Thermoelement schließt, konnte man gleichzeitig die Resonanzkurven mittels beider Thermoelemente aufnehmen. Es werden namentlich bei jeder Stellung der Brücke Messungen sowohl der Erwärmung des Dielektrikums, wie auch der Energie der im Resonator erregten Wellen ausgeführt. Das Verhältnis der Angaben des ersten Thermoelements (Erwärmung des Dielektrikums) zu den Angaben des zweiten (die Energie der Wellen) wird ein Maß der Absorption der Wellen in dem untersuchenden Dielektrikum angenommen. Da die Resonanzkurve praktisch aus 8—10 Punkten bestimmt wird, so gibt diese Methode gleichzeitig 8—10 Werte dieses Verhältnisses, deren Mittelwert endgültig in Rechnung gezogen wird. Gewiß muß man im Auge behalten, daß, wenn wir nach dieser Methode die Erwärmung des Dielektrikums gleichzeitig mit der Bestimmung der Resonanzkurve ermitteln, wir nur in dem Gipfelpunkte der Resonanzkurve die Erwärmung des Dielektrikums für eine Periode, die der Periode des erregenden Systems gleich ist, messen. In den übrigen Punkten der Resonanzkurve wird diese Bestimmung für benachbarte Perioden, etwas kleinere oder etwas größere als die Periode des erregenden Systems ausgeführt. Aber um die Resonanzkurve für Wellen mit einem Dekrement von 0,01 und kleiner zu konstruieren, braucht man die Periode des Resonators nicht mehr als um $^1/_2$ Prozent zu variieren und in diesen Grenzen kann man nur selten eine merkliche Veränderung der Absorption erwarten. Wenn aber solch eine Veränderung auch in diesen Grenzen möglich sein könnte, so muß man sich mit der Messung der Absorption nur in dem Gipfel der Resonanzkurve begnügen.

II. Die Apparate.

Das Induktorium. Um intensive Wellen ohne Anwendung eines Unterbrechers zu erhalten, indem das Induktorium unvermittelt vom Wechselstrome der städtischen Zentrale (Spannung 120) gespeist wird — ein Verfahren das große Bequemlichkeit darbietet —[1]) ist die Anwendung großer Induktoren von 40 cm und mehr Funkenlänge notwendig.

1) W. Romanoff a. a. O. S. 66.

Der Tesla-Transformator. Der Transformator war nach den Angaben von Drude konstruiert und hatte eine Wellenlänge von 60 m. Die Funkenstrecke des Transformators hatte Zinkelektroden von 10 mm Durchmesser und befand sich in einem Gefäß mit Petroleum. Der Abstand zwischen den Elektroden konnte mittels einer Mikrometerschraube reguliert werden.

Der Vibrator. Die elektrischen Wellen wurden durch einen Colley-Vibrator erregt, welcher so angeordnet war, daß er intensive Wellen von konstanter Energie aussand. Die Einrichtung dieses Vibrators ist in einer früheren Schrift[1]) genau beschrieben worden.

Die Brücken. Das „erregende" System wird an der einen Seite vom Vibrator an der anderen vom Resonator durch die Brücken A und B, und der Resonator von dem übrigen Teile der Drähte durch die Brücke C abgegrenzt. Alle drei Brücken sind durch drei Scheiben aus Kupfer ca 40 cm Durchmesser gebildet. Am Orte, wo die Drähte die Brücken durchsetzen, sind Fenster, die durch kleine Scheiben verdeckt werden können ausgeschnitten. Auf diese Weise kann man die Koppelung zwischen dem erregendem System und dem Resonator variieren, indem man die Größe des Fensters reguliert. Brücken von solch einer Einrichtung ermöglichen es Wellen mit einem Dekrement 0,01 und noch kleinerer Größenordnung zu erhalten, was sehr wichtig für die Erforschung der Absorption der Wellen ist. Die Brücken B und C waren auf den Platten B_1 und B_2 befestigt und konnten längst der Drähte mittels der Schraube V, die einen Gang von einem Millimeter für die Platte B_1 und einen von zwei Millimeter für die Platte B_2 hatte, verschoben werden. Deshalb geschah es, daß wenn die Schraube gedreht wurde, beide Brücken B und C so verschoben wurden, daß der Resonator dauernd in Resonanz mit dem erregenden System blieb. Wenn diese Resonanz verstimmt wird, so kann man die Brücke C mittels der Mikrometerschraube D verschieben, und so den Resonator in Resonanz mit dem erregenden System bringen. Diese Verrückungen durch die Schraube D konnte man mit einer Genauigkeit bis auf ein Paar hundertste Teile eines Millimeters ausführen.

1) W. Romanoff a. a. O. S. 88.

Die Thermoelemente. Die Bestimmung der Energie der Wellen und der Erwärmung des Dielektrikums wurde mittels zweier Thermoelemente ϑ_1 und ϑ_2 ausgeführt. Das Thermoelement ϑ_1, welches die Energie der Wellen bestimmte, wurde parallel der Brücke C geschaltet und war aus Pt- und Konstantendrähten 0,02 mm Durchmesser angefertigt.

Das Thermoelement ϑ_2 hat eine kompliziertere Einrichtung, da sein Ziel nur in der Anzeige der Erwärmung des Tropfens besteht, und dieses Thermoelement nicht die Wellen selbst die im Resonator erregt werden, anzeigen soll. Zu diesem Zweck hat das Thermoelement ϑ_2 (Fig. 2) zwei Lötstellen τ_1 und τ_2 aus Platin und Platinrhodiumdraht 0,02 mm Durchmesser, die einander entgegengeschaltet sind. Bei jedem Induktionsstrome durch das Thermoelement ϑ_2 wurden beide Lötstellen gleichzeitig erwärmt und das mit ihnen verbundene Galvanometer gab keine Ablenkung. Bei den Absorptionsmessungen wird die Lötstelle τ_1 in ein Tropfen des zu untersuchenden Dielektrikums getaucht. Die Erwärmung des letzteren ruft einen ihr entsprechenden Strom hervor, der vom Galvanometer registriert wird. Der Tropfen des zu untersuchenden Dielektrikums wird in ein Röhrchen aus geschmolzenem Quarz gebracht, da letzteres im Bereiche der elektrischen Wellen keine Absorption besitzt und seine Dielektrizitätskonstante dem Quadrat seines Brechungsexponenten für die langen von Rubens entdeckten ultraroten Strahlen gleich ist.

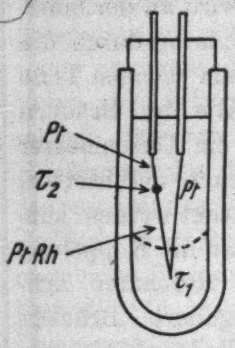


Fig. 2.

III. Die Vorversuche.

Die Lage des Thermoelements. Die Vorversuche verfolgen das Ziel aufzuklären, was für eine Wirkung die Lage des Thermoelements mit dem Tropfen zwischen den Drähten auf die Wellen die im Resonator erregt werden, ausüben kann, und was für eine Wirkung die Größe des Tropfens auf seine Erwärmung ausübt. Anfänglich wurde geplant, das Dielektrikum mit dem Thermoelement im Resonator in den Bauch der elektrischen Kraft zu setzen. Um aufzuklären, welche Wirkung das

Thermoelement selber in dieser Lage auf die elektrischen Wellen ausübt, wurde sein Einfluß in verschiedenen Lagen zwischen den Drähten untersucht. Das Thermoelement mit einem kleinen Tropfen wurde von einem Ende des Resonators bis zum anderen verschoben, und es wurde einerseits die Energie im Resonator *E* und andererseits die Absorption im Tropfen *A* bestimmt. Die so gewonnenen Resultate sind in Fig. 3 dargestellt: die Abszissen entsprechen dem Abstande des

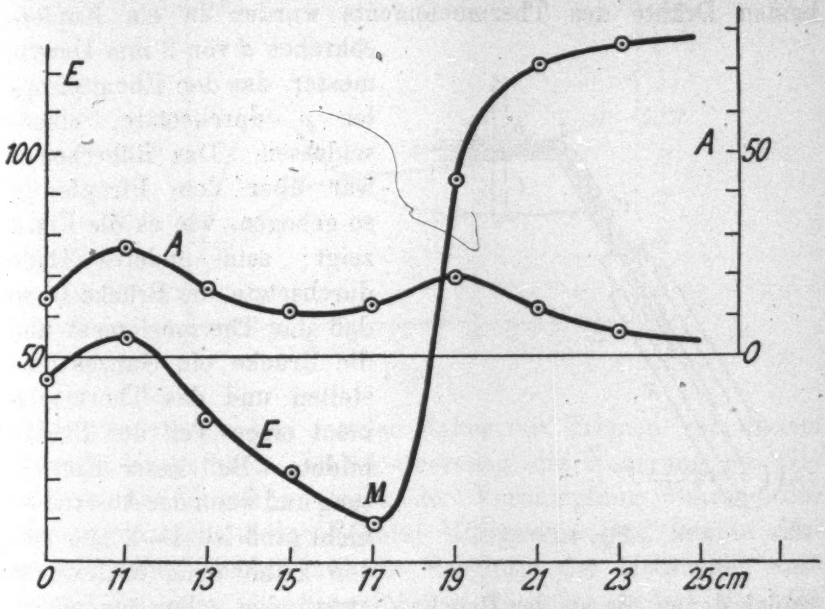


Fig. 3.

Thermoelements mit dem Tropfen von einem Ende des Resonators, die Ordinaten der Energie des Resonators (Kurve *E*) oder der Absorption in dem Tropfen (Kurve *A*). Der Punkt *M* der Kurve *E* entspricht der Lage des Thermoelements in dem Mittelpunkte des Resonators, also im Bauche der elektrischen Kraft. Es stellt sich heraus, daß die Energie des Resonators in diesem Falle ein Minimum ist. Dieser Umstand weist auf eine starke Reflexion der elektrischen Wellen vom Resonator hin. Mit der Annäherung zum Ende des Resonators wird die störende Einwirkung des Thermoelements immer geringer, und die Energiekurve steigt rasch. Hieraus ist ersichtlich, daß das Thermoelement, um seine störende Wirkung zu

vermeiden, nicht im Bauche der elektrischen Kraft, sondern in der Nähe der Brücke in solch einem Abstande von letzterer eingestellt werden soll, in welchem die Absorption der Wellen durch das Dielektrikum noch genügend groß ist um mittels des empfindlichen Du Bois-Rubens-Panzergalvanometer registriert werden kann.

Um die schädlichen Reflexionen vom Thermoelement gänzlich zu vermeiden, wurde es folgendermaßen konstruiert. Die beiden Drähte des Thermoelements wurden in ein Kupferröhrchen *d* von 2 mm Durchmesser, das den Ebonitpfropfen *p* durchsetzte, eingeschlossen. Das Röhrchen *d* war über dem Pfropfen *p* so gebogen, wie es die Fig. 4 zeigt; sein anderes Ende durchsetzte die Brücke *C*, so daß das Thermoelement und die Brücke ein Ganzes darstellen und das Thermoelement einen Teil der Brücke bildete. Bei dieser Einrichtung und wenn der Abstand *ab* nicht groß ist (1—2 cm), werden keine neue Reflexionen außer denen die an der Brücke *C* stattfinden sollen, eingeführt. Der Pfropfen *p* dient um das Quarzkölbchen, in welchem sich das zu untersuchende Dielektrikum in der Höhe der Drähte befindet, zu tragen.

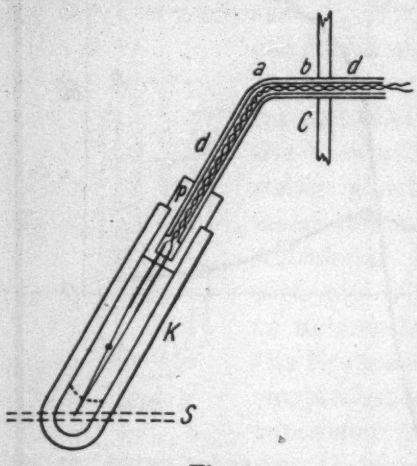


Fig. 4.

Die Masse des Tropfens. Die Erwärmung des Dielektrikums hängt von der Größe des Tropfens ab, der sich im Kölbchen befindet. Ein zu kleiner Tropfen wird rasch abgekühlt und die Menge der Wärme, die in ihm erzeugt wird, ist nach absoluter Größe nichtig klein. Ein zu großer Tropfen wird nicht bis zur gleichen Temperatur bei demselben Energievorrate im Resonator erwärmt. Außerdem erhöht ein zu großer Tropfen zu sehr das Dämpfungsdekrement des Resonators. Um die Größe der Masse, mit welcher das Experimentieren am rationellsten ist, zu bestimmen, wurde die Erwärmung des Dielek-

trikumtropfens in Abhängigkeit von seiner Größe untersucht. Die Resultate sind in Fig. 5 dargestellt. Die Abszissen stellen die Masse des Tropfens in Milligramm, die Ordinaten seine Erwärmung (Kurve *A*/*E*) und das Dämpfungsdekrement des Resonators (Kurve *B*) dar. Kurve *A* zeigt, daß die Erwärmung ihr Maximum bei einem Gewichte des Tropfens von 3,0 bis 4,5 mg erreicht und in diesem Bereiche konstant bleibt. Die

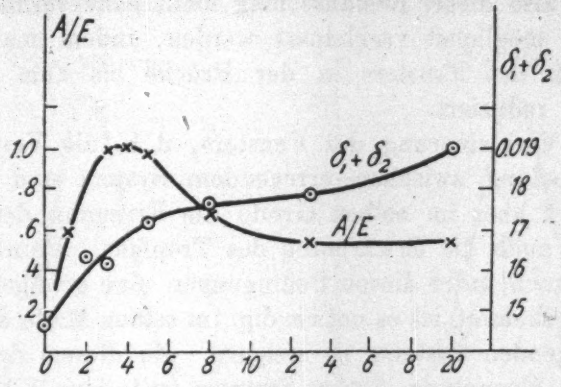


Fig. 5.

Absorptionsmessungen wurden daher mit Tropfen von diesem Gewicht ausgeführt. Dabei überstieg die Änderung des Gewichtes des Tropfens wegen der Verdampfung während der Messungen nicht einige Zehntel Milligramm und konnte deswegen keinen Einfluß auf die Resultate der Messungen ausüben. Bei dem eben angeführten Gewichte ändert sich das Dämpfungsdekrement im Vergleich zu dem des leeren Systems um eine unbedeutende Größe.

Der Restausschlag. Wenn wir die Erregung des Resonators in Abhängigkeit von seiner Periode bestimmen, so finden wir bei den Versuchsbedingungen, die in diesem Apparate vorhanden sind, eine reine Resonanzkurve, die bei einer kleinen Entfernung vom Resonanzpunkte bis zu Null fällt. Wenn wir aber dieselbe Resonanzkurve mittels eines Thermoelements, das in ein Tropfen eingetaucht ist, bestimmen, so finden wir, daß sogar bei großer Entfernung vom Resonanzpunkte ein Restausschlag von 1—3 Skalenteile übrig bleibt, der durch die Erwärmung hervorgerufen wird, die auch in dem Falle stattfindet, wenn der Resonator sich nicht in Resonanz mit dem

erregenden System befindet. Dieser Restausschlag wird, wie es scheint, durch den Einfluß der Wellen des erregenden Systems hervorgerufen, die auf den Tropfen unvermittelt durch das Fenster in der scheidenden Brücke auch dann wirken, wenn der Resonator nicht in Resonanz mit dem erregenden System abgestimmt ist, da diese Koppelung auch in diesem Falle bestehen bleibt und eine direkte Einwirkung möglich ist. Es kann also dieser Restausschlag nicht ganz vermieden, sondern nur möglichst verkleinert werden, indem man die Abmessungen des Fensters in der Brücke bis zum zulässigen Minimum reduziert.

Die Verkleinerung des Fensters, d. h. die Verkleinerung der Koppelung zwischen erregendem System und Resonator verkleinert aber im selben Grade die Erregung des letzteren und also auch die Erwärmung des Tropfens. Damit dem Resonator auch unter diesen Bedingungen eine genügende Menge Energie zukommt, ist es notwendig, im selben Maße die Energie des erregenden Systems zu steigern. Zu diesem Zwecke muß man die Koppelung dieses Systems mit dem Vibrator vergrößern, so weit es ohne die Bedingungen der Stoßerregung zu stören möglich ist.

Um die genannten Bedingungen zu erreichen, wurde die Koppelung zwischen dem erregenden System und dem Vibrator ziemlich stark genommen (der gemeinsame Teil der Brücke *A* war 7 mm lang), was die Möglichkeit verschaffte, mit zwei Fenstern zwischen dem erregenden System und dem Resonator zu je 1 mm Höhe zu arbeiten. Auf diese Weise war der Restausschlag bis auf ein bis zwei Skalenteile heruntergesetzt; öfters betrug er nur einen Bruch eines Skalenteiles, aber auch dieser Ausschlag wurde beachtet und von dem zu bestimmenden Resultate abgezogen. Wegen der verhältnismäßig großen Koppelung zwischen dem Vibrator und dem erregenden System konnte das Dekrement des erregenden Systems und des Resonators nicht sehr klein gemacht werden und schwankte im Mittel um 0,015. Da wir aber bis jetzt keine systematische Bestimmung der Absorption gleichzeitig mit dem logarithmischen Dekremente der absorbierten Wellen haben, so bieten Absorptionsmessungen, die bei diesen verhältnismäßig größeren Dekrementen ausgeführt sind (im Vergleich zu denen, welche über-

haupt mit dem Spektrometer zu erreichen sind), an und für sich Interesse, desto mehr, weil diese Dekremente ihrer absoluten Größe nach kleiner sind als alle diejenigen, die bis jetzt in Gebrauch kamen. In den Tabb. I und II sind als Beispiel Bestimmungen der Absorption und der Energie im Propylalkohol für eine halbe Wellenlänge $\lambda/2 = 285$ mm und $\lambda/2 = 330$ mm angegeben. In Fig. 6 und 7 sind diese Resultate graphisch dargestellt.

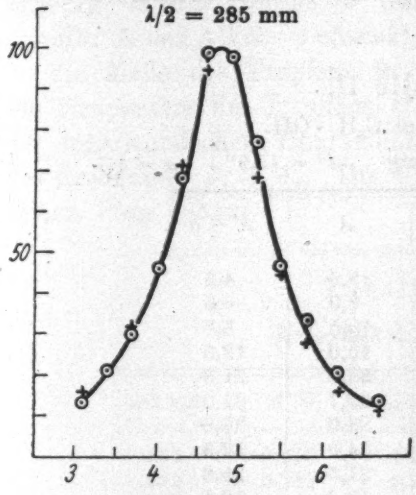


Fig. 6.

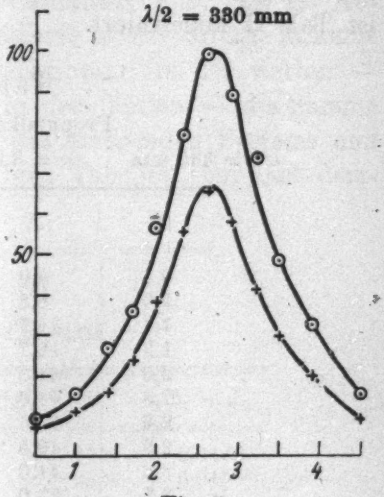


Fig. 7.

Tabelle I.

Propylalkohol $C_3H_7 \cdot OH$.

$\lambda/2 = 285$ mm $\quad m = 4$ mg $\quad t^0 = 15{,}9^0$ $\quad \alpha = 1{,}7$

B	E	A	$A = \alpha$
3,1	5,0	8,0	6,3
3,4	8,0	10,0	8,3
3,7	11,5	13,9	12,2
4,0	17,7	19,2	17,5
4,3	28,3	29,4	27,7
4,6	38,1	38,3	36,6
4,9	38,0	39,3	37,6
5,2	30,0	28,1	26,4
5,5	17,9	19,0	17,3
5,8	13,0	12,8	10,9
6,2	7,5	8,0	6,3
6,7	5,0	8,1	4,4

$A/E = 0{,}970$

In der ersten Kolonne der Tab. I ist unter B die Lage der Brücke C, mittels der der Resonator in Resonanz mit dem erregenden System gebracht wird, in Millimeter angegeben. In der zweiten Kolonne unter E sind die Angaben des Thermoelements, das die Energie mißt, und in der dritten Kolonne unter A die Angaben des Thermoelements, das die Absorption mißt, angegeben; α ist der Restausschlag. In der vierten Kolonne sind die Angaben der dritten Kolonne um den Restausschlag vermindert wiedergegeben. Nach demselben Plane ist Tab. II konstruiert.

Tabelle II.

Propylalkohol $C_3H_7 \cdot OH$.

$\lambda/2 = 330$ mm $\quad m = 3{,}8$ mg $\quad t^0 = 15{,}9^0$ $\quad \alpha = 1{,}7$

B	E	A	$A - \alpha$
0,5	5,0	8,0	4,3
1,0	8,5	8,0	6,3
1,4	14,7	10,5	8,8
1,7	19,7	15,0	13,3
2,0	31,3	23,0	21,3
2,3	44,0	32,7	31,0
2,6	55,6	38,0	36,3
2,9	49,5	34,0	32,3
3,2	41,0	27,5	25,8
3,5	27,0	18,2	16,5
3,9	18,0	12,9	11,2
4,5	8,3	6,8	5,1

IV. Die Messungen.

Die Absorption der elektischen Wellen wurde an fünf Alkoholen der Fettreiher; Methyl-, Äthyl-, Propyl-, Isobutyl- und Amyl-Alkohol für ein Wellenintervall von 285 mm bis 440 mm untersucht. Das Verhältnis der Absorption zur Energie wurde, aus den Resonanzkurven (die unmittelbar gemessen wurden) auf folgende Weise berechnet. Es wurde die Summe von N Ordinaten der Resonanzkurve der Absorption ΣA und die Summe von N dazu gehörenden Ordinaten der Resonanzkurve der Energie ΣE berechnet. Das Verhältnis dieser Summen diente als Maß K der Absorption:

$$K = \frac{\Sigma A}{\Sigma E}.$$

Alle Alkohole sind von der Firma Kahlbaum bezogen worden, und außerdem sind Äthyl- und Propylalkohol noch mit Anwendung von metallischen Kalzium destilliert worden.

Die Resultate der Messungen sind in den Tabb. III—VII angeführt und in den Figg 8—12 graphisch dargestellt.

Tab. III gibt die Messungen für Methylalkohol wieder. In der ersten Kolonne ist die halbe Wellenlänge in mm angegeben; in der zweiten — das Verhältnis A/E, das die Absorption K des Alkohols charakterisiert; in der dritten Kolonne — die Maße des Tropfens in Milligramm; in der vierten — die Temperatur des Tropfens t^0; in der fünften — die Summe der logarithmischen Dekremente des erregenden Systems und des Resonators $\delta_1 + \delta_2$. Die übrigen Tabellen sind nach demselben Plan gebaut.

Tabelle III.

Methylalkohol $CH_3 \cdot OH$

$\lambda/2$ mm	A/E	$m \cdot 10^{-3}$g	t^0	$\delta_1 + \delta_2$
285	0,240	4,40	17,8	0,0148
295	0,243	4,20	18,3	0,0159
300	0,238	4,00	18,8	0,0152
310	0,215	3,80	18,8	0,0155
320	0,186	3,60	18,6	0,0123
330	0,145	3,40	18,4	0,0136
340	0,149	5,57	1,85	0,0167
350	0,117	4,44	18,5	0,0162
360	0,089	4,31	18,4	0,0143
370	0,110	4,18	18,3	0,0144
380	0,123	4,05	18,3	0,0147
390	0,089	3,91	18,3	0,0138
400	0,058	3,78	18,3	0,0136
410	0,061	3,65	18,3	0,0133
420	0,051	3,51	18,3	0,0113
430	0,051	3,39	18,3	0,0126
440	0,055	3,33	18,3	0,0130

Fig. 8 stellt die Resultate der Messungen im Methylalkohol graphisch dar. Die Abszissen entsprechen den halben Wellenlängen, die Ordinaten — dem Verhältnisse von der Absorption zur Energie.

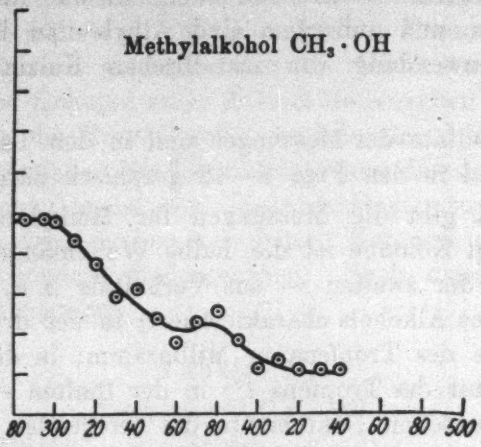


Fig. 8.

Tabelle IV.

Äthylalkohol $C_2H_5 \cdot OH$

$\lambda/2$ mm	A/E	$m \cdot 10^{-3}$ g	t^0	$\delta_1 + \delta_2$
285	0,777	4,1	15,8	0,0163
290	0,787	4,0	15,8	0,0160
295	0,783	3,9	15,8	0,0123
300	0,800	3,8	15,8	0,0148
310	0,674	3,9	15,7	0,0151
320	0,545	3.8	15,7	0,0144
330	0,533	4,2	15,4	0,0163
340	0,425	4,0	15,5	0,0145
350	0,395	3,9	15,6	0,0122
360	0,338	3,8	15,7	0,0150
370	0,344	3,6	15,8	0,0129
380	0,329	3,5	15,7	0,0159
390	0,228	3,3	15,7	0,0127
400	0,216	4,6	17,2	0,0156
410	0,192	4,6	17,2	0,0110
420	0,222	4,6	17,2	0,0112
440	0,178	4,6	17,2	0,0125

In Tab. IV befinden sich die Angaben für Äthylalkohol. Fig. 9 stellt die Resultate der Messungen graphisch dar.

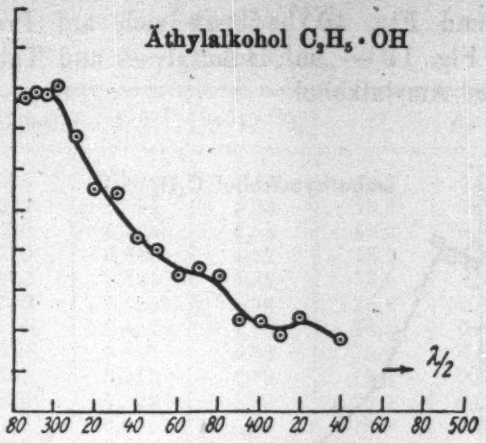


Fig. 9.

Tabelle V.

Propylalkohol $C_3H_7 \cdot OH$

$\lambda/2$ mm	A/E	$m \cdot 10^{-3}$ g	t^0	$\delta_1 + \delta_2$
285	1,010	4,0	15,9	0,0155
295	1,000	4,0	15,9	0,0150
300	0,845	3,9	15,9	0,0146
310	0,750	3,9	15,9	0,0137
320	0,633	3,8	15,9	0,0155
330	0,574	3,8	15,9	0,0138
340	0,533	4,0	16,1	0,0139
350	0,473	4,0	16,2	0,0131
360	0,434	4,0	16,3	0,0142

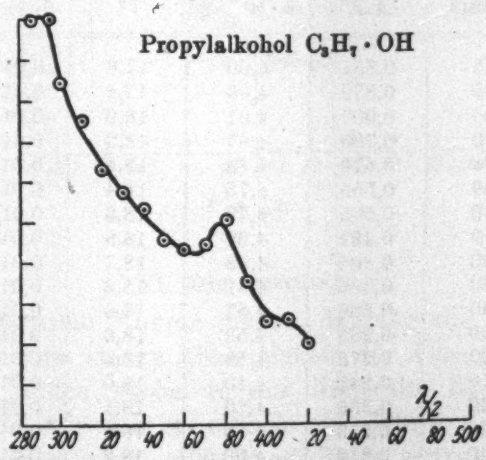


Fig. 10.

Tab. V und Fig. 10 beziehen sich auf Propylalkohol; Tab. VI und Fig. 11 — auf Isobutyl — und Tab. VII nebst Fig. 12 — auf Amylalkohol.

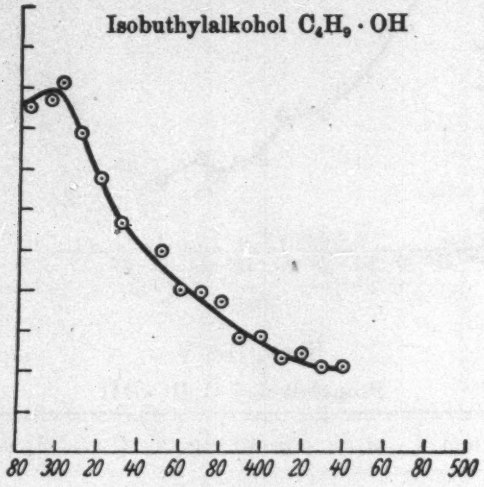


Fig. 11.

Tabelle VI.

Isobutylalkohol $C_4H_9 \cdot OH$

$\lambda/2$ mm	A/E	$m \cdot 10^{-3}$ g	t^0	$\delta_1 + \delta_2$
285	0,851	5,00	17,6	0,0170
295	0,872	4,96	17,8	0,0150
300	0,907	4,91	18,0	0,0144
310	0,788	4,87	18,2	0,0149
320	0,679	4,82	18,4	0,0158
330	0,565	4,78	18,4	0,0170
340	0,505	4,73	18,6	0,0143
350	0,492	4,69	18,8	0,0153
360	0,405	4,65	18,7	0,0134
370	0,386	4,61	18,6	0,0141
380	0,366	4,57	18,6	0,0129
390	0,285	4,53	18,6	9 0144
400	0,278	4,49	18,6	0,0125
410	0,241	4,40	18,0	0,0121
420	0,236	4,20	18,1	0,0127
430	0,213	4,10	18,2	0,0123
440	0,212	4,00	18,2	0,0130

Tabelle VII.

Amylalkohol $C_5H_{11} \cdot OH$

$\lambda/2$ mm	A/E	$m \cdot 10^{-3}$ g	t^0	$\delta_1 + \delta_2$
285	0,678	4,40	18,0	0,0174
295	0,691	4,39	18,3	0,0141
300	0,664	4,38	18,6	0,0141
310	0,630	4,37	18,7	0,0169
320	0,448	4,35	18,8	0,0144
330	0,488	4,34	18,8	0,0159
340	0,487	4,33	18,9	0,0164
350	0,395	4,32	18,9	0,0147
360	0,372	4,30	18,8	0,0131
370	0,392	4,29	18,8	0,0153
380	0,321	4,28	18,8	0,0125
390	0,284	4,27	18,8	0,0092
400	0,214	4,25	18,8	0,0147
410	0,223	4,24	18,8	0,0158
420	0,211	4,23	18,8	0,0133
430	0,217	4,22	18,8	0,0130
440	0,182	4,20	18,8	0,0142

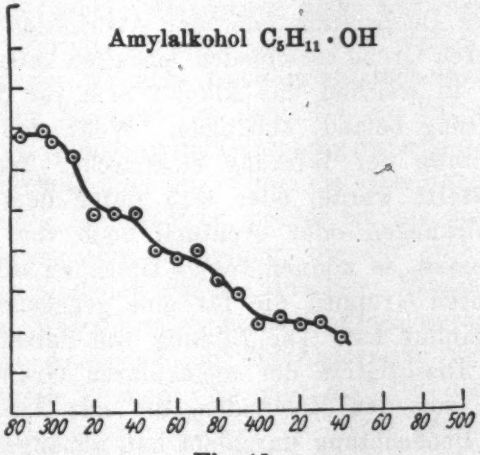


Fig. 12.

VI. Die Resultate.

Die erhaltenen Kurven zeigen, daß für alle untersuchten Alkohole wir eine starke Abhängigkeit der Absorption von der Wellenlänge finden, wobei in der Nähe der halben Wellenlänge von 285 mm sich ersichtlich ein Gebiet maximaler Absorption befinden muß. Um über dieses fortzuschreiten und

in ein Bereich geringerer Absorption einzutreten, müssen Absorptionsmessungen in kürzeren Wellen gemacht werden. Diese Messungen konnten nicht ohne Erbauung eines neuen Apparates gemacht werden, da der in dieser Schrift beschriebene nicht für kürzere Wellen adoptiert werden konnte[1]). Aber auch die erhaltenen Resultate zeigen, daß wir in diesem Bereiche eine selektive Absorption der elektrischen Wellen durch die Alkohole haben. In dem untersuchten Intervalle kommt nur ein Teil eines Absorptionsstreifens zu liegen, wenn wir die kleinen Maxima und Minima der Absorption unbeachtet lassen, die in verschiedenen Teilen der untersuchten Kurven zu beobachten sind. Die Schärfe dieser sekundären Maxima ist in verschiedenen Fällen sehr inkonstant. Bei wiederholten Beobachtungen treten sie zuweilen mit größerer Bestimmtheit, zuweilen mit geringerer hervor: zuweilen werden sie ganz abgeglättet. Wenn sie aber zu beobachten sind, übersteigen sie weit die möglichen Fehlergrenzen, so daß die oben angezeigte Inkonstanz durch andere Ursachen erklärt werden muß. Sie kann von der Dissoziation oder der Assoziation der Alkoholmoleküle, deren Größe verschieden ausfallen kann, je nach den Bedingungen in welchen das Alkohol sich vor dem Momente der Beobachtung befand, abhängen. Wenn das Alkohol vor der Beobachtung der Wirkung elektrischer Wellen anderer Länge ausgesetzt wurde, oder sich unter dem Einfluß von Temperaturwirkungen oder eventuell noch von anderen Einwirkungen befand, so können solche Ursachen auf den Zustand der molekularen Gruppen die für eine gegebene Wellenlänge resonieren, Einfluß hat. Die Bildung von Solvaten, die Assoziation und Dissoziation der molekularen Gruppen wird auf diese Weise von den Zuständen, die das Alkohol bis zum Moment der Beobachtung durchlebt hat, abhängen und deshalb kann auch die Menge der resonierenden Gruppen von gegebener Beschaffenheit bei scheinbar gleichen Versuchsbedingungen verschieden sein, was eben auf die Größe und die Lage der Absorptionsmaxima Einfluß haben kann.

Was den allgemeinen Charakter der Absorptionskurven

---

1) Die Erbauung solch eines Apparates ist jetzt im Gange.

anbetrifft, die nach der Methode des Tropfens erhalten wurden, so unterscheiden sie sich von den nach der Methode des Trogs erhaltenen Kurven nur durch ihre Einzelheiten, wozu, wie gesagt, genügende Ursachen vorhanden sein können. Diese Angelegenheit zeigt, daß die Methode des Tropfens, die in dieser Arbeit angewandt ist, befriedigende Resultate liefert.

Die Messungen, die für Alkohole ausgeführt wurden, zeigen, daß wir für diese Alkohole im untersuchten Intervalle keine engen Absorptionsstreifen finden. Dies kann entweder von dem abhängen, daß die angewandten Wellen nicht genügend monochromatisch waren oder von dem, daß die Dämpfung der molekularen Resonatoren in den Alkoholen nicht genügend klein ist.

Im ersten Falle — wenn die Dämpfung der Wellen zu groß ist — wird solch eine Welle den Resonator auch noch dann erregen, wenn ihre Periode bedeutend von der Periode des Resonators abweicht. Im zweiten Falle wird ebenso ein Resonator mit großer Dämpfung nicht nur von einer Welle von gleicher Periode, sondern auch von Wellen die sich bedeutend in dieser Hinsicht von ihm unterscheiden erregt. Wie aus der fünften Kolonne der Tabb. III bis VII ersichtlich ist, vermindert sich allmählig die Dämpfung der angewandten Wellen zu den längeren Wellen hin, wobei die Dämpfung der kürzeren Wellen ungefähr um 30 Proz. größer ist, als die der längeren. Die Veränderung der Dämpfung, die für eine und dieselbe Welle in verschiedenen Fällen zufälliger Ursachen wegen beobachtet wird, überschreiten nicht 10 Proz., weshalb wir keinen Einfluß dieser Änderung auf die Absorption der elektrischen Wellen erwarten können. Es gibt auch in der Tat das erhaltene Material keinen Hinweis in dieser Richtung.

Die schließlichen Resultate können so formuliert werden:

1. Es wurde eine Methode zur Bestimmung der Absorption der elektrischen Wellen in einer kleinen Menge Flüssigkeit ausgearbeitet.

2. Es wurde ein Thermoelement konstruiert, das für die Registrierung der Erwärmung der Flüssigkeit, die durch die Absorption der elektrischen Wellen verursacht wird, bequem

ist, und frei von der Einwirkung der schädlichen Induktionsströme ist.

3. Es wurde die Absorption der elektrischen schwach gedämpften Wellen in den Alkoholen der Fettreihe untersucht.

4. Es wurde in dem Wellenintervalle von $\lambda/2 = 285$ mm bis $\lambda/2 = 440$ mm selektive Absorption für alle untersuchten Alkohole gefunden.

Moskau 1917.

(Eingegangen 10. April 1922.)

4. *Serienzusammenhänge im Bogenspektrum des Chroms;* *von H. Gieseler.*

Die Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Prof. Paschen unternommen. In einer Dissertation von Richter[1]) fanden sich schon einige Hinweise auf Gesetzmäßigkeiten, außerdem wurden mir liebenswürdigerweise von Herrn Prof. Paschen Aufzeichnungen zur Verfügung gestellt, die Zusammenstellungen einiger häufig vorkommender Differenzen enthielten; trotzdem gelang es zunächst nicht, die Linien in ein Rydbergsches Schema einzuordnen. Auch waren die Zeemaneffekte völlig andere als die bereits für Dublets und Triplets bekannten. Erst mit Hilfe der Landéschen[2]) Theorie gelang es, auf Grund der Zeemaneffekte die Gruppen übersichtlich zu ordnen und Serienzusammenhänge nachzuweisen.

Experimentelles.

Die Messungen der Zeemaneffekte wurden zur Hauptsache an einer Chromaufnahme gemacht, welche S. Popow im Tübinger Institut mit der dort befindlichen großen Gitteraufstellung gemacht hat. Die Aufnahme ist in Luft gemacht worden. Als Elektroden dienten Kohlenlamellen, die in einer Schmelze von Silbernitrat und Chromnitrat gekocht worden waren. Die Stärke des magnetischen Feldes betrug 37750 Gauss. Außerdem stand noch eine zweite Aufnahme zur Verfügung, die von mir ebenfalls mit der Gitteraufstellung und dem Elektromagneten des Instituts, aber im Vakuum gemacht wurde. Als Elektroden dienten Metallplättchen, die aus einer von Herrn Dr. Schüler angegebenen Mischung aus Chrom- und Magnesiumpulver gepreßt wurden. Stärke des magnetischen Feldes: 32830 Gauss. Da die Aufnahme bedeutend lichtschwacher war, als die Popowsche wurde sie mehr zur Orientierung als zur Messung be-

1) Richter, Diss. Göttingen 1914.

2) A. Landé, Über den anomalen Zeemaneffekt. Zeitschr. f. Physik. 5. Heft 4. S. 231. 1921.

nutzt. Dann wurde noch eine Aufnahme ohne Magnetfeld mit der Gitterauffstellung gemacht. Als Lichtquelle diente eine nach Angaben von Herrn Dr. Back konstruierte Abreißfunkenlampe mit Elektroden aus metallischem Chrom. Die Aufnahme wurde in Wasserstoff von geringem Druck gemacht, um das Auftreten der Banden zu vermeiden.

Den Schlüssel zum Chromspektrum geben die $3a/2$ Gruppen, wie sie ähnlich schon bei andern Elementen, z. B. Ca, Ba, Sr gefunden wurden. Im Bogenspektrum des Chroms finden sich drei solche Gruppen. Sie bestehen aus je zwölf Linien, die sich in ein Rydbergsches Schema ordnen lassen. Die Linien sind im folgenden in ein Rydbergsches Schema geordnet angegeben und zwar ist bei jeder Linie erst die Intensität, dann λ_{Luft} in Å.-E. und darunter $\nu = 10^8 \lambda^{-1}{}_{\text{Vak.}}$ angegeben. Die Zeemaneffekte der Gruppe, soweit sie nicht in der Tabelle der Zeemaneffekte, die der Arbeit beigegeben ist, enthalten sind, wurden aus Richter entnommen. Zwischen jeder Vertikal- und Horizontalreihe ist im Durchschnitt die Differenz angegeben, die diese Reihe Linien von der nächsten trennt. Unter jeder Reihe sind die dazugehörenden Quantenzahlen K[1]) angegeben, wie sie sich auch in Übereinstimmung mit anderen Zeemaneffekten ergeben haben. Zur Festlegung der K-Quanten möchte ich noch bemerken, daß ich mich zuerst veranlaßt fühlte, den Termen die Quanten 2, 1, 0, −1, −2 zuzuschreiben und somit die azimutale Quantenzahl $n = 2$ für den p-Term (da $K \leqq n$) festzuhalten. Die Aufspaltungen dieser Gruppe geben ja auch keinen weiteren Aufschluß über die Anzahl der Quanten bei den einzelnen Linien, denn sämtliche zeigen als magnetisches Aufspaltungsbild ein einfaches Triplett. Erst die magnetischen Aufspaltungsbilder der Linien, die den später gefundenen Gruppen angehören bei 4651 und 4351 zeigten in der Anzahl der π- und σ-Komponenten ein Maß für die Zahl der Quanten. Demgemäß habe ich die inneren Quanten 4, 3, 2, 1, 0 für die p-Terme festgelegt und die azimutale Quantenzahl n erhöht.

Sämtliche Linien dieser Gruppen haben im Magnetfeld die Aufspaltung $3a/2$. Von der dritten Gruppe konnten die Linien 2899,314; 2896,862; 2911,251 nicht gemessen werden. Die Gruppe ist sehr schwach und wird von einer stärkeren Gruppe

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Physik 63. S. 221. 1920.

			6			
			3916,384		0	$-p_0'$
			25526,68		82,52	
		7	5	6		
		3921,187	3903,306	3894,179	1	$-p_1'$
		25495,38	25612,20	25672,22	118,24	
	8	6	6			
	3928,786	3903,091	3885,361		2	$-p_2'$
	25446,07	25613,57	25730,49		129,66	
5	7	6				
3941,639	3908,902	3883,41			3	$-p_3'$
25363,14	25575,51	25743,41			144,49	
9	6					
3919,314	3886,936				4	$-p_4'$
25507,60	25720,03					
4 212,4	3 167,7	2 116,87	1 60,02	0		
p_4	p_3	p_2	p_1	p_0		

			3			
			2992,016		0	$-p_0''$
			33412,75		64,54	
		3	2	4		
		2996,691	2986,247	2980,911	1	$-p_1''$
		33360,57	33479,29	33537,25	119,87	
	3	3	3			
	3001,103	2985,980	2975,595		2	$-p_2''$
	33311,57	33480,31	33597,29		167,18	
3	3	4				
3005,167	2986,114	2971,218			3	$-p_3''$
33266,47	33478,75	33646,69			206,97	
3	3					
2986,592	2967,762				4	$-p_4''$
33473,36	33685,80					
4 212,36	3 167,79	2 116,85	1 59,96	0		
p_4	p_3	p_2	p_1	p_0		

des Funkens überlagert. Es besteht aber wohl kein Zweifel, daß auch diese Linien die verlangte Aufspaltung zeigen werden, weil sie mit den übrigen die bekannten Differenzen bilden. Analog den Gruppen im Ca, Ba, Sr kann man auch diese als eine Kombination von p-Termen ansehen. Die Kombination $p_1 p_1'$ ($K = 0$; $K' = 0$)[1]) fällt aus. Wir würden es also beim Chrom mit fünf verschiedenen p-Termen mit den Quanten: 4 bis 0 zu

1) A. Landé, Phys. Zeitschrift 22. S. 414. 1921. Auswahlregel B'.

			2		0	$-p_0'''$
			2905,591			
			34406,48		74,49	
		2	1	2	1	$-p_1'''$
		2909,166	2899,314	2894,278		
		34364,26	34480,97	34540,97	145,92	
	3	2	1		2	$-p_2'''$
	2911,012	2896,862	2887,100			
	34342,43	34510,25	34626,88		209,54	
2	2	2			3	$-p_3'''$
2911,251	2893,359	2879.383				
34339,60	34551,99	34719,69			260,06	
3	2				4	$-p_4'''$
2889,372	2871,745					
34599,68	34812,03					
4 212,37	3 167,73	2 116,70	1 60,00	0		
p_4	p_3	p_2	p_1	p_0		

tun haben. Eigentümlicherweise sind die p'''-Terme der dritten $3a/2$ Gruppe weiter auseinandergezogen als die p''-Terme der zweiten Gruppe. Schon bei den Termen $p_5'' p_4'' p_3''$ zeigt sich diese weitere Aufspaltung gegenüber den entsprechenden p'-Termen.

Die Differenzen, die zwischen den Linien der Horizontalreihen auftreten, habe ich im weiteren Spektrum nicht mehr gefunden; die Differenzen der Vertikalreihen kommen jedoch noch häufig vor. Zunächst bei verschiedenen Gruppen, die man als Glieder von pd-Serien bezeichnen kann, weil die Linien der Gruppen im Bogen und Funken nahezu gleiche Intensität zeigen. Ich habe im Chrom zwei verschiedene pd-Serien gefunden. Bei beiden Serien treten die aus den $3a/2$ Gruppen bekannte Differenzen der p-Terme auf in Verbindung mit neuen Differenzen. Ein Glied der pd'-Serie liegt bei 4373,424. Die Gruppe wird in der gleichen Schreibweise wieder gegeben wie die $3a/2$ Gruppen. Mit der Erhöhnng der azimutalen Quantenzahl n für den p-Term geht Hand in Hand die Erhöhung der azimutalen Quantenzahl für den d-Term ($n = 5$). Die zweite pd-Serie hat die azimutale Quantenzahl $n = 3$, jedoch andere Aufspaltungsfaktoren g als der bisher bekannte d-Term $n = 3$, der die I. N.-S. bildet.

Von den meisten Linien sind die Zeemaneffekte gemessen und, soweit sie nicht Richter entnommen sind, in der Tabelle

		6	8	8		
		4373,424	4351,218	4339,887	1	$-d_1^1$
		22859,07	22975,72	23035,75	71,47	
	5	8	5			
	4391,923	4359,795	4337,728		2	$-d_2^1$
	22862,81	22930,52	23047,21		106,60	
4	8	8				
4412,421	4371.448	4429,618			3	$-d_3^1$
22657,04	22869,43	23037,12			140,94	
8	10					
4385,146	4344,672				4	$-d_4^1$
22798,00	23010,35				173,86	
10						
4351,946					5	$-d_5^1$
22971,86						
4 212,37	3 167,7	2 116,67	1 60,03	0		
p_4	p_3	p_2	p_1	p_0		

angegeben. Da die Aufspaltung für die p-Terme: $g = 3/2$ bekannt war, ließen sich nach der Landéschen Theorie die magnetischen Aufspaltungsfaktoren g für die d^1 Terme berechnen.

Term	K	g
d_1^1	1	0
d_2^1	2	1
d_3^1	3	$^5/_4$
d_4^1	4	—
d_5^1	5	—

Die Aufspaltungsfaktoren für d_4^1 une d_5^1 lassen sich wegen der sehr komplizierten Typen der Zeemaneffekte nicht berechnen. Die Zugehörigkeit der Linie 4351,946 zu der Gruppe wurde angenommen, weil sie einen sehr komplizierten Zeemaneffekt zeigt und außerdem ihrer Intensität nach zu der Gruppe zu gehören scheint. In der folgenden Tabelle sind die Zeemaneffekte nach der Landéschen Theorie berechnet und der Beobachtung gegenübergestellt.

Die eingeklammerten Ziffern bedeuten π-Komponenten. Besonders bei den ersten Linien der Gruppe, wo der geringen Quantenzahl wegen die Zeemaneffekte noch gut zu messen sind, ist die Übereinstimmung sehr gut. (0) 0 zeigt an, daß die Linie im Magnetfeld unverändert bleibt und sowohl senkrecht

	$p_4\,(g = 3/2)$	$p_3\,(g = 3/2)$	$p_2\,(g = 3/2)$	$p_1\,(g = 3/2)$	$p_0\,(g = 3/2)$
$d_1^1\,(g = 0)$ Theorie			(0) (3) 0 3 6 / 2	(3) 0 3 / 2	(0) 0
$d_1^1\,(g = 0)$ Beob.			(0) (3) 0 3 6 / 2	(3) 0 3 / 2	(0) 0
$d_2^1\,(g = 1)$ Theorie		(0)(1)(2) 12345 / 2	(1) (2) 1 2 3 4 / 2	(0) (1) 1 2 3 / 2	
$d_2^1\,(g = 1)$ Beob.		—	(1) (2) 1 2 3 4 / 2	(0) (1) 1 2 3 / 2	
$d_3^1\,(g = 5/4)$ Theorie	(0)(1)(2)(3)3456789 / 4	(1)(2)(3) 345678 / 4	(0)(1)(2) 34567 / 4		
$d_3^1\,(g = 5/4)$ Beob.		(2) (3) 3 . . . 7 8 / 4	(0) (1) 3 4 5 / 4		

wie parallel polarisiert ist. Demgemäß mußte g für den d-Term $= 0$ gesetzt werden, was auch mit den übrigen Zeemaneffekten von $d_1^1 p_1$ und $d_1^1 p_2$ übereinstimmt.

Ein anderes Glied dieser $p\,d^1$-Serie findet sich bei 3031 463. Es ist jedoch sehr schwer diese Gruppe herauszuschälen, da sie von einem Glied einer $p\,d^1$-Serie überlagert wird und außerdem von einer starken Funkengruppe.

		2	2	2	1	$- d_1^1$
		3031,463	3020,826	3015,308		
		32977,94	33094,06	33154,63	65,30	
			3			
			3014,877		2	$- d_2^1$
			33159,36		114,25	
	3	2			3	$- d_3^1$
	3030,357	3015,045				
	32990,01	33157,49			138,48	
3	2				4	$- d_4^1$
3037,161	3017,691					
32916,07	33128,49				168,68	
3					5	$- d_5^1$
3021,679						
33084,75						
4 212,42	3 167,47	2 116,12	1 60,57	0		
p_4	p_3	p_2	p_1	p_0		

Sicher ist die Übereinstimmung der Zeemaneffekte der Linien 3031,463; 3020,826; 3015,308 mit den entsprechenden der vorhergehenden Gruppe. Die Zugehörigkeit der übrigen Linien wurde angenommen, weil die bekannten Differenzen hier wieder auftreten. 3037,161; 3017,691; 3021,679 zeigen außerdem sehr komplizierte Zeemaneffekte, die auf eine höhere Quantenzahl schließen lassen; 3037,161 ohne mittlere π-Komponente.

Außer diesen zwei, wahrscheinlich zu einer Serie gehörenden Gruppen, finden sich noch andere Kombinationen im Chrom, die ich einer $p\,d^{II}$-Serie zugeordnet habe. Die Linien zeigen ebenfalls im Bogen und Funken nahezu gleiche Intensität. Die Zeemaneffekte sind andere wie bei der $p\,d^{II}$-Serie und die Aufspaltungsfaktoren g der d^{II}-Terme sind ebenfalls andere, wie bei der d^{I}-Serie. Die Glieder dieser zweiten $p\,d$-Serie zeichnen sich von der ersten auch noch dadurch aus, daß sie im konstanten Abstand noch ein Triplet haben, welches von einem Einzelterm P_2 mit dem Quant $K = 2$ gebildet wird. Wir haben also bei dieser Serie 6 p-Terme. Der d^{II}-Term tritt hingegen nur dreiquantig auf, wenigstens gelang es nicht, weitere Linien zu finden, die man noch zu den einzelnen Gruppen hätte hinzurechnen können.

		9	8	7	8	1	$-d_1^{II}$
		4651,462	4626,357	4613,540	4580,218		
		21492,72	21609,33	21669,36	21826,96	163,72	
	9	8	8		8	2	$-d_2^{II}$
	4652,339	4616,303	4591,57		4546,218		
	21488,65	21656,41	21773,07		21990,69	240,12	
8	7	6			7	3	$-d_3^{II}$
4646,351	4600,929	4565,631			4497,025		
21516,34	21728,79	21896,50			22230,82		
4 212,45	3 167,74	2 116,63	1 60,03	0 157,6	2		
p_4	p_3	p_2	p_1	p_0	P_2		

Horizontal haben wir wieder die bekannten p-Differenzen, nur tritt noch der neue Term P_2 hinzu. Die vertikal auftretenden Differenzen sind neu. Fast alle Zeemaneffekte der Gruppe wurden gemessen und aus ihnen die Aufspaltungsfaktoren g berechnet.

Term	K	g
d_1^{II}	1	$^5/_2$
d_2^{II}	2	$^{11}/_6$
d_3^{II}	3	$^5/_3$

	$p_4(g=3/2)$	$p_3(g=3/2)$	$p_2(g=3/2)$	$p_1(g=3/2)$	$p_0(g=3/2)$	$P_2(g=2)$
Theorie $d_1^{II}(g=5/2)$ Beob.			$\frac{(0)(2)1\,3\,5}{2}$ $\frac{(0)(2)1\,3\,5}{2}$	$\frac{(2)3\,5}{2}$ $\frac{(2)3\,5}{2}$	$\frac{(0)5}{2}$ $\frac{(0)5}{2}$	$\frac{(0)(1)3\,4\,5}{2}$ $\frac{(0)(1)3\,4\,5}{2}$
Theorie $d_2^{II}(g=11/2)$ Beob.		$\frac{(0)(2)(4)5\,7\,9\,11\,13}{6}$ $\frac{(0)(2)(4)5\,7\,9\,11}{6}$	$\frac{(2)(4)7\,9\,11\,13}{6}$ $\frac{(2)(4)7\,9\,11\,13}{6}$	$\frac{(0)(2)9\,11\,13}{6}$ $\frac{(0)(2)11\,13}{6}$		$\frac{(1)(2)10\,11\,12\,13}{6}$ $\frac{(1)(2)10\ldots13}{6}$
Theorie $d_3^{II}(g=5/2)$ Beob.	$\frac{(0)(1)(2)(3)6\,7\,8\,9\,10\,11\,12}{6}$ $\frac{(0)(1)(2)(3)6\,7\,8}{6}$	$\frac{(1)(2)(3)7\,8\,9\,10\,11\,12}{6}$ $\frac{(1)\ldots(3)7\ldots11}{6}$	$\frac{(0)(1)(2)8\,9\,10\,11\,12}{6}$			$\frac{(0)(1)(2)3\,4\,5\,6\,7}{3}$ $\frac{(0)(1)(2)3\,4}{3}$

In der Tabelle auf S. 154 wurden die Zeemaneffekte nach der Landéschen Theorie berechnet und der Beobachtung gegenübergestellt. Die Übereinstimmung ist besonders bei den Gliedern mit niederer Quantenzahl eine sehr gute.

Ein anderes Glied der Serie liegt bei 3029,277.

		3	3	3	3	1	$-d_1^{II}$
		3029,277	3018,606	3013,152	2998,912		
		33001,77	33118,39	33178,39	33335,89	52,54	
	2	4	4		2	2	$-d_2^{II}$
	3039,886	3024,468	3013,838		2994,182		
	32886,62	33054,35	33170,80		33388,54	60,55	
5	3	2			1	3	$-d_3^{II}$
3058,987	3034,303	3018,918			2988,781		
32784,73	32947,08	33114,99			33449,18		

4	212,35	3	167,82	2	116,53	1	60,00	0	157,5	2.	
p_4		p_3		p_2		p_1		p_0		P_2	

Auch von diesem Gliede sind die Zeemaneffekte zum Teil gemessen[1]) und in Übereinstimmuug mit den magnetischen Aufspaltungsbildern des andern Gliedes der $p\,d^{II}$-Serie gefunden. Als drittes Glied dieser Serie könnte eine Gruppe von Linien bei 2761,85 in Betracht kommen. Zeemaneffekte konnten wegen der geringen Intensität der Linien nicht beobachtet werden. Auffallend ist, daß die Differenzen der d^{II}-Terme bei diesem Gliede größer werden, als bei dem vorhergehenden.

	3	3	Theorie	4	1	$-d_1^{II}$
	2761,85	2752,960	2748,429	2736,570		
	36197,12	36313,99	36373,99	36581,55	61,16	
	6	4	Theorie	5	2	$-d_2^{II}$
	2770,006	2757,192	2748,329	2732,000		
	36090,53	36258,28	36375,15	36592,63	72,51	
8	3	1	gemess. 3 u.	5	3	$-d_3^{II}$
2780,787	2764,445	2751,689	2748,379	2726,595		
35950,66	36163,09	36330,74	36374,48	36665,19		

4	212,43	3	167,7	2	116,87	1	60,00	0	157,56	2	
p_4		p_3		p_2		p_1		p_0		P_2	

Die Linien 2748,429 und 2748,329 konnten nicht getrennt gemessen werden. Die gemessene Linie 2748,379 liegt genau zwischen den beiden theoretisch berechneten.

1) Vgl. beigefügte Tabelle der Zeemaneffekte.

Außer bei den beiden $p\,d$-Serien kommen die p-Differenzen in Verbindung mit dem Einzelterm noch bei einer sehr starken Gruppe vor. Das Triplet, das der Einzelterm P_2 in dieser Gruppe bildet, tritt nach de Watteville[1]) sogar in der Fiamme auf. Wir scheinen es hier also mit einem Grundglied zu tun zu haben. Deshalb habe ich die vertikal auftretenden Differenzen als Differenzen der s-Terme angesehen.

12	10	7			12	
5409,995	5348,519	5300,932			5208,598	3	$-s_3$
18479,27	18692,26	18860,03			19193,79	8,41	
	10	10	8		12	
	5345,998	5298,28	5265,893		5206,215	2	$-s_2$
	18700,47	18868,28	18984,95		19202,55	5,64	
		10	10	8	12	
		5296,873	5264,332	5247,741	5204,692	1	$-s_1$
		18873,91	18990,58	19050,59	19208,20		
4 212,39	3 167,68	2 116,67	1 60,01	0 157,61	2		
p_4	p_3	p_2	p_1	p_0	P_2		

Die Zeemaneffekte konnten nur von 5208,599 und 5206,215 gemessen werden, letztere Linie aber schon stark gestört. 5247,741; 5264,332; 5296,873 konnten aus Hartmann[2]) entnommen werden, so ließen sich wenigstens die Aufspaltungsfaktoren von s_3 und s_1 berechnen.

Term	K	g
s_3	3	$^5/_3$
s_2	2	
s_1	1	$^7/_3$

Zu bemerken ist noch, daß der s-Term mit wachsender Quantenzahl zunimmt, während der d-Term bei beiden Serien mit wachsender Quantenzahl abnimmt. Weitere Glieder der Serie habe ich nicht gefunden.

Eine nicht sehr starke Gruppe möchte ich noch erwähnen bei 2557,230. Die Terme, die in dieser Gruppe mit den bekannten p-Termen Kombinationen bilden, wachsen im Sinne der s-Terme. Es fehlt jedoch das Triplet, welches von dem Einzelterm gebildet wird. Da die Zeemaneffekte nicht zu

1) De Watteville, Phil. Trans. 204. S. 139, 168.
2) W. Hartmann, Diss. Halle 1907.

messen waren, ließ sich nicht feststellen, ob sie bisher bekannte Typen zeigen.

3	2	1			3
2591,938	2577,748	2566,638			
38569,83	38782,09	38950,06			89,10
	2	2	1		2
	2571,836	2560,789	2553,136		
	38871,33	39039,02	39155,95		54,34
		2	2	1	1
		2557,230	2549,60	2545,724	
		39093,35	39210,30	39270,05	

4	212,36	3	167,85	2	116,94	1	59,75	0	
p_4		p_3		p_2		p_1		p_0	

Zum Schluß möchte ich noch auf eine Gesetzmäßigkeit hinweisen, die nur zwischen den magnetischen Aufspaltungsfaktoren g der d^{I}- und d^{II}-Serie und den Faktoren g der bisher bekannten I. N. S. zu sein scheint. In der folgenden Tabelle sind die g-Werte zusammengestellt. In der sofort darunter befindlichen Tabelle sind die Differenzen der g-Werte gebildet, ausgehend von d^{II}.

K	d^{II}	I. N. S.	d^{I}
3	$^5/_3$	$^4/_3$	$^5/_4$
2	$^{11}/_6$	$^7/_6$	1
1	$^5/_2$	$^1/_2$	0

$K = 3$	$+ \,^4/_{12}$	$+ \,^1/_{12}$
$K = 2$	$+ \,^4/_6$	$+ \,^1/_6$
$K = 1$	$+ \,^4/_2$	$+ \,^1/_2$

Die Differenzen zeigen deutlich eine gewisse Gesetzmäßigkeit. Der Nenner dieser Zahlen hängt von den jeweiligen K-Werten ab. Man kann ihn sich entstanden denken als $K(K+1)$, während der Zähler unabhängig von K ist und wahrscheinlich von der Quantenzahl n abhängt.

Bevor ich die Arbeit abschließen, möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Paschen, der mir die Anregung zu dieser Arbeit gegeben hat und mir bei der Ausführung derselben stets hilfreich zur Seite stand, meinen herzlichsten Dank ergebenst aussprechen.

Tabelle der Zeemaneffekte.

Die Tabelle enthält in der ersten Kolonne die Wellenlängen λ, die Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Bd. 5 entnommen, sind und zwar ist aus den dort aufgeführten genauesten Messungen jeweils das Mittel genommen. Nur sehr wenige dort nicht angegebenen oder ungenau gemessenen Linien wurden von mir auf der feldfreien Anfnahme gemessen.

Kolonne 2 enthält unter π und σ die Aufspaltungen der parallel bzw. senkrecht zum Magnetfeld schwingenden Komponenten. Ihre Größe ist $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 \cdot H} \cdot 10^{13} \cdot H =$ magnetische Feldstärke.

Die dritte Kolonne gibt die Zerlegung in Bruchteilen von $\alpha = 4{,}692$ an, wobei bie eingeklammerten Zahlen die π-Komponenten bezeichnen.

Die vierte Kolonne enthält die nach dieser Zerlegung berechneten Größen $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 \cdot H} \cdot 10^{13}$ zum Vergleich mit Kolonne 2.

Wellenl. λ in Å.-E.	Beobachtung π	Beobachtung σ	Zerlegung	Berechnet π	Berechnet σ	Bemerkung
2871,745	0	7,08	$\frac{(0)\,3}{2}$	0	7,04	2. Ord. gem.
2879,383	0	7,06	$\frac{(0)\,3}{2}$	0	7,04	2. Ord. gem.
2889,372	0	6,98	$\frac{(0)\,3}{2}$	0	7,04	2. Ord. gem.
2894,278	0	7,05	$\frac{(0)\,3}{2}$	0	7,04	2. Ord. gem.
2911,012	0	7,18	$\frac{(0)\,3}{2}$	0	7,04	2. Ord. gem.
2985,980	0	7,01	$\frac{(0)\,3}{2}$	0	7,04	4. Ord.
2998,909	0 2,12	7,14 9,37 11,28	$\frac{(0)(1)\,3\,4\,5}{2}$	0 2,35	7,04 9,38 11,73	
3013,152	0	11,46	$\frac{(0)\,5}{2}$	0	11,75	4. Ord.
3013,888	0 1,23	5,51	$\frac{(0)\,(2)\,7}{6}$	0 1,50	5,48	4. Ord. sehr schwach

Wellenl. λ in Å.-E.	Beobachtung π	Beobachtung σ	Zerlegung	Berechnet π	Berechnet σ	Bemerkung
3017,691	0 : 2,09	3,90 : :	$\frac{(0)\ldots(3)\,5\ldots}{6}$	0 : 2,35	3,91 : :	4. Ord. kompl.
3018,606	3,53	7,01 11,28	$\frac{(2)\,3\,5}{2}$	4,69	7,05 11,75	4. Ord. sehr schwach, gestört
3024,469	Dif. 1,85	4,92 : 8,57	$\frac{(2)\ldots(4)\,7\ldots11}{6}$	2,35	5,48 : 8,61	5. Ord. kompl.
3029,277	Pol. nicht erkennbar 0 2,58 4,68		$\frac{0\,1\,2}{2}$	0 2,35 4,69		3. Ord. schwach
3037,161	: 2,85	4,74 : 9,29	$\frac{\ldots(4)\,6\ldots12}{6}$	: 3,13	4,69 : 9,38	kompl.
3053,987	0 : 1,45	4,71 :				4. Ord. kompl.
3903,306	0	6,92	$\frac{(0)\,3}{2}$	0	7,04	σ nur auf einer Seite gem.; überlagert von 3903,091
4337,728	0 2,33	2,33 4,63 8,07	$\frac{(0)\,(1)\,1\,2\,3}{2}$	0 2,35	2,35 4,69 7,04	Nach Babcock [1]) σ ± 6,89 statt 8,07
4339,618	0 1,25	3,43 4,61 5,75	$\frac{(0)\,(1)\,3\,4\,5}{4}$	0 1,17	3,52 4,69 5,86	teilw. überdeckt 2. Ord.
4339,887	Ohne Aufspaltung π und σ 4339,858					
4344,672	0 : 2,37	4,81 : :				kompl.
4371,448	2,40 3,54	3,54 : 8,46 9,33	$\frac{(2)\,(3)\,3\ldots7\,8}{4}$	2,35 3,52	3,52 : 8,21 9,38	Pol. undeutlich. Nach längeren λ 8,46 gem. nach kürzeren λ 9,33
4497,025	0 1,61 3,09	4,59 6,25	$\frac{(0)\,(1)\,(2)\,3\,4}{3}$	0 1,56 3,13	4,69 6,26	

1) H. D. Babcock, Astr. Journ. 38. 1911. Zit. nach Richter.

Wellenl. λ in Å.-E.	Beobachtung π	Beobachtung σ	Zerlegung	Berechnet π	Berechnet σ	Bemerkung
4546,218	? 1,68 :	7,86 : 10,10	$\frac{(?)\,(2)\,10\ldots13}{6}$	1,56	7,88 10,95	
4580,218	0 2,29	7,14 9,44 11,56	$\frac{(0)\,(1)\,3\,4\,5}{2}$	0 2,35	7,04 9,38 11,73	
4591,57	0 1,62	8,52 10,26	$\frac{(0)\,(2)\,11\,13}{6}$	0 1,50	8,60 10,17	sehr schwach
4600,929	1,10 : 2,52	5,61 : 8,49	$\frac{(1)\ldots(3)\,7\ldots11}{6}$	0,78 2,35	5,47 8,61	sehr diffus
4613,540	0	11,82	$\frac{(0)\,5}{2}$	0	11,75	
4616,303	1,49 3,11	5,35 7,09 8,45 10,2	$\frac{(2)\,(4)\,7\,9\,11\,13}{6}$	1,57 3,13	5,48 7,08 8,61 10,18	
4626,357	4,71	7,18 12,01	$\frac{(2)\,3\,5}{2}$	4,69	7,08 11,75	
4646,351	0 0,80 1,72 2,45	4,79 5,64 6,5	$\frac{(0)\,(1)\,(2)\,(3)\,6\,7\,8}{6}$	0 0,78 1,57 2,35	4,69 5,49 6,25	3. Ord.
4651,462	0 4,68	2,22 6,89 12,18	$\frac{(0)\,(1)\,(2)\,3\,5}{2}$	0 4,69	2,35 7,04 11,73	
4652,339	0 1,71 3,67	3,67 5,63 7,22 8,93	$\frac{(0)\,(2)\,(4)\,5\,7\,9\,11}{6}$	0 1,57 3,13	3,91 5,48 7,04 8,61	
5206,215	2,92	9,19				kompl. gestört
5208,598	0 1,61 ?	4,48 :	$\frac{(0)\,(1)\,(2)\,3}{3}$	0 1,56 3,13	4,89	

Tübingen, den 10. Juni 1922.

(Eingegangen 19. Juni 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Fabrik für physikalische, chemische und technische Apparate

Gegründet 1890 — Gegründet 1890

Pfeiffer's

Hoch-Vakuum-Pumpen

für Wissenschaft und Technik

für Saugleistungen bis 30 cbm stündlich und Vakua bis $^1/_{1000000}$ mm Hg

Neuheit! **Quecksilber-Dampfstrahlpumpe** *Neuheit!*

nach System Pfeiffer (D. R. P. angem.) ganz aus Stahl.

Rotierende Kapsel-Öl-Luftpumpe D. R. P.
mit Elektromotor direkt gekuppelt.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4—1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung. Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Neukonstruktionen

genauester und sorgfältiger wissenschaftlicher Instrumente und Apparate nach Angaben übernimmt unter voller Wahrung und Sicherstellung des geistigen Eigentums des Auftraggebers die

Konstruktions- u. Versuchswerkstättenabteilung der Siemens-Neuland Aktiengesellschaft

München Pachaer Str. 13

1922. № 19.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 69.

1. *Zur Quantentheorie der Gase und Flüssigkeiten;* *von A. Byk.*

Inhaltsübersicht: I. Das Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände. — II. Prüfung des Quantentheorems in den einzelnen Gebieten der Thermodynamik (freien Energie) der Gase und Flüssigkeiten. A. Die Zustandsgleichung (Differentialquotient der freien Energie nach dem Volumen). 1. Homogene Zustände. a) Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes. b) Zustandsgleichung von Kirstine Meyer. c) Zustandsgleichungen von Avogadro, D. Berthelot und A. Wohl. d) Zustandsgleichungen entarteter Gase. e) Boyle-Temperatur. f) Inversionstemperatur des Joule-Kelvin-Effekts. 2. Sättigungszustände. a) Dampfdruckgleichungen von van der Waals und von Nernst. b) Die Regel der geraden Mittellinie der Dampf- und Flüssigkeits-Dichten von Cailletet und Mathias. 3. Kritischer Zustand. a) Kritischer Koeffizient. b) Kritischer Dampfspannungskoeffizient. B. Die Entropiegleichung (Differentialquotient der freien Energie nach der Temperatur). 1. Die Entropiekonstante der einatomigen Gase. 2. Die Nernstsche chemische Konstante. C. Die Gleichung der inneren Energie (Helmholtzsche Differentialgleichung der freien Energie). 1. Spezifische Wärme und Entartung der einatomigen Gase (Temperaturkoeffizient der inneren Energie). 2. Revidierte Troutonsche Regel der Verdampfungswärme (Volumkoeffizient der inneren Energie). — III. Prüfung des Quantentheorems außerhalb der reinen Thermodynamik. A. Innere Reibung der Gase und Flüssigkeiten. 1. Reibungskoeffizient nach Reinganum. 2. Reibungskoeffizient nach Nernst. B. Kapillarität. C. Molekularrefraktion.

I. Das Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände.

Vor einiger Zeit[1]) habe ich eine Methode zur Einführung der Quantentheorie in die Lehre von den Gasen und Flüssigkeiten mitgeteilt, bei welcher in dem Theorem der übereinstimmenden Zustände das auf die spezifischen Einheiten der betreffenden Substanz reduzierte Plancksche Wirkungsquantum auftritt. Das so modifizierte und von dem Differentialquotienten der freien Energie nach dem Volumen (der Zustandsgleichung)

1) Vgl. A. Byk, Ann. d. Phys. **66**. S. 157. 1921.

auf die freie Energie selbst ausgedehnte Theorem der übereinstimmenden Zustände habe ich als *Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände* bezeichnet. Nachdem damals die Theorie des *reduzierten Wirkungsquantums* zunächst auf den besonderen Fall des Sättigungszustandes als Beispiel angewandt worden ist, soll jetzt diese Auffassung auf das *Gesamtgebiet* der von dem *Theorem der übereinstimmenden Zustände* beherrschten Erscheinungen *ausgedehnt* werden. Eine vorläufige Übersicht über diese findet sich bereits in der erwähnten Arbeit des Verfassers.[1])

Die in Betracht kommenden *Phänomene* innerhalb der reinen Thermodynamik werden zweckmäßig in die Lehre von der Zustandsgleichung (negativer Differentialquotient der freien Energie nach dem Volumen), von der Entropie (negativer Differentialquotient der freien Energie nach der Temperatur) mit ihren Beziehungen zur chemischen Gleichgewichtslehre, sowie in die Lehre von der inneren Energie (Helmholtzsche Differentialgleichung der freien Energie) mit besonderer Berücksichtigung der spezifischen Wärme (Temperaturkoeffizient der inneren Energie) und der Verdampfungswärme (Volumkoeffizient der inneren Energie) *eingeteilt*.[2]) Dazu kommen als Anwendungsgebiete des Theorems außerhalb des Rahmens der reinen Thermodynamik die innere Reibung, Kapillarität und Molekularrefraktion.

II. Prüfung des Quantentheorems in den einzelnen Gebieten der Thermodynamik (freien Energie) der Gase und Flüssigkeiten.

A. Die Zustandsgleichung (Differentialquotient der freien Energie nach dem Volumen).

Die thermodynamischen Gesetzmäßigkeiten an reinen Substanzen (Systeme mit einem unabhängigen Bestandteil) werden gewöhnlich nach der *Zahl* der beteiligten *Phasen*[3]) in solche

1) Diese Arbeit wird im folgenden mit Mitt. I zitiert. Die hier gebrauchten Bezeichnungen haben, soweit sie mit denen in der genannten Arbeit übereinstimmen, die gleiche Bedeutung wie dort. Ich möchte die Gelegenheit benutzen einen Druckfehler in dieser Arbeit zu verbessern. S. 163, Zeile 20 muß es heißen „Energie × Zeit", *nicht* „Energie : Zeit".

2) Vgl. Mitt. I, S. 172.

3) Es handelt sich hier nicht um Phasen im Sinne der statistischen Mechanik, sondern im Sinne der physikalisch-chemischen Phasenregel des heterogenen Gleichgewichtes.

eingeteilt, die *homogene* Zustände (1 Phase), *Sättigungszustände* (2 Phasen) und *kritische* Zustände (2 identische Phasen) betreffen. Dabei ziehen sich die Gesetze der homogenen Zustände auch auf die beim Sättigungsgleichgewicht beteiligten Phasen, wenn man jede einzeln für sich betrachtet.

1. Homogene Zustände.

a) Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes.

Um das Theorem der übereinstimmenden Zustände an der Zustandsgleichung einer homogenen Phase zu prüfen, benutzt man meistens die Gleichung der Isothermen bzw. in graphischer Darstellung das Isothermennetz.[1]) Die bei den tief siedenden Substanzen hervortretende Abweichung der Isothermen vom klassischen Theorem der übereinstimmenden Zustände haben H. Kamerlingh Onnes und H. W. Keesom[2]) in folgender Weise mit der Individualität der einzelnen Substanz in Zusammenhang gebracht. Sie schreiben die empirische reduzierte Zustandsgleichung

$$(1) \qquad \frac{\Pi\varphi}{\varkappa} = \vartheta\left(1 + \mathfrak{B}\frac{\varkappa}{\varphi} + \mathfrak{C}\frac{\varkappa^2}{\varphi^2}\right),$$

wobei $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bei strenger Erfüllung des klassischen Theorems universelle Funktionen der reduzierten Temperatur darstellen sollten. Dies ist aber beim Vergleich von He mit H_2 einerseits, H_2 mit N_2 und O_2[3]) andererseits keineswegs mehr der Fall. Vielmehr ändert sich bei dem erstgenannten Substanzpaar in dem Temperaturintervall für He zwischen 14,17° K und 90,25° K das Verhältnis der Temperaturen, die gleichen Werten von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$ entsprechen, von 0,183 bis zu 0,251. Indes lassen sich durch ein graphisches Verfahren für je zwei Substanzen Wertepaare von Temperaturen finden, für die bei geeigneter Wahl der kritischen Daten die Paare der reduzierten Isothermen

1) Vgl. J. P. Kuenen, Die Zustandsgleichung (Die Wissenschaft, Heft 20, Braunschweig 1907), S. 78.

2) H. Kamerlingh Onnes und W. H. Keesom, Die Zustandsgleichung (Enzyklopädie der Mathem. Wissensch. V, 1. Heft 5), S. 740 (Anmerkung 399), Leipzig 1912.

3) Es sind hierbei die von Amagat (Annales de chimie et de physique (6) 29. S. 68. 1893) für Luft bestimmten Isothermen zugrunde gelegt, wobei sich N_2 und O_2 im Verhältnis zu H_2 merklich gleichartig verhalten.

wenigstens auf eine bestimmte Strecke hin merklich zur Deckung zu bringen sind. Durch die getroffene Zuordnung sind nicht die kritischen Daten selbst, sondern lediglich ihr Verhältnis bei den betreffenden Substanzen bestimmt; dieses Verhältnis aber erweist sich, eben wegen der unvollkommenen Erfüllung des klassischen Theorems, längs des gesamten Isothermennetzes als veränderlich und nicht identisch mit dem Verhältnis der wahren kritischen Daten. Sind etwa ϑ_{He} und ϑ_{H_2} für das Substanzpaar He und H_2 die auf die wahren kritischen Temperaturen bezogenen reduzierten Temperaturen zweier zusammengehöriger Isothermen, so ergibt sich das scheinbare Verhältnis der kritischen Temperaturen:

$$\frac{\vartheta_{He} \cdot \vartheta_{0He}}{\vartheta_{H_2} \cdot \vartheta_{0H_2}} > \frac{\vartheta_{0He}}{\vartheta_{0H_2}}$$

bzw.

$$\frac{\vartheta_{He}}{\vartheta_{H_2}} > 1 \tag{2}$$

und ebenso für das Substanzpaar H_2 und N_2 bzw. O_2:

$$\frac{\vartheta_{H_2}}{\vartheta_{(O_2, N_2)}} > 1. \tag{3}$$

Also He weicht in bezug auf H_2 in demselben Sinne von der Korrespondenz ab wie H_2 in bezug auf O_2 und N_2; d. h. diese Substanzen ordnen sich, wie Kamerlingh Onnes und Keesom bemerken, in der Reihenfolge ihrer wahren kritischen Temperaturen.

Wir haben den von Kamerlingh Onnes und Keesom bemerkten Zusammenhang der zu deckbaren reduzierten Isothermen zugehörigen reduzierten Temperaturen der verschiedenen Substanzen mit den wahren kritischen Temperaturen eben dieser Substanzen mit Hilfe des reduzierten Wirkungsquantums auszudrücken. Nach unserem Quantentheorem[1]) sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ nicht mehr Funktionen von ϑ allein, sondern auch des Argumentes w. Für eine Reihe zusammenfallender reduzierter Isothermen verschiedener Substanzen ist dann

$$\mathfrak{B}(w, \vartheta) = \text{const}_1, \tag{4}$$

$$\mathfrak{C}(w, \vartheta) = \text{const}_2, \tag{5}$$

1) Vgl. Mitt. I, S. 170. Gleichung (16).

bzw. wenn wir diese Gleichungen nach ϑ aufgelöst denken,

$$(6) \qquad \vartheta = \chi\,(w, \text{const}_1) = \psi\,(w_1\,\text{const}_2)\,.$$

Nun wachsen nach (2) und (3) die Werte von ϑ für He, H_2, (O_2, N_2) regelmäßig mit zunehmendem w ($w_{He} = 2{,}04$; $w_{H_2} = 1{,}12$; $w_{N_2} = 0{,}138$; $w_{O_2} = 0{,}124$). ϑ ist somit in der Tat experimentell als Funktion von w charakterisiert, wie Gleichung (6) es fordert.

b) Zustandsgleichung von Kirstine Meyer.

In anderer Weise wie Kamerlingh Onnes und Keesom hat K. Meyer[1]) den Abweichungen vom Theorem der übereinstimmenden Zustände Rechnung zu tragen gesucht. Sie benutzt als Nullpunkt der Zustandsgrößen die kritischen Werte, kehrt ihr Vorzeichen um und führt für jede von ihnen eine spezifische, beim Volumen und der Temperatur von den kritischen Daten verschiedene, beim Drucke damit identische Einheit ein. Die in diesem Sinne reduzierten Zustandsgrößen, die dann nach K. Meyer das klassische Theorem der übereinstimmenden Zustände erfüllen sollen, sind somit:

$$(7)\ \frac{\vartheta_0 - T}{\tau_m}, \qquad (8)\ \frac{\Pi_0 - p}{\Pi_0}, \qquad (9)\ \frac{\varphi_0 - v}{v_m},$$

wobei τ_m und v_m die spezifische Temperatur- bzw. Volum-Einheit der Substanz bezeichnet.

Setzt man $\tau_m = \vartheta_0 - T_m$, $v_m = \varphi_0 - V_m$, so gehen (7), (8), (9) über in

$$(10)\ 1 - \frac{T - T_m}{\vartheta_0 - T_m}, \qquad (11)\ 1 - \frac{p}{\Pi_0}, \qquad (12)\ 1 - \frac{v - V_m}{\varphi_0 - V_m},$$

oder

$$(13)\ 1 - \frac{\vartheta - \frac{T_m}{\vartheta_0}}{1 - \frac{T_m}{\vartheta_0}}, \qquad (14)\ 1 - \Pi, \qquad (15)\ 1 - \frac{\varphi - \left(\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}\right)}{1 - \left(\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}\right)}.$$

Indem wir jetzt die zweiten Glieder in (10), (11), (12) als reduzierte Zustandsgrößen betrachten, können wir das Meyersche Verfahren auch so charakterisieren, daß die p-v-T-Zustandsflächen reduziert werden, nachdem man sie längs der T- und der v-Achse etwas verschoben hat.[2]) Da die Zustandsgleichung

1) Zeitschr. für physik. Chemie **32**. S. 1. 1900; **71**. S. 325. 1910.
2) Vgl. Kamerlingh Onnes und Keesom, a. a. O., S. 735.

sich als eine universelle Funktion der Größen (13), (14), (15) darstellt, die ja nur Umformungen von (7), (8), (9) sind, so hat sie die von unserem Quantentheorem geforderte Form, sofern

$$\frac{T_m}{\vartheta_0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}\right)$$

universelle Funktionen von w, φ, ϑ sind. Das Verfahren von K. Meyer läßt die Werte von τ_m und v_m bzw. T_m und V_m bis zu einem gewissen Grade unbestimmt. Sie setzt nämlich willkürlich für H_2[1]) $\tau_m = \vartheta_0$ bzw. $T_m = 0$ und erhält damit eine Tabelle der T_m für eine Reihe verschiedener Substanzen. Nach dieser sind[2]) in der 3. Kolumne der Tabelle I die Werte von $(T_m/\vartheta_0)_{ber.}$ für die einzelnen in der Vorkolumne bezeichneten Substanzen bestimmt.

Man sieht, daß von Methylformiat an $(w = 0{,}0385)$ $\frac{T_m}{\vartheta_0}$ in engen Grenzen, zwischen 0,28 und 0,34, schwankt, während für die Substanzen mit größerem w bzw. kleinerem ϑ_0 die Werte dieser Quotienten bis zu 0 hinabgehen. Soweit nach K. Meyer Gültigkeit der Konstanten T_m für das ganze Isothermennetz beansprucht wird[3]), muß T_m/ϑ_0 von φ und ϑ unabhängig sein und sich also in der Form $\chi(w)$ darstellen lassen, wobei gemäß dem Übergang des Quantentheorems in das klassische, im Grenzfalle kleiner w, $\frac{d\chi(w)}{dw_{(w=0)}} = 0$ sein soll.

Sowohl die Tabellierung von T_m/ϑ_0 wie die zugehörige Fig. 1, die T_m/ϑ_0 als Funktion von $1/w$ darstellt, zeigen, daß dieser Quotient in der Tat eine Funktion von w ist, die sich für kleine w einem Grenzwert nähert. Der Ansatz von K. Meyer führt also, soweit die individuelle Konstante T_m in Betracht kommt, zu der hier

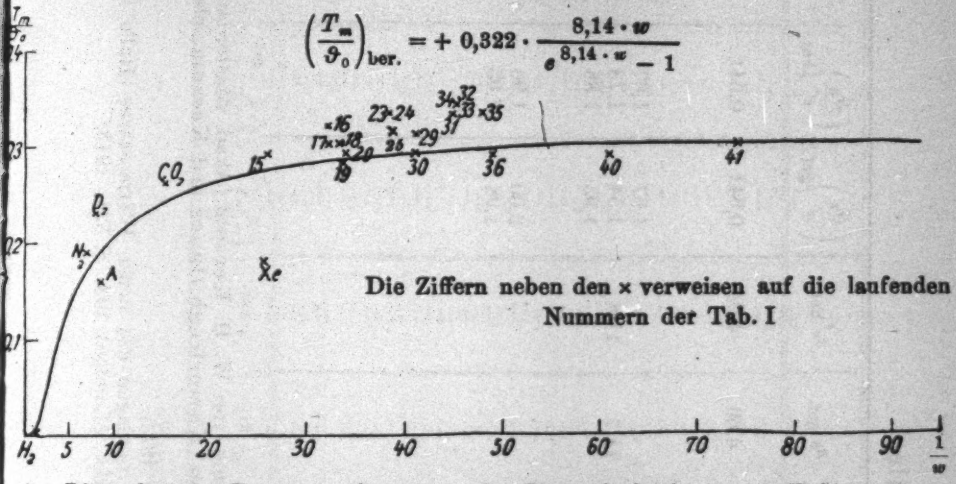
1) He wurde nicht gewählt, weil seine kritische Temperatur hierzu nicht genau genug bekannt war.

2) Vgl. K. Meyer, Zeitschr. f. phys. Chem. 71. S. 333. 1910. Weggelassen sind nur diejenigen Werte, die K. Meyer selbst als unsicher bezeichnet, ferner die der Kohlenwasserstoffe (Pentan, Hexan, Heptan), bei denen die Konstitution nicht näher bezeichnet ist und wo man daher nicht weiß, welche Werte von ϑ_0 und φ_0 zur Berechnung von T_m/ϑ_0 und w anzusetzen sind, endlich die Substanzen, für die ϑ_0 und φ_0 nicht vorliegen wie Krypton.

3) Zeitschr. f. phys. Chem. 32. S. 30. 1900. Für homogene Systeme ist die Theorie von K. Meyer nur in wenigen Fällen geprüft (Zeitschr. f. phys. Chem. 32. S. 30. 1900); in den meisten Fällen sind die T_m experimentell nur an den Sättigungszustand (Dampfdruckkurve) angeschlossen.

postulierten Form der universellen Zustandsgleichung. Neben dem reduzierten Wirkungsquantum macht sich der Einfluß der Abweichung von der geometrischen bzw. mechanischen Ähnlichkeit auf den einzelnen Phasenbahnen bemerklich, sofern die einatomigen Substanzen A und Xe kleinere Werte von T_m/ϑ_0 besitzen, als ihren w-Werten entsprechen würde.

$$\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)_{\text{ber.}} = +\,0{,}322 \cdot \frac{8{,}14 \cdot w}{e^{8{,}14 \cdot w} - 1}$$



Die Ziffern neben den × verweisen auf die laufenden Nummern der Tab. I

Die reduzierte Temperaturkonstante der Zustandsgleichung von K. Meyer als Funktion des reziproken reduzierten Wirkungsquantums.

Fig. 1.

Die ausgezogene Kurve in Fig. 1 zur Darstellung von $\chi(w)$ entspricht wieder der Form (32)[1]), wobei diesmal die Konstanten $\alpha = 0$, $\beta = 0{,}322$, $\delta = 8{,}14$ zu setzen sind. Der mittlere Beobachtungsfehler als Maß der klassisch zu begründenden Abweichung wird hier $i(T_m/\vartheta_0) = 0{,}036$, die quantentheoretische Abweichung $J(T_m/\vartheta_0) = 0{,}30$, somit

$$\frac{i\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)}{J\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)} = 0{,}12;$$

d. h. es werden durch die Quantentheorie 88% der ursprünglichen Abweichung weggeschafft.

Deutlicher wird die Abhängigkeit von T_m/ϑ_0 von w, wenn wir uns beim Vergleich auf homologe Reihen[2]) beschränken,

1) Mitt. I, S. 181.

2) Die Zerlegung nach Gruppen von Isomeren (Tab. III, Kolumne 3) zeigt nur kleine unregelmäßige Schwankungen.

Tabelle I.

	w	$\frac{1}{w}$	$\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)_{gef.}$	$\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)_{ber.}$	s_0' gef.	s_0' ber.	$\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right)_{gef.}$	$\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right)_{ber.}$	$\lambda^{cal.}_{gef.}$	$\left(\frac{\lambda}{T_s}\right)_{gef.}$
1. He	2,04	0,490	—	—	—	—	—	—	22,0*	5,2
2. H_2	1,12	0,892	0	0	4,69	4,94	0,641	0,641	219[1])	10,7
3. CH_4	0,144	6,94	—	—	—	—	—	—	1920*	17,5
4. N_2	0,138	7,25	0,19	0,17	—	—	—	—	1335[2])	17,3
5. CO	0,133	7,52	—	—	—	—	—	—	1440*	17,6
6. O_2	0,124	8,06	0,23	0,19	—	—	1,67	1,67	1642[3])	18,2
7. A	0,112	8,92	0,16	0,20	11,7	11,8	1,54	1,73	1524[4])	17,5
8. C_2H_4	0,0805	12,4	—	—	—	—	1,95	1,88	—	—
9. C_2H_6	0,0728	13,7	—	—	—	—	—	—	—	—
10. N_2O	0,0681	14,7	—	—	—	—	—	—	—	—
11. CO_2	0,0645	15,5	0,26	0,24	—	—	2,00	1,96	—	—
12. CH_3Cl	0,0491	20,4	—	—	—	—	1,98	2,05	—	—
13. SO_2	0,0444	22,5	—	—	—	—	—	—	6160	23,4
14. Xe	0,0390	25,6	0,18	0,27	—	—	—	—	—	—
15. Methylformiat	0,0385	26,0	0,29	0,27	—	—	—	—	6610	21,7
16. Methylacetat	0,0311	32,2	0,32	0,28	—	—	—	—	7340	22,2
17. Äthylformiat	0,0310	32,3	0,30	0,28	—	—	—	—	7180	21,9
18. Äthyläther	0,0301	33,2	0,30	0,28	—	—	—	—	6540	21,3
19. *i*-Pentan	0,0298	33,6	0,28	0,28	—	—	—	—	—	—
20. n-Pentan	0,0294	34,0	0,29	0,28	—	—	—	—	—	—
21. Benzol	0,0275	36,4	—	—	—	—	—	—	7380[5])	20,9

1) Als Mittel aus der direkten kalorimetrischen Bestimmung von W. H. Keesom (Akad. Amsterdam **22**. S. 389. 1913. Anmerkung 4) und der Bestimmung nach Clausius-Clapeyron (Kamerlingh Onnes und Keesom, ebenda, S. 392).
2) H. Alt, Ann. d. Phys. **19**. S. 781. 1906.
3) H. Barschall, Zeitschr. f. Elektrochemie **17**. S. 348. 1911.
4) W. Nernst, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes (Halle 1918). S. 148, 149.
5) J. Fletcher und D. Tyrer, Journ. of the Chemical Soc. (London) **103**. S. 524. 1913.

Tabelle I

(Fortsetzung).

	w	$\frac{1}{w}$	$\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)_{gef.}$	$\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)_{ber.}$	s_0' gef.	s_0' ber.	$\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right)_{gef.}$	$\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right)_{ber.}$	$\lambda_{gef.}^{cal.}$	$\left(\frac{\lambda}{T_s}\right)_{gef.}$
22. Äthylidenchlorid . .	0,0261	38,3	—	—	—	—	—	—	—	—
23. Äthylacetat	0,0260	38,5	0,33	0,29	—	—	—	—	7595	21,7
24. Methylpropionat . .	0,0259	38,6	0,33	0,29	—	—	—	—	7670	21,7
25. Propylformiat . . .	0,0256	39,1	0,31	0,29	—	—	—	—	7680	21,7
26. Äthylenchlorid . . .	0,0252	39,7	—	—	—	—	—	—	—	—
27. Hexamethylen . . .	0,0252	39,7	—	—	—	—	—	—	—	—
28. Di-i-Propyl	0,0248	40,3	—	—	—	—	—	—	—	—
29. n-Hexan	0,0244	41,0	0,31	0,29	—	—	—	—	—	—
30. Fluorbenzol	0,0244	41,0	0,29	0,29	—	—	—	—	7620	21,3
31. Methylisobutyrat . .	0,0223	44,8	0,33	0,29	—	—	—	—	7750	21,2
32. Äthylpropionat . . .	0,0221	45,2	0,34	0,29	—	—	—	—	8110	21,8
33. Propylacetat	0,0221	45,2	0,34	0,29	—	—	—	—	8140	21,8
34. Methylbutyrat . . .	0,0221	45,2	0,34	0,29	—	—	—	—	7890	21,0
35. n-Heptan	0,0209	47,8	0,33	0,30	—	—	—	—	—	—
36. Chlorbenzol	0,0204	49,0	0,29	0,30	—	—	—	—	8330	20,6
37. Tetrachlorkohlenstoff	0,0193	51,8	—	—	—	—	—	—	7120	20,4
38. Di-i-Butyl	0,0187	53,5	—	—	—	—	—	—	—	—
39. n-Oktan	0,0182	54,9	—	—	—	—	—	—	8060	20,2
40. Brombenzol	0,0164	61,0	0,29	0,30	—	—	—	—	8710	20,3
41. Jodbenzol	0,0135	74,1	0,30	0,30	—	—	—	—	9440	20,5
42. Zinntetrachlorid . . .	0,0131	76,3	—	—	—	—	—	—	8060	20,8

Tabelle II.

Quasiinvarianten in homologen Reihen.

	w	$\frac{1}{w}$	$\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)_{gef.}$	$\left(\frac{\vartheta_0}{\sigma'}\right)_{gef.}$	$\left(\frac{\lambda}{T_s}\right)_{gf.}\frac{cal.}{g}$
I. He	2,04	0,490	—	—	5,2
A	0,112	8,92	0,16	1,54	17,5
Xe	0,0390	25,6	0,18	—	—
II. H_2	1,12	0,892	0	0,641	10,7
N_2	0,138	7,25	0,19	—	17,3
O_2	0,124	8,06	0,23	1,67	18,2
III. CO_2	0,0645	15,5	0,26	2,00	—
SO_2	0,0444	22,5	—	—	23,4
IV. CH_4	0,144	6,94	—	—	17,5
CCl_4	0,0193	51,8	—	—	20,4
$SnCl_4$	0,0131	76,3	—	—	20,8
V. CH_4	0,144	6,94	—	—	17,5
C_2H_6	0,0728	13,7	—	—	—
n-Pentan (C_5H_{12})	0,0294	34,0	0,29	—	—
n-Hexan (C_6H_{14})	0,0244	41,0	0,31	—	—
n-Heptan (C_7H_{16})	0,0209	47,8	0,33	—	—
n-Oktan (C_8H_{18})	0,0182	54,9	—	—	20,2
VI. Di-*i*-Propyl	0,0248	40,3	—	—	—
Di-*i*-Butyl	0,0187	53,5	—	—	—
VII. C_2H_6	0,0728	13,7	—	—	—
Äthylenchlorid ($C_2H_4Cl_2$)	0,0252	39,7	—	—	—
VIII. Benzol	0,0275	36,4	—	—	20,9
Fluorbenzol	0,0244	41,0	0,29	—	21,3
Chlorbenzol	0,0204	49,0	0,29	—	20,6
Brombenzol	0,0164	61,0	0,29	—	20,3
Jodbenzol	0,0135	74,1	0,30	—	20,5
IX. Methylformiat	0,0385	26,0	0,29	—	21,7
Äthylformiat	0,0310	32,3	0,30	—	21,9
Propylformiat	0,0256	39,1	0,31	—	21,7
X. Methylacetat	0,0311	32,2	0,32	—	22,2
Äthylacetat	0,0260	38,5	0,33	—	21,7
Propylacetat	0,0221	45,2	0,34	—	21,8
XI. Methylpropionat	0,0259	38,6	0,33	—	21,7
Äthylpropionat	0,0221	45.2	0,34	—	21,8
XII. Methylformiat	0,0385	26,0	0,29	—	21,7
Methylacetat	0,0311	32,2	0,32	—	22,2
Methylpropionat	0,0259	38,6	0,33	—	21,7
Methylbutyrat	0,0221	45,2	0,34	—	21,0
XIII. Äthylformiat	0,0310	32,3	0,30	—	21,9
Äthylacetat	0,0260	38,5	0,33	—	21,7
Äthylpropionat	0,0221	45,2	0,34	—	21,8
XIV. Propylformiat	0,0256	39,1	0,31	—	21,7
Peopylacetat	0,0221	45,2	0,34	—	21,8

Tabelle III.

Quasiinvarianten bei Isomeren.

		w	$\frac{1}{w}$	$\left(\frac{T_m}{\vartheta_0}\right)_{\text{gef.}}$	$\left(\frac{\lambda}{T_s}\right)_{\text{gef.}}\frac{\text{cal.}}{g}$
C_5H_{12}	*i*-Pentan	0,0298	33,6	0,28	—
	n-Pentan	0,0294	34,0	0,29	—
C_6H_{14}	Di-*i*-Propyl . . .	0,0248	40,3	—	—
	n-Hexan	0,0244	41,0	0,31	—
C_8H_{18}	Di-*i*-Butyl . . .	0,0187	53,5	—	—
	n-Oktan	0,0182	54,9	—	20,2
$C_2H_4Cl_2$	Äthylidenchlorid .	0,0261	38,3	—	—
	Äthylenchlorid . .	0,0252	39,7	—	—
$C_3H_6O_2$	Methylacetat . .	0,0311	32,2	0,32	22,2
	Äthylformiat . .	0,0310	32,3	0,30	21,9
$C_4H_8O_2$	Methylpropionat .	0,0259	38,6	0,33	21,7
	Äthylacetat . . .	0,0260	38,5	0,33	21,7
	Propylformiat . .	0,0256	39,1	0,31	21,7
$C_5H_{10}O_2$	Methylbutyrat . .	0,0221	45,2	0,34	21,0
	Äthylpropionat .	0,0221	45,2	0,34	21,8
	Propylacetat . .	0,0221	45,2	0,34	21,8
$C_5H_{10}O_2$	Methylisobutyrat	0,0223	44,8	0,33	21,2
	Methylbutyrat . .	0,0221	45,2	0,34	21,0

innerhalb deren man wegen der chemischen Analogie der einzelnen Reihenglieder untereinander jedenfalls in weit höherem Grade mit geometrischer Ähnlichkeit der Moleküle rechnen kann als bei Substanzen mit so verschiedener Konstitution wie etwa Argon einerseits, Jodbenzol andererseits. In der Tab. II, Kolumne 3 sind die Werte von T_m/ϑ_0 für die einzelnen Gruppen von Substanzen übereinstimmender Konstitution, nach abnehmenden w-Werten geordnet, zusammengefaßt. In den so entstehenden Gruppen gilt nun ohne jede Ausnahme, daß T_m/ϑ_0 mit abnehmendem w wächst, so daß hier der Einfluß des reduzierten Wirkungsquantums frei von den Störungen durch die mangelnde Erfüllung der geometrischen bzw. mechanischen Ähnlichkeit auf den einzelnen Phasenbahnen zum Ausdruck kommt.

Für V_m bzw. $\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}$ hat K. Meyer keine Werte bei tiefsiedenden Substanzen, sondern nur solche für (im ganzen 23)

Substanzen der Tab. I berechnet, deren w-Werte zwischen 0,0645 (CO_2) und 0,0131 ($SnCl_4$) liegen, die also sämtlich bereits kleinen reduzierten Wirkungsquanten entsprechen. Für die Werte von $\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}$ ist dabei, wenn man mit K. Meyer[1]) denjenigen für Fluorbenzol gleich 0 setzt, kein Gang mit w zu erkennen. Der größte Wert ist der für CO_2: + 0,0116, der kleinste Wert der für Äthylpropionat: — 0,0134. Die gesamte Schwankung von $\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}$ im Betrage von 0,0250 ist etwa 14mal so klein wie diejenige bei $\frac{T_m}{\vartheta_0}$. Wir haben es hier offenbar mit dem im Vergleich zu dem durch große w-Werte (niedrige kritische Temperaturen) bedingten kleinen Einfluß der mangelnden geometrischen und mechanischen Ähnlichkeit der Moleküle zu tun, wie sie sich auch in dem höheren Teile der $\frac{T_m}{\vartheta_0}$-Kurve bemerklich machen. Ob, wie zu vermuten, für die tiefsiedenden Substanzen $\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}$ einen ähnlichen, stärkeren Gang wie $\frac{T_m}{\vartheta_0}$ zeigt, läßt sich mangels Versuchsdaten vorläufig nicht beurteilen. Jedenfalls erweisen sich die individuellen Konstanten $\frac{T_m}{\vartheta_0}$ und $\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}$ in den reduzierten Variablen (13), (14), (15) der Zustandsgleichung von K. Meyer, soweit man von den unvermeidlichen kleineren Schwankungen infolge mangelnder mechanischer Ähnlichkeit absehen darf, als Funktionen von w bzw. im Gebiete kleiner w als Konstante. Die Zustandsgleichung von K. Meyer erscheint damit auf die Form unseres Quantentheorems[2]) $\Phi(\varphi, \vartheta, \Pi, w) = 0$ gebracht.

c) Zustandsgleichungen von Avogadro, D. Berthelot und A. Wohl.

Die Zustandsgleichungen von Kamerlingh Onnes einerseits und von K. Meyer andererseits besitzen keine geschlossene Form. Die erstere stellt $\Pi\varphi/\varkappa$ als eine unendliche Reihe dar, die allerdings für die Zwecke der praktischen Rechnung nach einer

---

1) Zeitschr. für phys. Chem. **32**. S. 25. 1900 (Tab. 3). φ_0 ist dort mit v, v_m mit q bezeichnet.

2) Vgl. Mitt. I, 172, Gleichung (21).

endlichen Anzahl von Gliedern abgebrochen werden kann[1]); die letztere ist überhaupt nicht analytisch formuliert, sondern stellt nur eine Modifikation des klassischen Theorems der übereinstimmenden Zustände durch Einführung der individuellen Größen $\frac{T_m}{\vartheta_0}$ und $\frac{V_m/N}{\varphi_0/N}$ bzw. T_m und V_m vor. Indes besitzen wir in derjenigen von D. Berthelot[2]) eine reduzierte Zustandsgleichung in geschlossener Form für Drucke bis zu einigen Atmosphären und in derjenigen von A. Wohl[3]) eine solche, die sogar noch bis zu weit höheren Drucken (bis zu 1000 Atmosphären bei CO_2) gilt. Für hohe Temperaturen oder große Volumina gehen beide in die Avogadrosche Gleichung der idealen Gase über.

Die Gleichung von Avogadro lautet in reduzierter Form

$$\Pi = \frac{\varkappa \vartheta}{\varphi} . \tag{16}$$

Sie stellt entsprechend dem Quantentheorem[4]) Π als Funktion von φ, ϑ und w dar, da $\varkappa$ eine Funktion von w allein ist.[5]) Doch wird hier w nur durch $\varkappa$ eingeführt, weil wir als reduzierten Druck $\Pi = p/\Pi_0$ statt, wie es dem hier entwickelten System entspricht[6]),

$$\frac{p}{(k\vartheta_0)/(\varphi_0/N)}$$

bezeichnet haben. Bei konsequenter Benutzung der Einheiten wird die reduzierte Gleichung von Avogadro

$$\frac{p}{(k\vartheta_0)/(\varphi_0/N)} = \frac{\vartheta}{\varphi} \tag{17}$$

von w unabhängig und stellt dann einen klassischen Grenzfall der Zustandsgleichung vor.[7])

Die Zustandsgleichung von D. Berthelot lautet in reduzierter Form:

$$\left(\Pi + \frac{16}{3}\,\frac{1}{\vartheta\,\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{4}\right) = \frac{32}{9}\,\vartheta .$$

---

1) Vgl. Kamerlingh Onnes und Keesom, a. a. O. S. 729.

2) Sur les thermomètres à gaz. (Paris 1903, Gauthier-Villars) S. 46.

3) Zeitschr. f. phys. Chem. 87. S. 21. 1914.

4) Vgl. Mitt. I. 172. Gleichung (21).

5) Vgl. Mitt. I, 200.

6) Vgl. Mitt. I, 171.

7) Vgl. Mitt. I, 168, Anmerkung 2 sowie unten S. 176.

Der Faktor 32/9 stellt den von D. Berthelot in erster Näherung als konstant angesehenen Wert von $\varkappa$ vor. Wir können sie also unter Einführung des auf kritisches Volumen und kritische Temperatur reduzierten Druckes schreiben:

$$(18) \qquad \frac{p}{(k\,\vartheta_0)/(\varphi_0/N)} = \frac{\vartheta}{\varphi - \frac{1}{4}} - \frac{16}{8}\,\frac{1}{\varkappa}\,\frac{1}{\vartheta\,\varphi^2}.$$

Innerhalb des Anwendungsgebietes der Berthelotschen Formel dürfen zwar die Zahlenwerte $^{16}/_{3}$ und $^{1}/_{4}$ in (18) als konstant angesehen werden. Aber die Formulierung (18) zeigt, daß hier individuelle Konstante eingehen, da $\varkappa$ nicht streng konstant ist, sondern sich als Funktion von w darstellt. Immerhin hält sich $\varkappa$ in den mäßigen Grenzen

$$\frac{\varkappa_{SnCl_4}}{\varkappa_{He}} = 1{,}21$$

für die beiden Substanzen mit extremen w-Werten $SnCl_4$ ($w = 0{,}0131$) und He ($w = 2{,}04$).

Die reduzierte Form der Wohlschen Zustandsgleichung ist:

$$\Pi = \frac{15}{4}\,\frac{\vartheta}{\left(\varphi - \frac{1}{4 + \varepsilon\Pi}\right)} - \frac{6}{\vartheta\,\varphi\left(\varphi - \frac{1}{4 + \varepsilon\Pi}\right)} + \frac{4}{\vartheta^2\varphi^5},$$

$\varkappa$ ist dabei konstant gleich $^{15}/_{4}$ gesetzt. Wird der Druck wieder auf kritisches Volumen und kritische Temperatur reduziert, so geht die letzte Gleichung über in:

$$(19) \quad \frac{p}{(k\,\vartheta_0)/\varphi_0/N)} = \frac{\vartheta}{\varphi - \frac{1}{4 + \varepsilon\Pi}} - \frac{6}{\varkappa}\,\frac{1}{\vartheta\,\varphi\left(\varphi - \frac{1}{4 + \varepsilon\Pi}\right)} + \frac{4}{\varkappa}\,\frac{1}{\vartheta^2\varphi^5},$$

wobei man auch rechts Π durch

$$\varkappa \cdot \frac{p}{(k\,\vartheta_0)/(\varphi_0/N)}$$

ersetzt zu denken hat. Außer den Zahlenfaktoren $6/\varkappa$ und $4/\varkappa$, die zwar schon wegen der Veränderlichkeit von $\varkappa$ nicht als streng, aber doch als ausreichend konstant angesehen werden können, tritt hier die individuelle Konstante ε auf, die Wohl für H_2 zu 0,5, für CO_2 zu 0,19, also als sehr viel stärker veränderlich als $\varkappa$ angibt; während nämlich $\frac{\varepsilon_{H_2}}{\varepsilon_{CO_2}} = 2{,}6$, ist $\frac{\varkappa_{CO_2}}{\varkappa_{H_2}} = 1{,}07$. Wir haben von unserem Standpunkte aus ε natürlich wieder als Funktion von w aufzufassen. Während also im Grenzfall

der idealen Gase die auf kritisches Volumen und kritische Temperatur reduzierte Zustandsgleichung von w vollständig unabhängig wird, macht sich bei mäßigen Drucken bis zu einigen Atmosphären in der Zustandsgleichung von D. Berthelot der Einfluß des reduzierten Wirkungsquantums durch das mit w schwach veränderliche $\varkappa$ geltend, wohingegen für hohe Drucke, im Gebiete der Wohlschen Zustandsgleichung, außer $\varkappa$, dessen Veränderlichkeit sich auch bemerklich macht[1]), das stark mit w veränderliche ε eingreift. Die Quanteneffekte und damit die individuellen Konstanten der reduzierten Zustandsgleichung treten somit um so deutlicher hervor, je mehr man sich von dem idealen Grenzzustande von Avogadro entfernt. Aber die verschiedenen individuellen Konstanten wie ε[2]) und $\varkappa$ sind keine voneinander unabhängigen Parameter, sondern Funktionen des einen durch die Invarianz von h im C. G. S.-System mit Notwendigkeit gegebenen individuellen Parameters w.

d) Zustandsgleichungen entarteter Gase.

Es gibt eine ganze Reihe von Zustandsgleichungen, die die Entartung, d. h. diejenigen Abweichungen zum Ausdruck zu bringen suchen, welche auch bei idealen Gasen nach der Quantentheorie gegenüber der Avogadroschen Gleichung vorhanden sein sollten. Die meisten dieser Gleichungen enthalten den Quanteneffekt in Form einer Korrektion zur Avogadroschen Gleichung und haben daher die Gestalt:

$$\frac{p\,v}{R\,T} = 1 + \omega(v, RT),$$

wobei wir uns p, das etwa zunächst als Argument in ω auftreten könnte, durch die beiden unabhängigen Veränderlichen v und $R\,T$ ersetzt denken. Enthält ω außer M nur universelle Konstanten, die bis auf h sämtlich reine Zahlen sind, so muß sich die reine Zahl ω in der Form $\Phi(h/H_1)$ darstellen[3]), wobei

$$H_1 = M^{1/2} v^{1/2} (RT)^{1/2} = \varphi^{1/2} \vartheta^{1/2} N^{4/3} [m_0^{1/2} (\varphi_0/N)^{1/3} (k\,\vartheta_0)^{1/2}]$$

und[4]) $\Phi(h/H_1) = \Phi[w\,\varphi^{-1/2}\vartheta^{-1/2}]$. Damit ist ω auf die Form $\Phi(\varphi, \vartheta, w)$ gebracht.

1) Vgl. A. Wohl, Zeitschr. f. phys. Chem. **99**. S. 227. 1921.

2) Zur Darstellung des Ganges von ε mit w wäre die Berechnung weiterer Substanzen nach der Zustandsgleichung von A. Wohl wünschenswert.

3) Vgl. Mitt. I, 166, Gleichung (13).

4) Der konstante Faktor $N^{4/3}$ ist unter dem Funktionszeichen auf der rechten Seite der folgenden Gleichung weggelassen.

In der Tat läßt sich zeigen, daß die meisten der für die Entartung der Gase aufgestellten Zustandsgleichungen die dem Quantentheorem entsprechende Form besitzen:

$$\frac{\Pi\varphi}{\vartheta\varkappa} = 1 + \Phi[w\,\varphi^{-1/3}\,\vartheta^{-1/2}]. \tag{20}$$

Es ist z. B. nach O. Sackur[1]):

$$\frac{p\,v}{R\,T} = 1 + \frac{e}{6\pi}\,\frac{h^2\,N^{5/3}}{M(RT)\,v^{2/3}}, \tag{21}$$

was bei Einführung von w übergeht in:

$$\frac{\Pi\varphi}{\vartheta\varkappa} = 1 + \frac{e}{6\pi}\,(w\,\varphi^{-1/3}\,\vartheta^{-1/2})^2, \tag{22}$$

d. h. in die Form der Gleichung (20), wobei, wie es sein soll, für sehr kleine w, Gleichung (22) von w unabhängig wird.

Das Gleiche gilt, wie bereits erwähnt[2]), bei relativ großen w für extrem hohe reduzierte Temperaturen oder Volumina. Die *Avogadrosche Zustandsgleichung*, bekanntlich das erste Resultat der klassisch-mechanischen Gastheorie, ergibt sich demnach auch für nicht verschwindendes w, d. h. für Substanzen, die im allgemeinen dem klassischen Theorem der übereinstimmenden Zustände und dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit nicht folgen, aus der Quantentheorie gerade so als *klassischer Grenzfall* wie für verschwindendes w, d. h. für Substanzen, für die allgemein klassische Verhältnisse gelten.

Zu einer bis auf einen konstanten Zahlenfaktor mit (21) identischen Gleichung gelangt von einem anderen Ausgangspunkte aus W. Nernst[3]), wobei an die Stelle von $e/6\pi$ tritt $1/8\pi$. Das führt natürlich wieder entsprechend (22) zu einer Gleichung der Form (20).

H. W. Keesom[4]) hat die von P. Debye für die festen Körper eingeführte quantentheoretische Methode des elastischen Spektrums mit maximaler Schwingungszahl ν_m auf die idealen einatomigen Gase ausgedehnt. Die von ihm erhaltene Zustandsgleichung enthält noch ν_m, und wir sind daher, solange ein Zusammenhang dieser Größe mit den kritischen Daten und

---

1) Zeitschr. f. Elektrochem. 20. S. 565. 1914.

2) Vgl. oben S. 173.

3) Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes S. 168.

4) Physikal. Zeitschr. 14. S. 665. 1913.

dem Molekulargewicht nicht festgelegt ist (und das ist mangels experimenteller Anwendungen im einzelnen bisher nicht der Fall), nicht imstande, im allgemeinen zu prüfen, ob die Zustandsgleichung die von unserem Quantentheorem postulierte Form besitzt. Aber für den extremen Fall hoher Temperaturen fällt bei Keesom ν_m aus der Zustandsgleichung heraus, die dann eine Beziehung zwischen p, v, kT, h, m_0 und dimensionslosen universellen Konstanten darstellt. Für diese Gleichungen ist unser Quantentheorem in der Tat erfüllt.

Für hohe Temperaturen ist nämlich nach Keesom[1])

$$\frac{pv}{RT} = 1 + \frac{1}{20}\left(\frac{R\vartheta'}{RT}\right)^2, \tag{23}$$

wobei

$$R\vartheta' = Nh\left(\frac{9N}{4\pi v}\right)^{1/3}\left(\frac{5}{3}\frac{RT}{M}\right)^{1/2}. \tag{24}$$

Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen, daß (23) übergeht in:

$$\frac{\Pi\varphi}{\vartheta\varkappa} = 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{9}{4}\right)^{2/3}(\pi)^{-2/3}(w\varphi^{-1/3}\vartheta^{-1/3})^2, \tag{25}$$

d. h. in die Form der Gleichung (20), wobei (25) wieder für sehr kleine w sowie extrem hohe φ oder ϑ von w unabhängig wird.

Das experimentelle Material zur Prüfung der Zustandsgleichung entarteter Gase ist bekanntlich noch recht spärlich. Immerhin hat O. Sackur[2]) entsprechend dem Umstand, daß sich Gleichung (21) auf die Form bringen läßt:

$$pv = RT\left(1 + \frac{A}{M}\frac{p^{2/3}}{T^{5/3}}\right),$$

wobei A eine universelle Konstante ist, bei He und H_2 im pv-p-Diagramm eine gegen die Abszissenachse konkave Kurve erhalten. Der Effekt, der sich beim Siedepunkt des H_2 zeigt, bleibt bei den Siedepunkten von O_2 und N_2, also bei annähernd korrespondierenden Temperaturen, aus, wie es das Quantentheorem verständlich erscheinen läßt, da das Entartungsglied nach (22) mit abnehmendem w abnimmt. Nach dieser Gleichung wird für übereinstimmende Temperaturen und Volumina beim Übergang von H_2 zu O_2 das Entartungsglied im Verhältnis

1) a. a. O. Gleichung (14) und (15a).
2) a. a. O. S. 566.

von $\left(\frac{0{,}124}{1{,}12}\right)^2 = 0{,}0123$, d. h. auf etwa 1% seines Wertes sinken. Unter diesen Umständen ist es begreiflich, wenn der an sich schon nicht übermäßig starke Entartungseffekt des H_2 verloren geht. Wenn Sackur bei H_2 einen stärkeren Quanteneffekt gefunden hat als bei He, so liegt das daran, daß sich die Messungen an beiden Gasen auf die gleiche absolute Temperatur von 20° K. beziehen, bei He also auf eine $\frac{33{,}18}{5{,}20} = 6{,}4$ mal so hohe reduzierte Temperatur, was nach (22) den Entartungseffekt des He im Verhältnis zu dem bei H_2 in diesem Maße herabsetzt.[1])

e) Boyle-Temperatur.

Die Heraushebung je einer Isotherme aus den Isothermennetzen der verschiedenen Substanzen kann bei einphasigen Systemen mit einem unabhängigen Bestandteil und daher zwei thermodynamischen Freiheitsgraden nicht nur wie oben im Falle der Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes durch Fixierung eines willkürlichen Parameters erfolgen, dort der Konstante const_1 in Gleichung (4) bzw. const_2 in Gleichung (5), sondern knüpft unter Umständen auch an gewisse ausgezeichnete Eigenschaften der betreffenden Isotherme an. Das ist der Fall bei der Boyletemperatur, bei welcher gerade für unendlich verdünnte Gase das Boyle-Mariottesche Gesetz erfüllt ist, bei welcher also, wenn man $\Pi \cdot \varphi$ als Funktion von $1/\varphi$ darstellt und ϑ konstant hält[2]) $\frac{\partial(\Pi\varphi)}{\partial(1/\varphi)} = 0$ wird. Da durch diese Festsetzung die beiden verfügbaren Freiheitsgrade fixiert sind, so müßte nach dem klassischen Theorem der übereinstimmenden Zustände die Boyletemperatur die Form haben $T_B = \text{const}\ \vartheta_0$, während unser Standpunkt zu $T_B = \chi(w) \cdot \vartheta_0$ mit der Grenzbedingung $\chi(w)_{(w=0)} = \text{const}$ führt. Das Experiment ergibt entsprechend der mittleren reduzierten Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes[3]) $\chi(w) = 2{,}54$, während Leduc[4]) hierfür 2,56 angibt. Nur H_2 und He, die beiden Substanzen mit den abnorm hohen w-Werten bzw. abnorm niedrigen ϑ_0-Werten,

---

1) Auch die Verschiedenheit der φ-Werte wirkt im gleichen Sinne.
2) Kamerlingh Onnes und Keesom, a. a. O. S. 896.
3) Kamerlingh Onnes und Keesom, a. a. O. S. 896.
4) Annales de chimie et de physique (8) 19. S. 456. 1910.

zeigen einen Gang mit w derart, daß $T_{B(H_2)} = 3{,}3$[1]); $T_{B(He)} = 3{,}8$[1]) wird. χ ist also hier als Funktion von w durch die Erfahrung charakterisiert, daß $\frac{d\chi(w)}{d(w)} > 0$ ist.

f) Inversionstemperatur des Joule-Kelvineffekts.

Die Inversionstemperatur, bei welcher der differentielle, d. h. auf unendlich kleine Druckdifferenzen bezogene Joule-Kelvin-Effekt sein Vorzeichen ändert, ist im allgemeinen noch eine Funktion des Druckes bzw. des Volumens. Legt man ähnlich wie bei Definition der Boyletemperatur das Volumen durch die Bedingung $\varphi = \infty$ fest, d. h. handelt es sich um sehr verdünnte Gase, so ist nunmehr auch diese (reduzierte) Inversionstemperatur ϑ_i fixiert. Diese sollte nach dem klassischen Theorem eine korrespondierende sein. Sie ist nämlich durch die beiden simultanen Gleichungen gegeben.[2])

$$\mathfrak{B} - \vartheta_i \left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_i} = 0, \tag{26}$$

$$\mathfrak{B} = b_1 + \frac{b_2}{\vartheta_i} + \frac{b_3}{\vartheta_i^2} + \ldots, \tag{27}$$

wobei die b_1, b_2 usw. nach dem klassischen Theorem universelle Konstanten sein sollen. Indem man $\mathfrak{B}$ und $\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_i}$ aus (27) bestimmt und in (26) substituiert, erhält man eine Gleichung für ϑ_i, das, wenn wirklich die b_1, b_2 usw. universelle Konstanten wären, für alle Substanzen das gleiche sein müßte. In der Tat aber ergibt sich[3]), soweit bis jetzt Messungen vorliegen, für Luft ($O_2 + N_2$) einerseits $\vartheta_i = 4{,}8$, für H_2[4]) andererseits $\vartheta_i = 6{,}9$, d. h. stark voneinander abweichende Werte. Von unserem Standpunkte aus, von dem die b noch Funktionen von w sein werden, erscheint das begreiflich, da (26) und (27) dann eine Gleichung der Form $\vartheta_i = \chi(w)$ liefern und da bei dem abnorm hohen Wert von w_{H_2} erhebliche Unterschiede zwischen $\chi(w_{H_2})$ und $\chi(w_{O_2})$ bzw. $\chi(w_{N_2})$ zu erwarten sind.

---

1) Kamerlingh Onnes und Keesom, a. a. O. S. 897.

2) Kamerlingh Onnes und Keesom (a. a. O. S. 943) schreiben

$$B - T\frac{dB}{dT} = 0, \quad \text{wobei } B = \frac{R\vartheta_0}{\Pi_0}\mathfrak{B}.$$

Bezüglich der Definition von $\mathfrak{B}$ vgl. Gleichung (1) sowie Kamerlingh und Keesom, a. a. O. S. 729, Gleichung (35).

3) J. P. Kuenen, Die Eigenschaften der Gase, S. 304. Leipzig 1919.

4) Kamerlingh und Keesom, a. a. O. S. 943.

2. Sättigungszustände.

Die hierher gehörigen Erscheinungen sind bereits ausführlich in Mitt. I behandelt worden, und zwar:

a) Dampfdruckgleichungen von van der Waals und von Nernst; dort, S. 178ff.

b) Die Regel der geraden Mittellinie der Dampf- und Flüssigkeits-Dichten von Cailletet und Mathias; dort, S. 190ff.

3. Kritischer Zustand.

a) Kritischer Koeffizient; bereits behandelt in Mitt. I, S. 200ff.

b) Kritischer Dampfspannungskoeffizient.

Von den für den kritischen Zustand charakteristischen Koeffizienten hat man außer dem oben behandelten kritischen Koeffizienten im engeren Sinne vielfach noch den sogenannten kritischen Dampfspannungskoeffizienten

$$\left(\frac{T}{p}\,\frac{dp_{\text{Koex.}}}{dT}\right)_{T=\vartheta_c} = \left(\frac{d\Pi_{\text{Koex.}}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1}$$

zum Theorem der übereinstimmenden Zustände in Beziehung gebracht. Das klassische Theorem fordert

$$\left(\frac{d\Pi_{\text{Koex.}}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1} = w \text{ const } ^{1}),$$

das Quantentheorem, wenn man Gleichung (28) (Mitt. I, S. 179) nach $\Pi_{\text{Koex.}}$ auflöst und nach ϑ differentiiert

$$\left(\frac{d\Pi_{\text{Koex.}}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1} = \Phi(\vartheta, w) = \Phi(1, w) = \chi(w),$$

wenn wir im kritischen Punkte $\vartheta = 1$ setzen. Soweit eine Dampfdruckformel von der Form der van der Waalsschen gilt, ist im kritischen Punkte, wie man leicht aus Gleichung (30) (Mitt. I, S. 180) ableitet[1]):

$$\left(\frac{d\Pi_{\text{Koex.}}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1} = q.$$

---

1) van der Waals (Kon. Amst. 19. S. 1316. 1911) im Anschluß an J. P. Kuenen (Zustandsgleichung 1907. S. 142) benutzt denn auch bei Prüfung einer empirischen Beziehung zwischen

$$x \text{ und } \left(\frac{d\Pi_{\text{Koex.}}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1}$$

für die letztere Größe unmittelbar die aus den meist nur unterhalb des kritischen Punktes verifizierten Dampfdruckformeln sich ergebenden q-Werte.

Der frühere[1]) Befund, wonach $q = \chi(w)$ ist, zeigt also gleichzeitig, daß auch der kritische Dampfspannungskoeffizient die hier geforderte Form einer Funktion von w hat.

B. Die Entropiegleichung (Differentialquotient der freien Energie nach der Temperatur).

1. Die Entropiekonstante der einatomigen Gase.

Aus der allgemeingültigen Gleichung (23)[2]) ersieht man, daß unser Quantentheorem für die Entropie nur in dem gleichen Umfange gelten kann wie für die innere Energie[3]), daß also sein Geltungsbereich beschränkter ist als bei der Zustandsgleichung. Differentiiert man nämlich die genannte Gleichung partiell nach ϑ, so hat man:[4])

$$\frac{c_v/N}{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_\varphi = \vartheta \left(\frac{\vartheta s}{\vartheta \vartheta}\right)_\varphi .$$

Da c_v, die Molekularwärme bei konstanten Volumen, für konstantes ϑ und φ von der Zahl der Atome im Molekül abhängt, so gilt das also auch für $(\partial s/\partial \vartheta)_\varphi$ und für s. Nach Sackur[5]) und Tetrode[6]) treten in dem Ausdruck für die Entropie der idealen Gase die Hauptträgheitsmomente auf. Würden diese unabhängig von der Atomzahl unserem Quantentheorem folgen, so müßte ihnen als Größen von der Dimension[7]) $M_0 L_0^2$ die Form $\chi(w)\, m_0 (\varphi_0/N)^{2/3}$ (28) zukommen. Das ist aber keineswegs der Fall, da für die einatomigen Moleküle ganz unabhängig von den Werten von w; M, ϑ_0 und φ_0 in dem Ausdruck für die Entropie mit merklich verschwindenden Hauptträgheitsmomenten zu rechnen ist. Weiter macht es auch die rein qualitative Unterscheidung zwischen zweiatomigen Molekülen mit zwei zusammenfallenden Hauptträgheitsmomenten und mehratomigen, bei denen alle drei Hauptträgheitsmomente voneinander ver-

1) Vgl. Mitt. I, 180.

2) Mitt. I, S. 172.

3) Vgl. unten S. 185.

4) Vgl. M. Planck, Thermodynamik (5. Aufl.) S. 125, Gleichung (79h). N tritt im Nenner von c_v auf, weil sich u auf ein Molekül, nicht auf ein Mol bezieht, k zur Reduktion einer Größe von der Dimension Energie: Temperatur (vgl. Mitt. I, S. 164).

5) Ann. d. Phys. 40. S. 87. 1913.

6) Ann. d. Phys. 38. S. 441. 1912.

7) M_0, L_0, T_0 seien die Symbole für die Dimensionen von Masse, Länge, Zeit.

schieden sind, unmöglich, auch nur für die zwei- und mehratomigen Moleküle in ihrer Gesamtheit die Hauptträgheitsmomente als universelle Funktionen nach Art des Ansatzes (28) zu betrachten. Wir sind deshalb gezwungen wie bei der inneren Energie bzw. der spezifischen Wärme[1]), so auch bei der Entropie bzw. ihrem Temperaturkoeffizienten die Anwendung unseres Quantentheorems auf einzelne durch die Atomzahl charakterisierte Gruppen von Substanzen zu beschränken. Wir wollen das *Theorem* hier nur für die *einatomigen Moleküle durchführen*.

Nach O. Stern[2]) wird die Entropie eines idealen einatomigen Gases bei höheren Temperaturen, wenn wir sie reduzieren und auf ein Molekül umrechnen:

$$(29) \qquad s = \frac{S/N}{k} = \log v + \tfrac{3}{2}\log T + \log\left[\frac{(2\pi m_0)^{3/2} k^{5/2}}{h^3 N}\right] + \tfrac{5}{2},$$

oder bei Einführung von φ, ϑ und w:

$$(30) \qquad s = \log\varphi + \tfrac{3}{2}\log\vartheta - 3\log\left[\frac{w}{e^{5/2}(2\pi)^{1/2}}\right],$$

ein Ausdruck[3]), der die reduzierte Entropie der einatomigen Gase in sehr einfacher Weise als Funktion von φ, ϑ, w darstellt und damit unser Quantentheorem zum Ausdruck bringt.

Für $w = 0$ (klassischer Grenzfall) geht (30) über in:

$$(31) \qquad s = \log\varphi + \tfrac{3}{2}\log\vartheta + \infty\ .$$

Die Entropiekonstante hat in diesem Falle überhaupt keine bestimmte Bedeutung mehr[4]), und s läßt sich daher durch geeignete Verfügung über die Konstante unabhängig von w machen.

---

1) Vgl. Mitt. I, S. 167.

2) Zeitschr. f. Elektrochem. 25. S. 66. 1919. Gleichungen (15), (16), (17). Die Formel (29) ergibt sich auch aus der Planckschen Strukturtheorie des Phasenraumes (M. Planck, Sitzungsberichte der preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1916. S. 667), und die Entropiekonstante in der Form unseres Quantentheorems [vgl. Gleichung (32)] erscheint deshalb an diese unmittelbar angeschlossen.

3) Vgl. Mitt. I, S. 190, Anmerkung 4.

4) Vgl. z. B. M. Planck, Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, gehalten in Göttingen 1913 (Leipzig 1914) S. 6.

Die Entropiekonstante S_0 wird gewöhnlich durch die Gleichung definiert[1]):

$$S = R \log v + {}^3/_2 R \log T + S_0 .$$

Da (30) auch geschrieben werden kann

$$S = R \log v + \tfrac{3}{2} R \log T - 3R \log \left[\frac{w \varphi_0^{1/3} \vartheta_0^{1/3}}{(2\pi)^{1/3} e^{5/3}} \right],$$

so wird

$$S_0 = -\, 3R \log \left[\frac{N^{1/3} \pi (\varphi_0/N)^{1/3} \vartheta_0^{1/3}}{(2\pi)^{1/3} e^{5/3}} \right] .$$

S_0 enthält, da es nach seiner Definition keine reine Zahl ist, außer w noch die Größen φ_0/N und ϑ_0 in explizierter Form. Im Sinne des Theorems der übereinstimmenden Zustände wird man zweckmäßig nicht S_0, sondern die reine Zahl

$$s_0' = -\, 3 \log \left[\frac{w}{e^{5/3} (2\pi)^{1/3}} \right] \tag{32}$$

in Gleichung (30) als Entropiekonstante betrachten, wobei dann zwischen dieser „reduzierten Entropiekonstante" und S_0 die Beziehung besteht:

$$S_0 = R \cdot s_0' - 3R \log \left[N^{1/3} \vartheta_0^{1/3} \left(\frac{\varphi_0}{N} \right)^{1/3} \right] . \tag{33}$$

2. Die Nernstsche chemische Konstante.

Die Nernstsche chemische Konstante[2])

$$C = \frac{R \log K - \frac{5}{2} R + S_0}{R}$$

geht unter Rücksicht auf (33) und (32) über in:

$$C = -\, 3 \log \left[\frac{\vartheta_0^{1/3} \left(\frac{\varphi_0}{N} \right)^{1/3} w}{(2\pi)^{1/3} k^{1/3}} \right] . \tag{34}$$

Auch C stellt sich, da es keine reine Zahl ist[3]), als eine Funktion von w, ϑ_0 und φ_0/N dar.

---

1) Vgl. z. B. O. Stern, a. a. O. S. 78, Gleichung (16).
2) O. Stern, a. a. O. S. 79, Gleichung (17).
3) Vgl. z. B. M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung (2. Aufl.), S. 132.

Einer experimentellen Prüfung ist zunächst nur Gleichung (34) zugänglich. Da, beim Einsetzen seines Definitionswertes für w[1]), C wieder die übliche Form[2])

$$C = \log\left[\frac{(2\pi m_0)^{3/2} k^{5/2}}{h^3}\right] \tag{35}$$

annimmt, so erscheint (34) in gleichem Umfange verifiziert wie (35). Formel (35) und damit auch (34) gilt innerhalb der Versuchsfehler für H_2[3]), A[3]), Zn[4]), Cd[4]), Hg.[3])

Schreiben wir die Beziehung zwischen w und C in der Form:

$$-3\log\left[\frac{w}{e^{5/2}(2\pi)^{1/2}}\right] = C - \log R^{5}) + \tfrac{5}{2} + 3\log\left[N^{1/3}\vartheta_0^{1/2}\left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{1/3}\right], \tag{36}$$

so stellt die linke Seite von (36) nach (32) den theoretischen Wert der reduzierten Entropiekonstanten dar, die rechte Seite den experimentellen. Tab. I Kolumnen 5 und 6 geben für die beiden Gase (H_2 und A), für die C, ϑ_0 und φ_0 bekannt sind, die gefundenen und berechneten Werte von s_0'. Der Grad der Übereinstimmung ist natürlich hier der gleiche wie für die gefundenen und nach (35) berechneten Werte von C. Die Anwendbarkeit von Formel (36) auf H_2, der sich bei sehr tiefen Temperaturen bekanntlich sowohl bezüglich der spezifischen Wärme[6]) wie bezüglich der chemischen Konstante[7]) einatomig verhält, zeigt, daß unser *Quantentheorem* in der Tat allgemein für die charakteristische thermodynamische Funktion, die freie Energie, und nicht nur für die Zustandsgleichung auch für *mehratomige Körper* gilt, wenn nur der *Bewegungszustand* durch Unterdrückung der Oszillation und Rotation auf denjenigen der *einatomigen* Moleküle *zurückgeführt* wird.

---

1) Vgl. Mitt. I, S. 166, Gleichung (13).

2) Vgl. Mitt. I, S. 190.

3) W. Nernst, Neuer Wärmesatz, S. 151. Nach Nernst ist für H_2

$$\frac{C}{2{,}3026} - \log_{10}(1{,}0132 \cdot 10^6)$$

gleich – 1,23 und für A gleich 0,75 (vgl. O. Stern, Zeitschr. f. Elektrochemie **25**. S. 78. 1919).

4) A. C. Egerton, Philosophical Magazine [6] **39**. S. 14. 1920 sowie H. Braune, Zeitschr. f. anorg. Chem. **111**. S. 147. 1920.

5) R ist hier $8{,}316 \cdot 10^7$ Erg/grad.

6) A. Eucken, Sitzungsber. der preuß. Akademie d. Wissensch. von Berlin **1912**. S. 151.

7) v. Kohner u. P. Winternitz, Physik. Zeitschr. **15**. S. 397. 1914.

C. Die Gleichung der inneren Energie (Helmholtzsche Differentialgleichung der freien Energie).

Die innere Energie, insbesondere ihr Differentialquotient nach der Temperatur, die Molekularwärme c_v, ist weitgehend von der Atomzahl abhängig. Wir müssen daher unsere Theorie, die allgemein nur von Molekülen handelt, soweit sie sich einatomig bzw. starr verhalten[1]), hier auf die einatomigen Gase im eigentlichen Sinne beschränken. Eine Ausdehnung auf mehratomige ist nur für den Differentialquotienten der inneren Energie nach dem Volumen zulässig, bei welchem der Einfluß der Atomzahl wieder so weit wegfällt, wie überhaupt bei der Zustandsgleichung, in die dieser letztere Differentialquotient eingeht [vgl. Gleichung (20); Mitt. I, S. 171].

1. Spezifische Wärme und Entartung der einatomigen Gase (Temperaturkoeffizient der inneren Energie).

Die reduzierte Molekularwärme $\frac{c_v/N}{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_\varphi$ sollte nach dem klassischen Theorem eine universelle Funktion von ϑ und φ sein, wozu nach dem Quantentheorem noch der Parameter w tritt. Soweit empirisch für die einatomigen Gase $\frac{c_v/N}{k} = 3/2$ ist, wird sie von ϑ, φ und w unabhängig, und die Forderungen des klassischen wie des Quantentheorems erscheinen beide erfüllt, ohne daß sich hier zwischen ihnen eine Entscheidung treffen ließe. Indes läßt die Theorie der *Entartung* der *Gase* für sehr tiefe Temperaturen eine Abnahme von c_v unter 3/2 R (2,98) voraussehen, für die sich bisher experimentell allerdings nur Andeutungen ergeben haben. A. Eucken[2]) hat nämlich bei komprimiertem He von der Konzentration 30 Mol/Liter, d. h. $\varphi = 0{,}543$, für 18° K, d. h. eine reduzierte Temperatur von $\vartheta = 3{,}5$, einen Wert von $c_v = 2{,}90$ gefunden. Nach dem klassischen Theorem sollte man bei A für die korrespondierende Temperatur, die sich, da $\vartheta_{0(A)} = 150{,}56°$ K, auf 527° K oder 254° C stellt, und für korrespondierende Volumina ebenfalls bereits die gleiche Erniedrigung

1) Vgl. Mitt. I, S. 167.

2) A. Eucken, Sitzungsber. d. preuß. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin 1914, I. S. 691); vgl. W. Nernst, Die experimentellen und theoretischen Grundlagen des neuen Wärmesatzes. Halle a. S. 1918. S. 64.

der spezifischen Wärme erwarten. Messungen der spezifischen Wärme von A für so niedrige reduzierte Volumina liegen nicht vor. Dagegen hat W. Heuse für A etwa bei Atmosphärendruck[1]) bei 15° C $c_v = 3{,}07$ und bei −180° C $c_v = 3{,}01$ gefunden. Die reduzierten Volumina betragen, da $\psi_{0(A)} = 75{,}14$, in diesen beiden Fällen 315 bzw. 102. Für unendliche Verdünnung berechnet Heuse hieraus $c_{v+15°C} = 3{,}07$, $c_{v-180°C} = 2{,}86$. Dafür, daß bei 15° C, geschweige denn bei 254° C bei A sich die Entartung der Gase bereits geltend macht, fehlt bisher bei höheren Verdünnungen jede Andeutung. Es ist auch wenig wahrscheinlich, daß bei der letzteren Temperatur und niedrigem reduzierten Volumen c_v unter 3/2 R sinkt, wenn man berücksichtigt, daß für flüssiges A beim Siedepunkt etwa $c_v = 5{,}6$[2]) ist und daß, abgesehen von kleinen Anomalien dicht unterhalb des Schmelzpunktes, die spezifische Wärme der einatomigen Flüssigkeiten einen positiven Temperaturkoeffizienten besitzt.[3]) Sieht man also die Entartung für He bei 18° K als reell an, so wird man dem unwahrscheinlichen Schluß, daß bereits bei +254° C bei komprimiertem A eine spezifische Wärme $< 3/2\ R$ als Anzeichen der Entartung vorliegen sollte, dadurch entgehen können, daß man das Theorem der übereinstimmenden Zustände wieder in der Quantenform anwendet, wobei dann $\frac{c_v/N}{k} = \Phi(\vartheta, \varphi, o)$ wird. Dann können bei den großen Unterschieden der Werte von w für A und He auch bei gleichem ϑ und φ sehr große Unterschiede in den c_v resultieren.

Für den Gang der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen der einatomigen idealen Gase nach der Quantentheorie sind zwar eine Reihe von Formeln angegeben worden, so von H. Tetrode[4]) und H. W. Keesom[5]); doch konnten sie bisher mangels experimentellen Materials nicht geprüft werden. Ich möchte daher hier nur zeigen, daß die Theorie von Keesom, die der früher erwähnten[6]) Zustandsgleichung der entarteten

1) Die Messungen von W. Heuse beziehen sich wie die von K. Scheel und W. Heuse (vgl. Ann. d. Phys. 37. S. 87. 1912) an anderen Gasen etwa auf Atmosphärendruck.

2) A. Eucken, Ber. d. D. Physikal. Gesellschaft 18. S. 11. 1916.

3) A. Eucken, a. a. O. S. 19.

4) Physik. Zeitschr. 14. S. 214. 1913.

5) Physik. Zeitschr. 14. S. 669. 1913.

6) Vgl. oben S. 177.

Gase entspricht, auch in dieser Beziehung das Quantentheorem erfüllt. Wie in der Zustandsgleichung von Keesom, so tritt auch in seiner Formel für die spezifische Wärme im allgemeinen die Grenzschwingungszahl ν_m auf, was nach obigen Ausführungen den Vergleich mit dem Quantentheorem zunächst unmöglich macht.[1]) Aber für den Grenzfall hoher Temperaturen fällt auch hier wieder ν_m heraus. Für hohe Temperaturen ist nach Keesom[2])

$$c_v = \tfrac{3}{2} R \left(1 - \frac{1}{525} \frac{(R\vartheta')^4}{(RT)^4}\right), \tag{37}$$

1) Im Falle der Debyeschen Formel für die spezifische Wärme einatomiger fester Körper (Ann. d. Phys. **39**. S. 797. 1912) läßt sich nach F. A. Lindemann ν_m auf die vom klassischen Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit für eine Größe der Dimension T_0^{-1} postulierte Form zurückführen. Nach Lindemann ist nämlich (Physik. Zeitschr. **11**. S. 609. 1910)

$$\nu_m \sim T_F^{1/2} M^{-1/2} v_F^{-1/2}. \tag{38}$$

Sofern nach R. Lorenz (Zeitschr. f. anorg. Chem. **103**. S. 243. 1918) mit guter Annäherung die absolute Schmelztemperatur T_F und das Molekularvolumen beim Schmelzpunkt v_F übereinstimmende Größen sind, kann man hierfür auch schreiben

$$\nu_m = \zeta (k\,\vartheta_0)^{1/2} m_0^{-1/2} (\varphi_0/N)^{-1/3}, \tag{39}$$

(ζ eine Konstante), ein Ansatz, der dem klassischen Theorem der übereinstimmenden Zustände und damit a fortiori unserem Quantentheorem genügt (vgl. Mitt. I, S. 170). Das ist nicht überraschend, da bereits A. Einstein (Ann. d. Phys. **35**. S. 689. 1911) und H. Kamerlingh Onnes (Kon. Amst. **20**. S. 168. 1911) bemerkt haben, daß die von Lindemann aus speziellen molekulartheoretischen Betrachtungen abgeleitete Gleichung auch aus Dimensionsbetrachtungen hergeleitet werden kann. Setzt man in die Debyesche Formel für die reduzierte spezifische Wärme pro Molekül

$$\frac{c_v/N}{k} = \frac{36}{x_0^3} \int_0^{x_0} \frac{\xi^3\, d\xi}{e^\xi - 1} - \frac{9\,x_0}{e^{x_0} - 1},$$

wobei $x_0 = \dfrac{h\,\nu_m}{k\,T}$, gemäß (39) ein: $x_0 = \dfrac{w\,\zeta}{\vartheta}$, so erscheint sie in der Form $\Phi(\vartheta, w)$ mit dem Grenzwert $\dfrac{c_v/N}{k} = 3$ für $w = 0$. Sie folgt, wie nach ihrer quantenmäßigen Ableitung zu erwarten, zwar noch dem Quantentheorem, nicht aber dem klassischen Theorem der übereinstimmenden Zustände.

2) Physik. Zeitschr. **14**. S. 670. 1913.

wobei $(R\,\vartheta')$ durch Gleichung (24) definiert ist. Bei Einführung von w in (37) geht diese Gleichung über in:

$$\frac{c_v/N}{k} = \frac{3}{2} - \frac{1}{126}\left(\frac{9}{4}\right)^{4/3} \pi^{-4/3}\,\vartheta^{-2}\,\varphi^{-4/3}\,w^4$$

entsprechend dem Quantentheorem, wobei für kleine w sowie sehr große ϑ und φ dieses Argument, wie es sein soll, aus der letzten Gleichung verschwindet.

2. Revidierte Troutonsche Regel der Verdampfungswärmen (Volumkoeffizient der inneren Energie).

Für den Volumkoeffizienten der inneren Energie ist, wie erwähnt[1]), die Erfüllung des Quantentheorems der übereinstimmenden Zustände in demselben Umfange zu erwarten wie für die thermische Zustandsgleichung (die Beziehung zwischen p, v, T). Der Beobachtung am leichtesten zugänglich ist hier das bestimmte Integral über diesen Differentialquotienten, wenn man als Grenzen des Volumens pro Mol dasjenige der Flüssigkeit $v_{\text{Fl.}}$ und des zugehörigen Dampfes $v_{\text{D.}}$ im Sättigungszustande wählt und außerdem noch die beim Übergang von 1 Mol aus der Flüssigkeit in den Dampf geleistete äußere Arbeit berücksichtigt. Die so erhaltene Größe

$$\int_{v_{\text{Fl.}}}^{v_{\text{D.}}} \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T dv + p\,(v_{\text{D.}} - v_{\text{Fl.}}) = \lambda$$

ist die äußere Verdampfungswärme, die wir nach der Gleichung von Clausius-Clapeyron auch durch

$$T_s\,(v_{\text{D.}} - v_{\text{Fl.}})\left(\frac{dp_{\text{Koex.}}}{dT}\right)$$

ausdrücken können (T_s absolute Siedetemperatur). Es ist somit

$$\frac{\lambda}{T_s} = (v_{\text{D.}} - v_{\text{Fl.}})\left(\frac{dp_{\text{Koex.}}}{dT}\right); \tag{40}$$

$$\frac{\lambda}{T_s} = \frac{kN}{\varkappa}(\varphi_{\text{D.}} - \varphi_{\text{Fl.}})\left(\frac{d\Pi_{\text{Koex.}}}{d\vartheta}\right). \tag{41}$$

1) Vgl. oben S. 185.

Da die Siedetemperaturen sehr angenähert korrespondierende sind ($T_s = 0{,}64\,\vartheta_0$ [1]), so sollen nach dem klassischen Theorem bei diesen Temperaturen $\frac{d\,\Pi_{\text{Koex.}}}{d\,\vartheta}$, $\varphi_{\text{D.}}$, $\varphi_{\text{Fl.}}$ und natürlich auch $\varkappa$ den gleichen Wert haben, wonach für λ/T_s ein universeller Wert folgt. In der Tat ist dieser Quotient, die Troutonsche Zahl, für die meisten nicht assoziierten Körper nahezu konstant 21.[2])

Aber diese Regel erleidet eine wichtige Ausnahme, sofern für Körper mit niedriger Siedetemperatur der Wert des Quotienten zugleich mit der Siedetemperatur stark abnimmt, so daß er schließlich bei He bis auf 5,2 heruntersinkt.[3]) Vom Standpunkte des Quantentheorems ist die reduzierte Verdampfungswärme $\frac{\lambda/N}{k\,\vartheta_0}$ und, soweit die Korrespondenz der Siedepunkte reicht, auch λ/T_s außer von der reduzierten Siedetemperatur ϑ_s noch vom reduzierten Wirkungsquantum abhängig, so daß wir zu setzen haben $\lambda/T_s = \Phi\,(\vartheta_s, w)$. Da für Atmosphärendruck $\vartheta_s = 0{,}64$ in erster Näherung konstant ist, so sollte λ/T_s eine reine Funktion von w werden, die für $w = 0$ in eine Konstante übergehen soll. Zur Prüfung dieser Folgerung sind wieder die experimentellen Werte der Troutonschen Zahl für alle in Betracht kommenden Substanzen nach abnehmenden w-Werten in Tab. I Kolumne 10 zusammengestellt.

Tab. I, Kolumne 9 enthält die dabei benutzten Werte von $\lambda_{\text{gef.}}$ in cal., die, soweit nichts anderes bemerkt, der vierten Auflage (Berlin 1912) von Landolt-Börnsteins physikalisch-chemischen Tabellen entnommen sind. Die Werte von $\lambda_{\text{gef.}}$ gehen entweder auf direkte Messungen zurück oder sind, ebenso zuverlässig, mit Hilfe der Clausius-Clapeyronschen Formel gewonnen. Eine besondere Bemerkung erfordern nur die mit einem * bezeichneten, von mir nach Clausius-Clapeyron neu berechneten $\lambda_{\text{gef.}}$-Werte. Für He[4]) ist

$$\log_{10}(p)_{(\text{mm Hg})} = 3{,}7290 - \frac{7{,}9780}{T} - \frac{0{,}13628}{T^2} + \frac{4{,}3634}{T^3}$$

---

1) R. Lorenz, Zeitschr. f. anorg. Chem. 103. S. 243. 1918.

2) Vgl. etwa J. P. Kuenen, Zusatzgleichung 1907. S. 155.

3) W. Nernst, Theoretische Chemie (7. Aufl.) S. 294.

4) H. Kamerlingh Onnes, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam; Verslag van de Gewone Vergaderingen de Wisen natuurkundige Afdeeling 24. S. 383. 1915.

gesetzt. Die Verdampfungswärmen von CO und CH_4 sind nach der von Nernst[1]) auf Grund der Gleichung (44)[2]) angegebenen Modifikation der Clausius-Clapeyronschen Formel

$$\lambda = RT^2 \frac{d \log p}{d T} \left(1 - \frac{p}{\Pi_0}\right)$$

berechnet, wobei unter Benutzung der van der Waalsschen Dampfdruckformel als Näherung $\log p = a_0' + b_0'/T$ (a_0' und b_0' Konstanten) angesetzt wurde.[3]) Die Dampfdruckmessungen an Kohlenoxyd von Baly und Donnan[4]) ergeben als molekulare Verdampfungswärme zwischen 80° K (615,65 mm Hg Druck) und 81° K (689,12 mm Hg) 1402,— cal., zwischen 81° K und 82° K (772,35 mm Hg) 1465,— cal., zwischen 82° K und 83° K (863,06 mm Hg) 1456,— cal. Die Werte stimmen hinreichend überein, um für den Siedepunkt 81,85° K das Mittel 1441,— cal., abgerundet 1440,— cal. zu nehmen. Für CH_4 liefern die Temperatur-Druck-Werte von Hunter[5]) 99,4° K (286 mm Hg) und 109,2° K (696 mm Hg) $\lambda = 1921$ cal., während die Werte von Olszewski[6]) 119,2° K (1702 mm Hg) und 87,2° K (79,80 mm Hg) 1927 cal. ergeben. Die Werte stimmen recht gut überein; wir nehmen als Mittel 1924 cal. (abgerundet 1920 cal.) an.

Tab. I[7]) Kolumne 10 zeigt deutlich für die tiefsiedenden Substanzen den Anstieg[8]) von λ/T_s[9]) mit $1/w$ und zugleich den

1) Theoretische Chemie (7. Aufl.) S. 236.

2) Mitt. I, S. 195.

3) Die Benutzung von Gleichung (44) (Mitt. I, S. 195) bei CH_4 und CO erscheint unbedenklich, da sie bei O_2 und N_2 zulässig ist (vgl. H. v. Siemens, Ann. d. Phys. 42. S. 886. 1913) und da CH_4 und CO sich bezüglich des Theorems der übereinstimmenden Zustände sowie der Abweichungen davon sehr nahezu wie O_2 und N_2 verhalten (vgl. Mitt. I, Fig. 2, S. 181, und Fig. 4, S. 200).

4) Journ. of the Chemical Society 81. S. 919. 1902.

5) Journ. of physical chemistry 10. S. 352. 1906.

6) Compt. rend. 100. S. 940. 1885.

7) Durch eine Kurve der Form $\alpha + \beta \frac{\delta w}{e^{\delta w} - 1}$ (vgl. Mitt. I, Gleichung (32), S. 181) stellen wir die Troutonsche Zahl hier nicht dar, da für sie in einer nachfolgenden Arbeit eine im enzielen genauer quantentheoretisch begründete Formel angegeben werden soll.

8) Hierauf wurde schon in Mitt. I, S. 189 gelegentlich der Nernstschen Dampfdruckgleichung hingewiesen.

9) Die benutzten Werte von T_s sind in Mitt. I, S. 184, Tab. IIa, Kolumne 1 zusammengestellt.

Grenzwert bei Annäherung an $1/w = \infty$. Trennung nach homologen Reihen in Tab. II Kolumne 5 und nach Gruppen von Isomeren in Tab. III Kolumne 4 läßt diese Gesetzmäßigkeiten auch hier wieder noch deutlicher hervortreten. In den homologen Reihen I—V, die die tiefsiedenden Substanzen bzw. diejenigen mit großem reduzierten Wirkungsquantum umfassen, findet nunmehr ein ausnahmslos regelmäßiger starker Anstieg von λ/T_s mit abnehmendem w statt. In den Gruppen VIII—XIV mit kleinem w bzw. großem T_s, wo der Grenzwert von λ/T_s merklich bereits erreicht ist, schwanken die Zahlen der einzelnen Reihen unregelmäßig ein wenig um den Normalwert der Troutonschen Zahl, der von unserem Standpunkt aus nunmehr als oberer Grenzwert erscheint. Bei den Gruppen von Isomeren, (vgl. Tab. III Kolumne 4), die nur Substanzen mit kleinem w umfassen, ist lediglich das Schwanken um den Grenzwert innerhalb der einzelnen Gruppen zu bemerken.

Da der Gang der Troutonschen Zahl mit w bzw. T_s ein außerordentlich starker ist (5—23) und da die Verdampfungswärme verhältnismäßig leicht theoretisch zu übersehen ist, so scheint es lohnend, gerade für den Gang dieser Größe (die sog. *„Revidierte Troutonsche Regel"* [1]) eine *genauere Theorie* unter *Spezialisierung* der hier entwickelten *Vorstellungen* auszuarbeiten.

III. Prüfung des Quantentheorems der übereinstimmenden Zustände außerhalb der reinen Thermodynamik.

Sofern der Ausdruck unseres Quantentheorems in Gleichung (17) (Mitt. I, 170) umfassender ist als in Gleichung (15) (Mitt. I, 167), sollte es nicht nur für thermische Größen in ausgedehnten Phasen im Gleichgewichtszustand gelten. Es ist vielmehr einer Erweiterung fähig durch Übergang von *Gleichgewichtszuständen* zu den *Vorgängen*, mit deren Hilfe sich das *Gleichgewicht* erst *einstellt* (innere Reibung), durch Übergang vom *Inneren* der ausgedehnten Phase zu ihrer *Begrenzung* (Kapillarität) sowie durch Übergang von *mechanisch-thermischen* zu *elektromagnetischen Größen* (Molekularrefraktion).

---

1) W. Nernst, Theoretische Chemie (7. Aufl.) S. 295.

A. Innere Reibung der Gase und Flüssigkeiten.

Nach seiner Bedeutung als einer Kraft pro Flächeneinheit und für die Einheit des Geschwindigkeitsgefälles besitzt der Koeffizient der inneren Reibung η die Dimension

$$\frac{M_0}{L_0 T_0} = M_0^{1/3} (\text{Energie})^{1/3} (\text{Volumen})^{-2/3}.$$

Das klassische Theorem der übereinstimmenden Zustände fordert somit bei übereinstimmenden Volumina und Temperaturen Proportionalität von η mit

$$m_0^{1/3} (k \vartheta_0)^{1/3} \left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{-2/3}.$$

Diese Forderung hat sich zunächst für hochsiedende Flüssigkeiten, wenn auch nicht mehr als in grober Annäherung bewährt. Nach H. Kamerlingh Onnes und de Haas[1]) kommen selbst bei nicht assoziierten Stoffen Schwankungen des reduzierten Reibungskoeffizienten im Verhältnis von 1,5:2,8 vor. Die mangelnde geometrische Ähnlichkeit macht sich hier also sehr stark geltend.[2])

1. Reibungskoeffizient nach Reinganum.

Der Reibungskoeffizient von Gasen als Temperaturfunktion[3]) sollte sich nach dem klassischen Theorem in der Form darstellen lassen

$$\eta = \Phi(\vartheta) m_0^{1/3} (k \vartheta_0)^{1/3} \left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{-2/3}.$$

Wenn also Reinganum[4]) für ihn eine Formel[5]) angibt

$$(42)\quad \eta = \frac{0{,}39525 \cdot \varrho \sqrt{\frac{R T}{M}}}{N' \pi \sigma_0^2 e^{\varepsilon/T}} = a' \left[m_0^{1/3} (k \vartheta_0)^{1/3} \left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{-2/3} \right] \cdot \vartheta^{1/3} \cdot e^{-\varepsilon/\vartheta_0 \vartheta}$$

1) Verslagen der Zittingen van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam) 3. S. 62. 1895.

2) Vgl. auch H. Kamerlingh Onnes und W. H. Keesom, a. a. O. S. 731 sowie v. Smoluchowski (Kosmos, Zeitschr. der polnischen Naturforschenden Gesellschaft Kopernikus 35. S. 549. 1910).

3) Vom Druck ist er bei nicht extremen Werten der kinetischen Gastheorie entsprechend unabhängig.

4) Ann. d. Phys. 10. S. 341. 1903.

5) Bei Reinganum steht R an Stelle von R/M, da R bei ihm (vgl. a. a. O. S. 338) die Gaskonstante für die Masseneinheit und nicht wie üblich für das Mol bezeichnet.

(ϱ Dichte, N' Anzahl der Moleküle für die Volumeinheit, σ_0 Durchmesser des Moleküls, a' eine universelle dimensionslose Konstante[1])), so muß nach dem klassischen Theorem c'/ϑ_0 eine universelle Konstante sein. Im Falle der Gültigkeit des Quantentheorems dagegen ist nicht einfach[2]) $\sigma_0^2 \sim \varphi_0^{2/3}$, sondern wir müssen die beiden individuellen Konstanten setzen: $\sigma_0 = \chi(w) \cdot \varphi_0^{2/3}$, $c' = \psi(w) \cdot \vartheta_0$, also:

$$(43) \quad \begin{cases} \eta = \chi'(w) \cdot \vartheta^{1/2} e^{-\frac{\psi(w)}{\vartheta}} \left[m_0^{1/2} (k\vartheta_0)^{1/2} \left(\frac{\varphi_0}{N} \right)^{-2/3} \right]; \\ \eta = \Phi(w, \vartheta) \left[m_0^{1/2} (k\vartheta_0)^{1/2} \left(\frac{\varphi_0}{N} \right)^{-2/3} \right]. \end{cases}$$

Nun hat bereits Reinganum[3]) selbst bemerkt, daß c'/ϑ_0 für die verschiedenen Substanzen nicht konstant ist, sondern einen Gang mit der kritischen Temperatur zeigt, hieraus auf die Ungültigkeit des klassischen Theorems der übereinstimmenden Zustände auch in diesem Falle geschlossen und hat auch auf die Analogie dieses Befundes mit der Abweichung von der klassischen Troutonschen Regel aufmerksam gemacht. Für uns, die wir diese Beziehung nicht an ϑ_0, sondern an w anknüpfen, ist dies keine bloße empirische Analogie, sondern eine Folgerung aus unserem allgemeinen Quantentheorem.

Tab. I Kolume 7 enthält die gefundenen Werte[4]) von[5]) ϑ_0/c' nach abnehmenden w geordnet. Der Gang von ϑ_0/c' mit w in dieser Tabelle sowie in der Fig. 2 ist wieder sehr deutlich. Bei CH_3Cl mit $w = 0{,}0491$ scheint bereits die Grenze erreicht zu sein. Es tritt dann keine weitere Zunahme von ϑ_0/c' mehr ein, sondern eine kleine, wohl innerhalb der Fehlergrenzen liegende Abnahme. Daß A einen etwas kleineren Wert von

---

1) Die individuelle Konstante c' hängt mit dem Potential der Molekularattraktion zusammen.

2) Vgl. hierzu bei Reinganum (Ann. d. Phys. 28. S. 147. 1909), wonach im Falle des klassischen Theorems gelten sollte:

$$\frac{\sigma_0^2}{v} \sim \frac{\varphi_0}{v}, \quad \sigma_0^3 \sim \varphi_0.$$

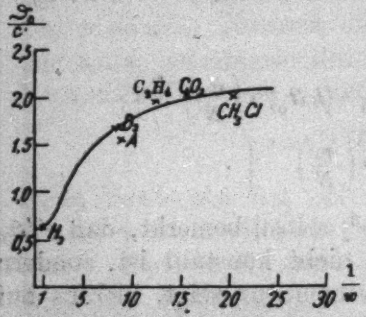
3) Ann. d. Phys. 28. S. 147. 1909.

4) Nach Reinganum, a. a. O. S. 145.

5) Wir betrachteten statt c'/ϑ_0 den reziproken Wert ϑ_0/c', um auch bei dieser Quasi-Invariante einen Anstieg mit abnehmenden w zu erhalten.

ϑ_0/c' besitzt als O_2, liegt wohl daran, daß hier bei den wenig voneinander verschiedenen w-Werten sich der Einfluß der geometrischen bzw. mechanischen Unähnlichkeit bei ein- und zwei-atomigen Verbindungen geltend macht.

$$\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right)_{ber.} = 0{,}638 + 1{,}71 \cdot \frac{7{,}56 \cdot w}{e^{7{,}56 \cdot w} - 1}$$



Die reziproke reduzierte Konstante der Molekularattraktion in der Reinganumschen Formel für die innere Reibung der Gase als Funktion des reziproken reduzierten Wirkungsquantums.

Fig. 2.

Die ausgezogene Kurve der Fig. 2 zur Darstellung von $1/\psi\,(w)$ entspricht wieder der Form (32)[1]), wobei diesmal die Konstanten

$$\alpha = 0{,}638, \quad \beta = 1{,}71, \quad \delta = 7{,}56$$

zu setzen sind. Der mittlere Beobachtungsfehler als Maß der klassisch zu begründenden Abweichung wird hier

$$i\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right) = 0{,}126,$$

die quantentheoretische Abweichung

$$J\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right) = 1{,}34,$$

somit

$$\frac{i\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right)}{J\left(\frac{\vartheta_0}{c'}\right)} = 0{,}094;$$

d. h. es werden durch die Quantentheorie 90,6% der ursprünglichen Abweichung weggeschafft.

L. Boltzmann[2]) verwirft von seinem klassischen molekularmechanischen Standpunkte die Maxwellsche Theorie der inneren Reibung der Gase, die auf der Abnahme einer der 5. Potenz der Entfernung umgekehrt proportionalen Abstoßungskraft zwischen den Molekülen beruht, weil sie zwar für zusammengesetztere Gase wie CO_2 gut mit der Erfahrung stimme, nicht aber für die *„gewöhnlichsten"* wie H_2 und O_2, für die man die Gültigkeit der Theorie nach Boltzmann doch in erster

1) Mitt. I, S. 181.

2) Vorlesungen über Gastheorie I (Leipzig 1896) S. 160.

Linie erwarten sollte.[1]) Von dem gewonnenen quantentheoretischen Standpunkte aus wird man indes in den Abweichungen bei H_2 und O_2 durchaus noch kein Argument gegen die Maxwellsche Annahme zu sehen brauchen. Nach Fig. 2 gelten für CO_2 bereits merklich klassische Verhältnisse, nicht aber für H_2 und O_2, die auf dem noch stark ansteigenden Aste der Quantenkurve liegen. Daher darf man zwar für CO_2 die Rechnung, wie Maxwell[2]) und Boltzmann dies tun, gemäß der klassischen Statistik führen; bei O_2 und namentlich bei H_2 mit ihren hohen reduzierten Wirkungsquanten dagegen muß die Statistik quantenmäßig behandelt werden, und das Maxwellsche Abstoßungsgesetz dürfte dann nicht mehr zur einfachen Proportionalität zwischen der absoluten Temperatur und dem Reibungskoeffizienten führen wie auf dem Boden der klassischen Mechanik.

2. Reibungskoeffizient nach Nernst.

W. Nernst[3]) hat im Anschluß an seine Zustandsgleichung entarteter Gase (vgl. oben S. 176) eine Theorie der inneren Reibung gegeben, die zu dem Reibungskoeffizienten führt

$$\eta = \frac{1}{9} \cdot \frac{m_0^3 \cdot q_0^3}{h^3} = \frac{3^{3/2}}{9} \frac{k^{3/2}}{h^3} (m_0 T)^{3/2}$$

(q_0 mittlere Molekulargeschwindigkeit). Wenn wir w und ϑ einführen und η seiner Dimension gemäß reduzieren, so erhalten wir

$$\frac{\eta}{m_0^{1/2} (k \vartheta_0)^{1/2} \left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{-2/3}} = \frac{3^{3/2}}{9} \cdot \frac{\vartheta^{3/2}}{w^2}, \tag{44}$$

d. h., wie es sein soll, eine Funktion von ϑ und w für den reduzierten Reibungskoeffizienten. Die Beziehung (44) erfüllt nicht die Bedingung unseres Quantentheorems, wonach der redu-

1) Die gleiche klassisch-mechanische Auffassung kommt auch bei W. Nernst (Theoretische Chemie, 7. Aufl., S. 235) zum Ausdruck, wenn er bei der van der Waalsschen Dampfdruckformel feststellt, daß bezüglich ihrer das klassische Theorem der übereinstimmenden Zustände nicht einmal für einatomige Stoffe wie He, A, Kr zutrifft. Dieses *Bedenken erledigt* sich durch die *Quantentheorie* in der *gleichen Weise* wie dasjenige von Boltzmann.

2) Philosophical Magazine (4) **35**. S. 144. 1868.

3) Sitzungsber. d. preußischen Akademie d. Wissensch. zu Berlin 1919. S. 118; vgl. auch P. Günther ebenda 1920. S. 720.

zierte Wert von η für kleine w von w unabhängig sein soll. Aber sie beansprucht in diesem Falle gar keine Geltung, sondern Nernst[1]) beschränkt ihren Anwendungsbereich ausdrücklich auf kleine Atom- bzw. Molekular-Gewichte[2]), wodurch also ein Übergang zu großen Werten von

$$m_0^{1/2} (k \vartheta_0)^{1/2} \left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{1/2}$$

bzw. kleinen Werten von w ausgeschlossen wird.

B. Kapillarität.

σ_0', die Oberflächenspannung, ist von der Dimension Kraft/Länge, also der Temperaturkoeffizient der molekularen Oberflächenenergie $d(\sigma_0' v^{2/3})/dT$ von der Dimension der Entropie. Er sollte also nach unserem Quantentheorem die Form haben[3]) $\Phi(\vartheta, \varphi, w) \cdot k$ (45). Der Einfluß von ϑ und φ pflegt bei nicht assoziierten Substanzen in erster Näherung vernachlässigt zu werden.[4]) Dann fordert das klassische Theorem, in welchem w als Argument ausscheidet, daß der Ausdruck (45) eine universelle Konstante sei. Nach Eötvös ist das bekanntlich so weitgehend der Fall[5]), daß man den Normalwert 2,12 von $k_e = -\frac{d}{dT}(\sigma_0' v^{2/3})$ geradezu als eines der besten Kriterien für normales Molekulargewicht benutzen kann.[6])

Indes haben sich auch, abgesehen von den typischen assoziierten Substanzen wie den Alkoholen, bei zwei Klassen von Körpern, die man zunächst als normale zu betrachten geneigt

1) a. a. O. S. 127.

2) Die Formel erweist sich bei H_2 und He als brauchbar zur Darstellung der Beobachtungen.

3) Vgl. Mitt. I, S. 164.

4) Vgl. J. P. Kuenen, Die Eigenschaften der Gase 1919, S. 426.

5) Der Zusammenhang zwischen dem Gesetz von Eötvös und dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit zeigt sich z. B. auch in der Ableitung dieses Gesetzes durch A. Einstein (Ann. d. Phys. 34. S. 169. 1911) darin, daß es eine zunächst überraschende Proportionalität zwischen dem Radius der molekularen Wirkungssphäre und dem Abstand benachbarter Moleküle in der Flüssigkeit fordert, da eben nach dem Ähnlichkeitsprinzip irgendwelche miteinander korrespondierende Lineardimensionen bei jeder einzelnen Substanz im gleichen Verhältnis zueinander stehen müssen.

6) Ramsay und Shields, Zeitschr. f. physik. Chemie 12. S. 444. 1895.

war, Abweichungen vom Normalwert von k_e gezeigt. Einmal haben die niedrigsiedenden Gase abnorm kleine Werte des Temperaturkoeffizienten; so ist $k_{e(N_2)} = 2{,}002$, $k_{e(CO)} = 1{,}996$, $k_{e(O_2)} = 1{,}917$, $k_{e(A)} = 2{,}020$. Auf der anderen Seite ergeben sich anomal große Werte von k_e bei hochsiedenden Körpern von hohem Molekulargewicht[1]), die bei Tristearin, für das $M = 890{,}9$, bis zu dem außerordentlich hohen Werte von 6,21 steigen.[2]) Indem man am klassischen Theorem der übereinstimmenden Zustände festhielt, hat man konsequenterweise die zu niedrigen Werte durch Assoziation[3]), die zu hohen durch Dissoziation[4]) zu erklären versucht. Aber eine solche Annahme findet gerade in dem hervorstechendsten Falle des Tristearins in dem sonstigen, z. B. dem ebullioskopischen Verhalten dieses Körpers keine Stütze.[5]) P. Walden und R. Swinne[6]) haben diese und ähnliche Fälle der Regel von Eötvös dadurch einzuordnen gesucht, daß sie für die höheren Temperaturen, die für diese hochsiedenden Substanzen mit den Beobachtungstemperaturen der übrigen Körper korrespondieren würden, für die aber direkte Messungen von k_e nicht vorliegen, wegen der bei zugänglichen Temperaturen beobachteten Abnahme von k_e mit steigender Temperatur erheblich kleinere k_e-Werte vermuten. Doch halten sie selbst dieses Argument für den im Sinne der Regel von Eötvös normalen Charakter der betreffenden Substanzen für nicht sehr beweiskräftig.

Unser Quantentheorem vermag die Abweichungen der k_e-Werte nach beiden Seiten hin auch ohne Inanspruchnahme einer Korrektion wegen der Verschiedenheit der reduzierten Temperaturen, bei denen die Beobachtung von k_e für die einzelnen Substanzen stattgefunden hat, zu erklären. Wir haben auf der einen Seite wieder die tiefsiedenden Gase mit den

---

1) P. Walden, Zeitschr. f. physik. Chemie 75. S. 577. 1911; Ph. A. Guye, Journ. de chim. physique 9. S. 509. 1911.

2) P. Walden, a. a. O.; die kritische Temperatur ist hier nicht bekannt; P. Walden und R. Swinne schätzen sie mit Hilfe einer allerdings ziemlich unsicheren Extrapolation auf 1670° K (Zeitschr. f. phys. Chem. 79. S. 756. 1912).

3) L. Grummach, Physik. Zeitschr. 7. S. 743. 1906.

4) J. Homfrey und Ph. A. Guye, Journ. de chim. physique 1. S. 536. 1903.

5) P. Walden, Zeitschr. f. phys. Chem. 75. S. 561. 1911.

6) Zeitschr. f. phys. Chem. 79. S. 756. 1912.

ungewöhnlich hohen w-Werten, auf der anderen die hochmolekularen und hochsiedenden Substanzen mit besonders kleinen w[1]), so daß $\Phi(w) = \chi(w)$ in (45) eine mit abnehmendem w regelmäßig zunehmende Funktion darstellt.

Wie bei gewissen anderen thermodynamischen Quasi-Invarianten, so hat man auch bei k_c in homologen Reihen einen Gang bemerkt, derart, daß es mit zunehmendem Molekulargewicht zunimmt.[2]) Sofern M, ϑ_0 bzw. T_s und φ_0 im allgemeinen in homologen Reihen zunehmen und w damit abnimmt, stellt sich auch in diesem Falle k_c als eine Funktion von w dar. Doch ist hier die Möglichkeit im Auge zu behalten, daß die beim Übergang von einer Substanz zur anderen bei *festgehaltener absoluter Temperatur* wegen der Änderung von ϑ_0 im allgemeinen eintretende *Änderung von* ϑ die regelmäßige Erhöhung von k_c zur Folge haben könnte. Wenn wir in früheren Fällen diese Möglichkeit nicht in Betracht zu ziehen brauchten, so liegt das daran, daß es sich dort um Invarianten handelte, die ihrem Geltungsbereich nach entweder von ϑ und φ unabhängig waren oder sich, wie die Troutonsche Zahl, wenigstens auf mit hinreichender Genauigkeit übereinstimmende Zustände bezogen bzw. bei denen dem Einfluß von ϑ und φ Rechnung getragen werden kann.

---

1) Wenn wir wegen Unkenntnis von ϑ_0 und φ_0 für Tristearin auch w nicht genau angeben können, so wird sein Wert doch jedenfalls weit unterhalb des kleinsten Wertes unserer Tab. I Kolumne 1 ($w_{SnCl_4} = 0{,}0131$) fallen. Setzen wir nämlich für ϑ_0 den obigen Schätzungswert von 1670° K und für die kritische Dichte den bei 65,5° C beobachteten Wert der Dichte 0,9245 (Beilstein, Handbuch der organischen Chemie, 3. Aufl. Bd. I, S. 446. 1893), so erhalten wir für Tristearin $w = 0{,}0030$, ein Wert, der sicher noch viel zu hoch ist, da die kritische Dichte natürlich weit niedriger sein wird als die hier benutzte.

2) Vgl. P. Walden und R. Swinne, Zeitschr. f. phys. Chem. 82. S. 276. 1913 sowie Dutroit und Friederich, Archives des sciences physiques et naturelles 9. S. 126. 1900. Nur die Werte von

$$k_c = -\frac{d}{dT}(\sigma_0' v^{2/3}),$$

nicht diejenigen von

$$-\frac{d}{dT}(\sigma_0' v),$$

die Walden und Swinne auch in Betracht ziehen, sind hier zu verwenden, da der letztere Ausdruck seiner Dimension nach (Entropie × Länge) eine individuelle spezifische Einheit besitzt und das klassische Theorem daher seine Konstanz gar nicht fordert.

C. Molekularrefraktion.

Die Molekularrefraktion $R_m = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \cdot \frac{M}{\varrho}$ (n_0 Brechungsexponent für unendliche Wellenlängen, ϱ Dichte) stellt nach Clausius-Mossotti den von den Molekülen eines Grammols wirklich eingenommenen Raum abzüglich der Zwischenräume dar. Sofern sie von Druck und Temperatur unabhängig ist, soll sie nach dem Quantentheorem die Form haben

$$R_m = \chi(w)\left(\frac{\varphi_0}{N}\right).$$

Es wird also die nach Ph. A. Guye[1]) definierte reduzierte Molekularrefraktion

$$\frac{R_m \Pi_0}{\vartheta_0} = \frac{R\chi(w)}{\varkappa(w) \cdot N} = \psi(w)$$

eine Funktion von w allein bzw. im klassischen Grenzfalle eine Konstante. Nach J. P. Kuenen[2]) ist $R_m \Pi_0/\vartheta_0$ in erster Näherung konstant. Die Werte schwanken, wenn man die kritischen Drucke in Atmosphären mißt, bei nicht assoziierten Stoffen zwischen 1,8 und 2,0 und steigen nur ausnahmsweise bis zu 2,2 an.

Eine Sonderstellung nehmen wieder die tiefsiedenden Gase ein. Es ist[3]) $R_m \Pi_0/\vartheta_0$ für N_2: 1,1—1,2; CO: 1,3—1,4; O_2: 1,3, ein Befund, der sich nach (46) durch die hohen w-Werte dieser Substanzen erklären läßt. Aber auch hier bleibt, wie oben bei der Eötvösschen Konstante, und zwar aus dem gleichen Grunde, das Bedenken bestehen, daß die Unterschiede vielleicht durch den nicht hinreichend übereinstimmenden Charakter der Beobachtungstemperaturen bedingt sind.[4]) Dazu kommt noch, daß sich die Messungen nicht, wie es nach (46) sein sollte, auf unendlich lange Wellen, sondern auf die D-Linie beziehen.

Wir sehen somit, daß die *sogenannten* thermodynamischen *Invarianten*, deren universelle Konstanz das klassische Theorem der übereinstimmenden Zustände fordert, in der Tat über das ganze von der van der Waalsschen Theorie der Aggregatzustände umfaßte Erscheinungsgebiet hin entsprechend

1) Annales de chim. et de physique [6] 21. S. 214. 1890.
2) Die Eigenschaften der Gase. S. 435. 1919.
3) Ph. A. Gnye, a. a. O. S. 233.
4) Vgl. Ph. A. Gnye, a. a. O.

unserem Quantentheorem sich als *Funktionen des reduzierten Wirkungsquantums w* darstellen, die sich im Falle kleiner *w* bestimmten Grenzwerten, eben den Invarianten des klassischen Theorems, nähern.

Sofern wir nunmehr durch den individuellen Parameter *w* den Grad des klassischen bzw. quantenhaften Verhaltens einer jeden Substanz quantitativ charakterisieren können, dürfen wir von einem *chemischen Individuum* als im *Verhältnis* zu *anderen* chemischen Individuen und nicht nur von bestimmten Zuständen einer Substanz gegenüber anderen Zuständen der gleichen Substanz behaupten, daß bei ihm die *Quanteneffekte stärker* oder *schwächer* hervortreten. Es sind gerade die *einfachsten Moleküle* der ein- und zweiatomigen Gase, von denen die ältere, klassische Molekulartheorie als von den „gewöhnlichsten" die Erfüllung der Forderungen der *klassischen Molekularmechanik* am ehesten erwarten zu dürfen glaubte, die ihr infolge ihres großen reduzierten Wirkungsquantums in Wahrheit am *fernsten stehen.*[1])

Während wir in Übereinstimmung mit der herrschenden Meinung die kleineren, unregelmäßigen Schwankungen der Quasi-Invarianten der mangelnden geometrischen bzw. mechanischen Ähnlichkeit der einzelnen Moleküle zuschreiben, die auch nach der klassischen Mechanik Abweichungen vom Theorem der übereinstimmenden Zustände bedingt, führen wir nunmehr die *beiden Arten grober Abweichungen* vom *Theorem*, die *der assoziierten* und der *tiefsiedenden Substanzen*[2]) auf zwei *völlig verschiedene Ursachen* zurück. Während die erstere Abweichung sich auf dem Boden der klassischen Mechanik durch Bildung von Doppelmolekülen oder mehrfachen Molekülen erklären läßt[3]), sehen wir in den Abweichungen zweiter Art in dem hier dargelegten Sinne typische Quanteneffekte. In der Kontroverse zwischen Agglomerations- und Quanten-Hypothese scheinen sich somit, soweit der fluide Aggregatzustand in Betracht kommt, beide Auffassungen nicht gegenseitig auszuschließen, sondern vielmehr zu ergänzen. Das Überraschende ist dabei, daß die hier aufgezeigten Quanten-

1) Vgl. oben S. 195.

2) Bezüglich der empirischen Ausnahmestellung der beiden Klassen von Substanzen gegenüber dem klassischen Theorem der übereinstimmenden Zustände vgl. etwa A. Wohl, Zeitschr. f. phys. Chem. 87. S. 4. 1914.

3) Kamerlingh Onnes und Keesome, a. a. O. S. 722.

effekte der quasi-einatomigen[1]) Gase und Flüssigkeiten sich nicht nach Art der meistens bisher gesuchten und vermuteten als schwer zugängliche Erscheinungen darstellen, für die man bei eigens dafür angestellten Versuchen allenfalls mehr oder weniger sichere Andeutungen erhält wie bei extrem tiefen Temperaturen für die Zustandsgleichung nach Sackur[2]) und die spezifische Wärme nach Eucken.[3]) Es handelt sich vielmehr um grobe, in heute bequem zugänglichen Temperaturgebieten liegende Erscheinungen[4]), die sich seit langem bereits empirisch aufgedrängt haben und deren Einordnung in die auf dem Boden der klassischen Mechanik erwachsene Theorie der übereinstimmenden Zustände trotz aller Bemühungen nicht gelingen wollte.[5]) Bedenkt man, daß sich das elementare Wirkungsquantum seinem Entdecker beim Studium der Wärmestrahlung, d. h. der Thermodynamik einer ausgezeichneten Substanz, nämlich des Vakuums[6]), ebenfalls durch grobe Abweichungen von den Forderungen der klassischen Theorie, in diesem Falle vom Rayleigh-Jeansschen Gesetz, aufgedrängt hat und daß es sich auch bei der Einsteinschen quantentheoretischen Deutung der altbekannten Abweichungen vom Dulong-Petitschen Gesetz, namentlich beim Diamanten, sowie bei dem von Nernst und seinen Mitarbeitern gefundenen Temperaturabfall der spezifischen Wärme fester Körper nicht etwa nur um bloße Korrektionseffekte handelt, so wird man die Rolle, die der Quantentheorie in der Thermodynamik der Gase und Flüssigkeiten in der vorliegenden Arbeit zugeschrieben wird, für eine solche halten dürfen, die sich den bereits ausgebildeten Teilen der Quantentheorie der Aggregatzustände in weitestem Sinne in durchaus natürlicher Weise einfügt.

Berlin, den 15. Mai 1922.

---

1) Vgl. Mitt. I, S. 167.
2) Vgl. oben S. 177.
3) Vgl. oben S. 185.
4) Vgl. Mitt. I, S. 202.
5) Vgl. hierzu W. Nernst, Theoretische Chemie (7. Aufl.) S. 236.
6) Bezüglich der Auffassung des Vakuums als einer Substanz im Sinne der Thermodynamik vgl. A. Byk, Ann. d. Phys. 19. S. 447. 1906.

(Eingegangen 20. Mai 1922.)

2. *Die Einsteinsche Nadelstichstrahlung und die Maxwellschen Gleichungen;* *von C. W. Oseen.*

Die folgenden Zeilen haben den Zweck zu zeigen, daß die Maxwellschen Gleichungen Lösungen besitzen, die, zwar nicht genau, aber in beliebiger Annäherung die Eigenschaften einer Einsteinschen Nadelstichstrahlung haben. Sie stellen mit anderen Worten eine monochromatische Strahlung dar, die von einer punktförmigen Quelle ausgeht und deren Energie, bis auf einen beliebig kleinen Bruchteil derselben nur innerhalb eines bestimmten, beliebig kleinen Raumwinkels ins Unendliche abströmt. Ich versuche hier nicht, die allgemeinsten Lösungen dieser Art zu bestimmen. Ich begnüge mich damit, an einem besonders einfachen Beispiele die Existenz solcher Lösungen darzutun.

Die Maxwellschen Gleichungen im Vakuum:

$$(1)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, & \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \\ \operatorname{div} E = 0, & \operatorname{div} H = 0, \end{cases}$$

besitzen die Lösung:

$$(2)\qquad E = \operatorname{rot}\operatorname{rot} P, \quad H = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial P}{\partial t},$$

wo P eine beliebige Lösung der Vektorgleichung:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \Delta P$$

ist. Ich setze:

$$(3)\qquad \begin{cases} P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = \left\{ a_0 + a_1\left(\frac{ic}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right) \right. \\ \qquad \left. + a_2\left(\frac{ic}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{ic}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \right\} \frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}, \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{cases}$$

Die Energie, die pro Sekunde innerhalb eines Raumwinkels $d\tilde{\omega}$ durch eine Kugel um den Anfangspunkt und mit dem Radius r hindurchgeht, ist mit $r^2\, d\tilde{\omega}\, E \times H$ proportional, wenn wir mit $E \times H$ das vektorielle Produkt von E und H bezeichnen. Die Energie, die pro Sekunde innerhalb des Raumwinkels $d\tilde{\omega}$ ins Unendliche abströmt, hängt demzufolge nur von denjenigen Gliedern von E und H ab, die bei wachsendem r wie $1/r$ gegen Null konvergieren. Wenn wir nur diese Glieder berücksichtigen, so haben wir in genügend großer Entfernung von dem Anfangspunkte:

$$E_x = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{xz}{r^3}\,F\left(\frac{x}{r}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$

$$E_y = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{yz}{r^3}\,F\left(\frac{x}{r}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$

$$E_z = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)F\left(\frac{x}{r}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$

$$H_x = \frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{y}{r^2}\,F\left(\frac{x}{r}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$

$$H_y = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{x}{r^2}\,F\left(\frac{x}{r}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$

Hier ist:

$$F\left(\frac{x}{r}\right) = a_0 + a_1\frac{x}{r} + a_2\frac{x^2}{r^2} + \cdots + a_n\frac{x^n}{r^n}.$$

Unsere Formeln zeigen, daß die Energie, die pro Sekunde innerhalb des Raumwinkels $d\tilde{\omega}$ abströmt, mit $\left[F\left(\frac{x}{r}\right)\right]^2$ proportional ist.

Ich bezeichne mit $\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$ irgendeine im Intervall

$$-1 \leqq \frac{x}{r} \leqq +1$$

geklärte und stetige Funktion von x/r. Wenn ε eine beliebig kleine, positive Größe ist, so kann man nach einem bekannten Satz von Weierstraß die ganze, positive Zahl n und die reellen Größen $a_0, a_1, \ldots a_n$ so bestimmen, daß für

$$-1 \leqq \frac{x}{r} \leqq +1:$$

$$\left|F\left(\frac{x}{r}\right) - \varphi\left(\frac{x}{r}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

Ich nehme jetzt an, daß $\varphi\left(\frac{x}{r}\right) = 0$ für $-1 \leqq \frac{x}{r} \leqq \cos\vartheta$, wo ϑ eine beliebig kleine, positive Zahl ist. Gleichzeitig soll:

$$\int \varphi^2 \, d\omega = 1.$$

Bis auf den beliebig kleinen Bruchteil ε^2 strömt dann die ganze Energie der durch die Formeln (2) — (4) definierten Strahlung innerhalb des Raumwinkels $x/r > \cos\vartheta$ ins Unendliche ab.

Man kann, um ein konkretes Beispiel zu erwähnen, auf diese Weise eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen herstellen, die eine Strahlung darstellt, die von einer punktförmigen Quelle auf der Erde ausgeht und deren Energie bis auf $\frac{1}{10^{10}}$ ins Unendliche innerhalb eines Raumwinkels abfließt, der von der Oberfläche von Sirius ein Flächenelement von der Größe eines Fünfpfennigstückes ausschneidet.

Ich möchte an den jetzt bewiesenen Satz eine Frage knüpfen. Wenn man annimmt, daß die Maxwellschen Gleichungen außerhalb der Atome gültig sind, dann kann ein Atom offenbar einer einfallenden Welle nur dann Energie entziehen, wenn es selbst eine Welle aussendet, welche die einfallende Welle zum Teil auslöscht. Die einfallende Welle würde ja sonst genau dieselbe Energie ins Unendliche transportieren wie in dem Falle, wo keine Absorption stattfindet, was offenbar unmöglich ist. Wenn die Maxwellschen Gleichungen außerhalb eines Atoms gültig sind, so kann man deshalb stets die absorbierte Energie als Differenz zweier positiver Größen, der aufgenommenen Energie und der abgegebenen Energie, darstellen. Ich frage jetzt: welcher ist der größte Wert, den der Bruch:

$$\frac{\text{absorbierte Energie}}{\text{aufgenommene Energie}}$$

annehmen kann? Für jede Theorie der Wärmestrahlung, die insofern auf klassischem Boden bleibt, daß sie die Maxwellschen Gleichungen außerhalb des Atoms als gültig anerkennt, ist die Antwort dieser Frage von grundlegender Bedeutung.

(Eingegangen 18. Juli 1922.)

3. *Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtenbergschen Figuren und ihre Verwendung zur Messung sehr kurzer Zeiten;* *von P. O. Pedersen.*

(Hierzu Tafel II und III.)

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) ist eine Methode zur Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit positiver und negativer Lichtenbergscher Figuren angegeben und dazu benutzt worden, um die mittleren Geschwindigkeiten in der Nähe der Elektroden zu bestimmen. Außerdem wurde dort im Kapitel VII gezeigt, wie diese Methode auch zur Messung der Verzögerung elektrischer Funken Verwendung finden kann.

Inzwischen ist eine ziemlich umfangreiche Untersuchung über dieses Problem der Verzögerung elektrischer Funken durchgeführt worden, deren Ergebnis an anderem Orte veröffentlicht werden soll. Im Laufe der Untersuchung stellte es sich als wünschenswert heraus, zu wissen, wie sich die Geschwindigkeit verändert, von den Elektroden angefangen, wo sie am größten ist, bis zum äußersten Rande der Figur, wo sie gleich Null ist. Es erwies sich auch als notwendig, auf die Theorie dieser Messungen genauer einzugehen und insbesondere zu untersuchen, was für Fehler durch eine flache Wellenstirn hervorgerufen werden können. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist in der vorliegenden Arbeit niedergelegt worden.

Das zu lösende Problem besteht in der Hauptsache in folgendem. In einem bestimmten Augenblicke geht eine Lichtenbergsche Figur von einer Elektrode aus und nach t Sekunden hat ihre äußere Grenze eine Entfernung von r cm von der Elektrode erreicht. Der durchlaufene Abstand r hängt von der Zeit t ab,

$$r = F(t). \tag{I}$$

1) P. O. Pedersen, On the Lichtenberg Figures Part I Vid. Selsk. Math. fys. Medd. I 11 Copenhagen 1919. Wenn im folgenden darauf hingewiesen wird, soll die Arbeit abgekürzt mit L F I bezeichnet werden.

Die Funktion F hängt von der Amplitude des Impulses, von der Art und Dichte des Gases, von der Dicke der photographischen Platte (P in Fig. 1) und möglicherweise noch von anderen Bedingungen ab. Die Aufgabe ist nun, F zu bestimmen.

Ist diese Funktion bekannt, so ist die Geschwindigkeit U gegeben durch

$$U = \frac{dF(t)}{dt} = U(t) \tag{II}$$

und die Zeit t, die einer bekannten Entfernung r entspricht, kann dadurch gefunden werden, daß man (I) nach t auflöst. Wir wollen diese Lösung in der Form

$$t = f(r) \tag{III}$$

schreiben.

Wenn andererseits Gleichung (II) oder (III) gegeben ist, so können wir daraus (I) ermitteln.

Die schließliche Reichweite R der Figur wird gegeben durch

$$R = F(\infty)\,. \tag{IV}$$

Die Beziehung (I) ist auf zwei verschiedene Weisen bestimmt worden:

a) Durch Messung zusammengehöriger Werte von t und r nach der in L. F. I. angegebenen Methode, die weiter unten im Abschnitt 1 kurz beschrieben werden wird.

b) Aus der Form der Grenzlinie zwischen zwei Figuren, die von geraden Elektroden ausgehen, wird mathematisch die Gleichung (II) abgeleitet. Die Einzelheiten dieser Methode sind in dem folgenden Abschnitt 2 angegeben.

Im Abschnitt 3 wird gezeigt, daß die Ergebnisse aus den zwei Methoden a) und b) gut miteinander übereinstimmen.

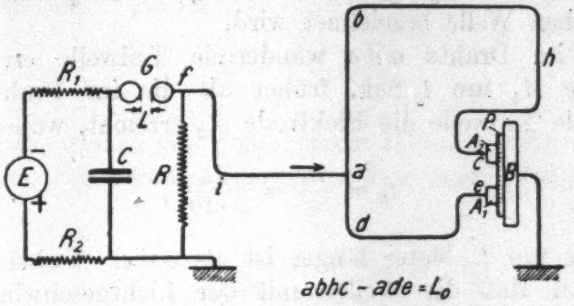
Abschnitt 4 behandelt den Einfluß flacher Wellenstirnen, Abschnitt 5 bringt Einzelheiten über die Form der Grenzlinie, Abschnitt 6 enthält ein Paar Schlußbemerkungen.

1. Methode zur Messung zusammengehöriger Werte der Zeit t und der Entfernung r in Gl. (I).

(Die benutzte Meßanordnung ist aus Fig. 1 ersichtlich.)

E ist eine kleine Influenzmaschine, die unter Zwischenschaltung von zwei großen Widerständen R_1 und R_2, z. B. zwei Griffeln, mit dem Kondensator C verbunden ist. G ist

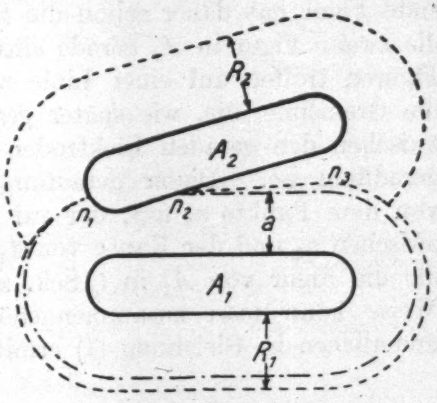
die primäre Funkenstrecke, A_1 und A_2 sind zwei Elektroden, deren Form und gegenseitige Lage aus Fig. 2 ersichtlich ist. A_1 und A_2 befinden sich auf der lichtempfindlichen Schicht



Schaltungsschema zur Messung zusammengehöriger Werte von t und r in Gleichung (I).

Fig. 1.

einer photographischen Platte P, die auf einer geerdeten Metallplatte ruht. Die primäre Funkenstrecke ist durch einen Draht $f\,i\,a$ an den Punkt a der Schleife $e\,d\,a\,b\,h\,c$, die A_1 und A_2 verbindet, angeschlossen; das Drahtstück $a\,b\,h\,c$ ist um L_0 Meter länger als das Stück $a\,d\,e$. Die eine Kondensatorplatte liegt direkt an der Erde, das Drahtsystem und die Elektroden A_1 und A_2 sind über den großen Widerstand R mit der Erde verbunden.



Form und gegenseitige Lage der Lichtenbergschen Elektroden A_1 und A_2 auf Fig. 1.

Fig. 2.

Will man eine Messung ausführen, so dreht man die Influenzmaschine langsam so lange, bis ein Funken in der Funkenstrecke G überspringt. Dann läuft im Drahte $f\,i\,a$ ein elektrischer Impuls oder eine elektrische Welle, die im Punkte a zum Teile reflektiert, zum Teile nach $a\,b$ und $a\,d$ durchgelassen wird. Die reflektierte Welle wandert durch den Draht $a\,i\,f$ zurück, die durchgelassene läuft teils im Draht $a\,b\,h\,c$, teils

im Drahte $a\,d\,e$ weiter. Wenn der *Wellenwiderstand* der drei im Punkte a zusammenstoßenden Drähte derselbe ist, so ist die Amplitude der reflektierten Welle $-\frac{1}{3}V_0$, die der durchgelassenen Welle $\frac{2}{3}V_0$, wenn mit V_0 die Amplitude der ursprünglichen Welle bezeichnet wird.

Die im Drahte $a\,d\,e$ wandernde Teilwelle erreicht die Elektrode A_1 um t_0 Sek. früher als die im Drahte $a\,b\,h\,c$ wandernde Teilwelle die Elektrode A_2 erreicht, wobei

$$\text{(a)} \qquad t_0 = \frac{L_0}{v} = \frac{L_0}{3 \cdot 10^8},$$

da $a\,b\,h\,c$ um L_0 Meter länger ist als $a\,d\,e$. Dabei wird angenommen, daß die Wellen mit der Lichtgeschwindigkeit v wandern. In Wirklichkeit wird die Geschwindigkeit etwas kleiner sein und t_0 infolgedessen zu klein werden, wenn man es aus Gleichung (a) berechnet; wenn sich aber keine anderen Leiter in der Nähe der Drähte befinden, so ist dieser Fehler verhältnismäßig unbedeutend.

Die Lichtenbergsche Figur der Elektrode A_1 wird also um t_0 Sek. früher einsetzen als die der Elektrode A_2 und die erste Figur hat daher schon die Strecke a durchlaufen, wenn die zweite Figur in A_2 gerade einsetzt (vgl. Fig. 2). Die zwei Figuren treffen auf einer Linie $n_2\,n_3$ zusammen; es ist dies die Grenzlinie, die, wie später gezeigt werden wird, in ihrem zwischen den geraden Elektroden liegenden Teile selbst auch geradlinig ist. Dieser geradlinige Teil der Grenzlinie geht von dem Punkte n_2 aus, der auf A_2 liegt und die Entfernung zwischen n_2 und der Kante von A_1 ist gleich der Entfernung a, die die Figur von A_1 in t_0 Sek. zurückgelegt hat. Auf diese Weise kann man zusammengehörige Werte der zwei Veränderlichen in Gleichung (I) ermitteln.

2. Impulse mit extrem steiler Stirn; Form und Lage der Grenzlinie.

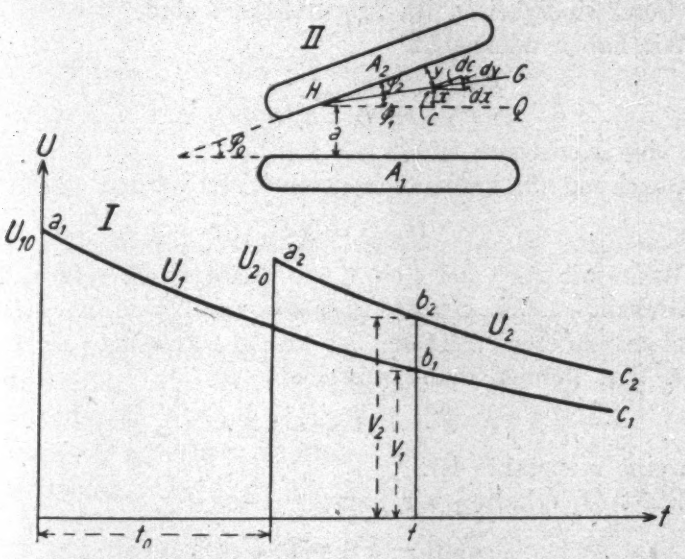
Wir wollen nun untersuchen, wie die Lage und Form der Grenzlinie von der Funktion U in der Gleichung (II) abhängt. Zur Vereinfachung nehmen wir vorläufig an, daß der in A_1 und A_2 auftreffende Wellenstoß eine außerordentlich steile Stirn habe. Wir können dann die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der von A_1 und A_2 ausgehenden Figuren durch die

Kurven $U_1(t)$ und $U_2(t)$ in Fig. 3 I darstellen. U_{10} und U_{20} sind die Anfangsgeschwindigkeiten ($t = 0$).

Im Entstehungsmoment der Figur von A_2 hat die äußerste Grenze der Figur von A_1 die Entfernung a von der Kante von A_1 erreicht. Es ist

$$a = \int_0^{t_0} U_1 \, dt. \tag{1}$$

Die Grenzlinie geht von dem Punkte H auf der Kante von A_2 aus, wo die Figur von A_1 gerade in dem Augenblicke auftrifft,



I. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten U_1 und U_2 von zwei Figuren, die von den Elektroden A_1 und A_2 ausgehen, wobei die Figur von A_1 um t_0-Sek. früher einsetzt als die von A_2.

II. Lage der zwei Elektroden A_1 und A_2 und des geradlinigen Teiles HG der Grenzlinie.

Fig. 3.

in dem die Figur in A_2 einsetzt (vgl. Fig. 3, II). Der Abstand des Punktes H von A_1 ist daher gleich a.

Es wird später gezeigt werden, daß der Teil HG der Grenzlinie, der zwischen den geradlinigen Kanten von A_1 und A_2 liegt, *für alle Werte des Zeitintervalles t_0 ebenfalls geradlinig ist.*

Wir wollen nun untersuchen, was für mathematische Folge-

rungen sich aus dieser Geradlinigkeit der Grenzlinie in bezug auf die Form der Geschwindigkeitskurven U ziehen lassen.

Es sei dc ein Element der geradlinigen Grenzkurve (vgl. Fig. 3, II), dann haben wir mit den Bezeichnungen der Figur:

$$dx = dc \sin \varphi_1 \quad \text{und} \quad dy = dc \sin \varphi_2.$$

Andererseits haben wir

$$dx = U_1 dt \quad \text{und} \quad dy = U_2 dt,$$

wo dt die Zeit bedeutet, die das Element dc der Grenzlinie zur Entstehung braucht und U_1, U_2 die Momentanwerte der zwei Geschwindigkeiten im Augenblicke t sind.

Wir haben demgemäß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \frac{U_2}{U_1} = k, \tag{2}$$

wo k eine Konstante ist.

Gleichung (2) kann auch geschrieben werden

$$U_2(t) = k\, U_1(t). \tag{3}$$

Wenn wir statt der Zeit t_0 die Zeit $t_0 + dt$ setzen, so ist die Grenzlinie auch gerade, aber die zugehörige Konstante k hat einen anderen Wert k', der von dt abhängt, nicht aber von t. Wir können daher schreiben

$$k' = k(1 + a\, dt),$$

wo a eine Konstante ist.

Statt (3) erhalten wir dann

$$U_2(t - dt) = k'\, U_1(t). \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\frac{dU_2}{U_2} = -a\, dt$$

oder

$$U_2(t) = U_2'\, e^{-at} = U_{20}\, e^{-a(t-t_0)} \tag{5_1}$$

und daher

$$U_1(t) = U_{10}\, e^{-at}. \tag{5_2}$$

Der Wert der Konstanten k ist

$$k = \frac{U_2'}{U_{10}}\, e^{at_0}. \tag{5'}$$

Wenn die Grenzlinie eine Gerade ist, so werden die Ausbreitungsgeschwindigkeiten durch die Gleichung (5_1) *und* (5_2) *dar-*

gestellt, wobei U_{10}, U_{20} und a Konstanten sind. Und umgekehrt wird das betrachtete Stück der Grenzlinie bei obigen Geschwindigkeitskurven immer eine Gerade sein.

Aus Gleichung (5_2) folgt, daß

$$r = F(t) = \int_0^t U_1 \, dt = \frac{1}{a} U_{10} (1 - e^{-at}) \tag{6}$$

und die Strecke

$$R = \frac{1}{a} U_{10} \tag{7}$$

oder

$$U_{10} = a R_1. \tag{7'}$$

Die Gleichungen (6) und (5) können daher geschrieben werden

$$r = F(t) = R_1 (1 - e^{-at}) \tag{8}$$

und

$$U_1 = a (R_1 - r) = U_{10} - a r. \tag{9}$$

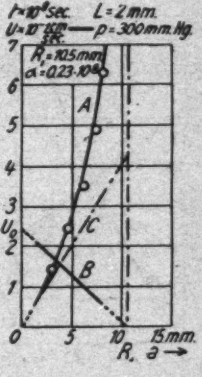
Die Geschwindigkeit nimmt linear mit der Entfernung von der Elektrodenkante ab.

Wir wollen nun weiter untersuchen, wie der Winkel φ_2 zwischen der Grenzlinie und der Elektrode A_2 von dem Verhältnis der Geschwindigkeiten und von dem Winkel $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$ zwischen A_1 und A_2 abhängt.

Es ist offenbar (vgl. Fig. 3, II)

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{U_{20}}{U_{10}} \frac{R_1}{R_1 - a} = c \frac{R_1}{R_1 - a}, \tag{10}$$

wo $c = \frac{U_{20}}{U_{10}}$ das Verhältnis der Geschwindigkeiten unmittelbar an den Elektrodenkanten und a die Strecke ist, die von der in A entstehenden Figur in t_0 Sek. durchlaufen wird.



Negative Figuren. $L = 2$ mm; Druck: $p = 300$ mm Hg; $R_1 = 10{,}5$ mm; $a = 0{,}23 \times 10^8$.

Fig. 4.

Wenn wir die Winkel φ_1 und φ_2 so klein annehmen, daß in Gleichung (10) ohne bemerkenswerten Fehler φ_1 und φ_2 statt $\sin \varphi_1$ und $\sin \varphi_2$ gesetzt werden kann, so reduziert sich die Gleichung auf

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \varphi_0 \frac{a - (1 - c) R_1}{(1 + c) R_1 - a}. \tag{10_1}$$

Der Winkel φ_2 ist dann gegeben durch

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2}(\varphi_0 + \Delta\varphi). \tag{11}$$

Wenn $U_{10} = U_{20}$ (d. h. $c = 1$), reduziert sich die Gleichung (10_1) auf

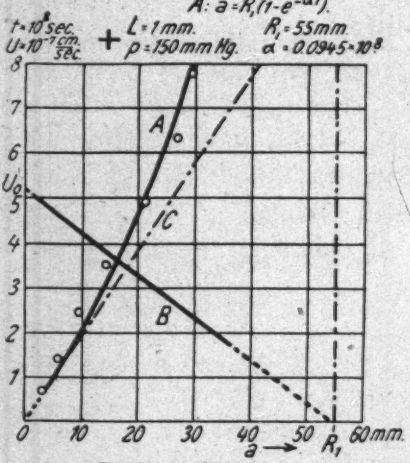
$$\Delta\varphi = \varphi_0 \frac{a}{2R_1 - a}. \tag{10_2}$$

Im folgenden sind die Gleichungen (11) und (10_1) oder (10_2) zur Berechnung der Winkel zwischen der Grenzlinie und A_2 benutzt worden.

3. Experimentelle Prüfung der im Abschnitt 2 abgeleiteten Formeln für die Geschwindigkeit nach der in Abschnitt 1 angegebenen Methode.

Die kleinen Kreise in den Figg. 4—6 repräsentieren zusammengehörige Werte von a und t_0, wie sie nach der in Abschnitt 1 beschriebenen Methode bestimmt worden sind, während die mit A bezeichneten Kurven die theoretischen Beziehungen zwischen a und t_0 nach Gleichung (8) darstellen, nämlich

$$a = R_1 (1 - e^{-a t_0}).$$



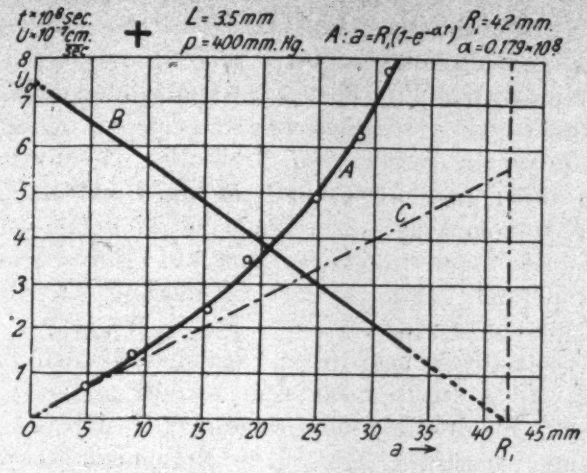
Positive Figuren.
$L = 1$ mm; $p = 150$ mm Hg;
$R_1 = 55$ mm; $a = 0{,}0445 \times 10^8$.

Fig. 5.

Der Wert von R_1 wurde direkt auf der photographischen Platte gemessen, während für a ein solcher Wert gewählt wurde, daß die experimentellen Punkte möglichst nahe an die Kurve A fallen.

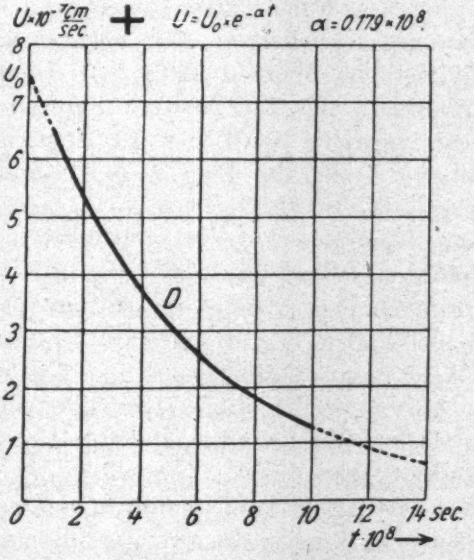
Im Hinblick darauf, daß nur eine willkürliche Konstante, nämlich a vorkommt, die man so wählen kann, daß die theoretischen und experimentellen Werte möglichst dicht zusammenfallen, ist unserer Meinung nach die Übereinstimmung der Ergebnisse nach den zwei Methoden eine sehr gute.

In den Figg. 4—6 stellt die Gerade B die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Figuren in verschiedenen Abständen von



Positive Figuren. $L = 3{,}5$ mm; $p = 400$ mm Hg; $R_1 = 42$ mm; $\alpha = 0{,}179 \times 10^8$.

Fig. 6.



Theoretische Geschwindigkeitskurve, die der Kurve *A* in Fig. 5 entspricht.

Fig. 7.

den Elektroden dar, entsprechend der Formel (9). Die Gleichung dieser Linien ist daher

(9′) $$U_1 = \alpha\,(R_1 - a) = U_{10} - \alpha\,a.$$

Die strichpunktierten Linien C sind die Tangenten der A-Kurven im Nullpunkte.

Die Kurve D in Fig. 7 ist die Geschwindigkeitskurve, die der Kurve A in Fig. 5 entspricht.

Die äußersten punktierten Teile der Geschwindigkeitskurven B in den Figg. 4—6 und D in Fig. 7 sind nur als theoretische Extrapolationen anzusehen. Es ist nicht wahrscheinlich, daß die Geschwindigkeit ganz auf Null heruntergeht, aber die dadurch verursachte Verkleinerung der Reichweite ist wohl nur eine geringe.

Außer den Versuchen, deren Ergebnisse in den Figg. 4—6 dargestellt sind, wurde noch eine Anzahl anderer Versuche gemacht zur Ermittelung der Abhängigkeit der Größe a von Funkenlänge, Gasdruck usw. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Figg. 8 und 9 für positive und negative Figuren dargestellt. In beiden scheint der Wert von a ziemlich unabhängig von der Funkenlänge zu sein; dagegen scheint er linear mit dem Gasdrucke zuzunehmen, und zwar bei positiven Figuren viel schneller als bei negativen. In beiden Fällen scheint sich der Wert a für $p = 0$ einem bestimmten Endwerte zu nähern, der für positive Figuren ungefähr bei $0{,}075 \times 10^8$, für negative bei $0{,}15 \times 10^8$ liegt.

In den oberen Teilen der Figg. 8 und 9 sind auch die zusammengehörigen Werte der Reichweite R und der Anfangsgeschwindigkeit U_0 gegeben.

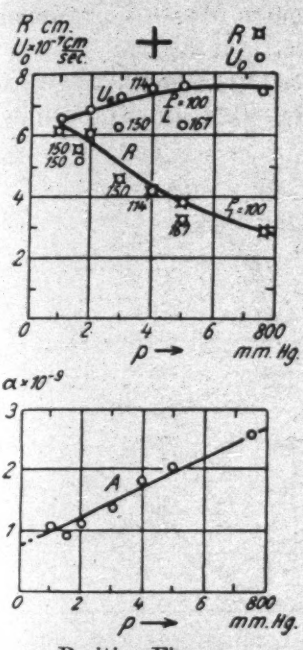
In den meisten Fällen war das Verhältnis zwischen Gasdruck und Funkenlänge (beides in Millimeter) gleich 100. Wo dies nicht der Fall war, gibt eine Zahl bei dem betreffenden Punkte den Wert dieses Verhältnisses an. Die mit R und U_0 bezeichneten Kurven stellen angenähert die Abhängigkeit des Abstandes und der Geschwindigkeit vom Gasdruck bei den genannten Verhältnissen dar.

Nach dem Gesagten kann kaum ein Zweifel bestehen, daß die in den Gleichungen (5), (8) und (9) gegebene Lösung des Problems im wesentlichen richtig ist.

Im folgenden wollen wir noch einige Fehlerquellen und die Möglichkeit ihrer Elimination behandeln, dann die allgemeine Form der Grenzlinie näher untersuchen und zum guten Schlusse experimentelle Beweise für die Geradlinigkeit des oft genannten Teiles dieser Linie bringen.

Nur noch eine Bemerkung, bevor wir diesen Abschnitt

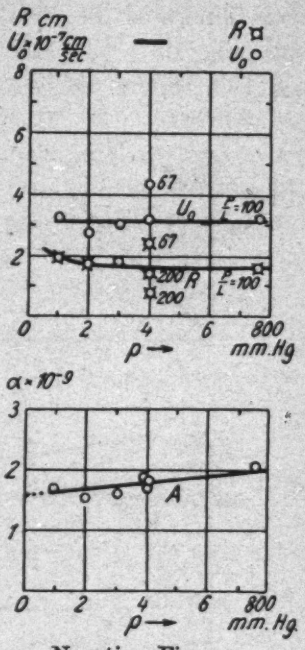
schließen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtenbergschen Figuren, die hier behandelt wird, ist durchaus nicht dieselbe Geschwindigkeit, mit der sich die „Gleitfunken" ausbreiten, die M. Toepler[1]) untersucht hat. An anderer Stelle



Positive Figuren.

Die Werte des Koeffizienten α, des Abstandes R und der Anfangsgeschwindigkeit U_0 abhängig vom Drucke p und der Funkenlänge L.

Fig. 8.



Negative Figuren.

Fig. 9.

wird gezeigt werden, daß die beiden Erscheinungen, Lichtenbergsche Figuren und Gleitfunken, stark voneinander abweichen. Toepler fand mit Hilfe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Schallwellen, daß die Geschwindigkeit eines Gleitfunkens fast während der ganzen Dauer des Funkens praktisch konstant ist, und es ist wohl kaum ein Grund vorhanden, die Richtigkeit dieses Ergebnisses anzuzweifeln.

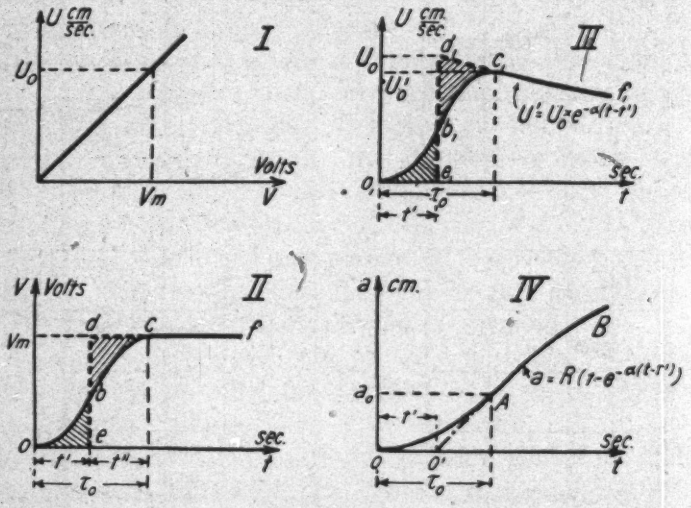
4. Der Einfluß einer flachen Wellenfront auf die Form der Grenzlinie.

Bis jetzt hatten wir angenommen, daß die Wellenfront eine extrem steile sei, in welchem Falle die Anfangsgeschwindig-

1) Toepler, Ann. d. Phys. 21. S. 193—222. 1906.

keit an den Elektrodenkanten auch die Maximalgeschwindigkeit ist. Im allgemeinen wird aber die Wellenfront mehr oder weniger flach sein, nur allmählich von Null bis zur maximalen Amplitude ansteigen. Die Geschwindigkeit wird dann auch allmählich bis zu ihrem maximalen Werte U_0' zunehmen (vgl. Fig. 10, III).

Die Dauer der flachen Stirn ist in Fig. 10, II—IV mit τ_0 bezeichnet. Es wird angenommen, daß die Amplitude des



Die Gerade im I. Bilde zeigt die lineare Beziehung zwischen der Geschwindigkeit an der Elektrodenkante und ihrer Spannung.
Die Linie $o\ b\ c\ f$ im II. Bilde stellt eine Wellenfront dar, die Kurve $o_1\ b_1\ c_1\ f_1$ im III. Bilde die entsprechenden Geschwindigkeiten.
Die Kurve $O\ A\ B$ im IV. Bilde gibt den Abstand, den die äußere Grenze der Figur zur Zeit t erreicht hat.

Fig. 10.

Impulses für alle Werte von t, die größer sind als τ_0 (vgl. Fig. 10, II) konstant sei und daß die Geschwindigkeit exponentiell mit t abnehme. Wir verlängern nun diese exponentielle Geschwindigkeitskurve rückwärts bis zu dem Punkte d_1, der so gewählt ist, daß die zwei schraffierten Flächen $o_1\ e_1\ b_1$ und $b_1\ d_1\ c_1$ gleich sind. Die zum Punkte d gehörige Geschwindigkeit ist mit U_0 bezeichnet und die Kurve $d_1\ c_1\ f_1$ sei die äquivalente Geschwindigkeitskurve genannt; ihre Gleichung heißt

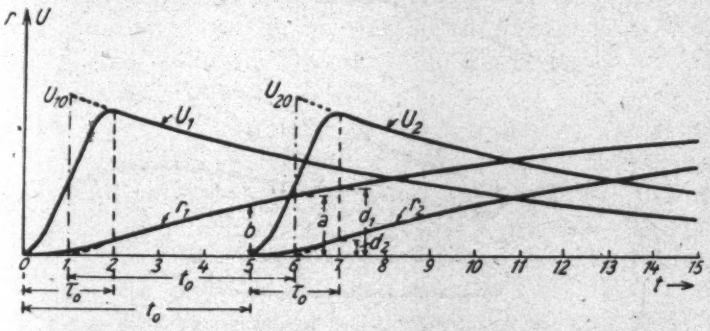
(b) $$U' = U_0\, e^{-a(t-t')} \quad (U' = 0 \text{ wenn } t < t').$$

Die Entfernung a, die die äußere Grenze zur Zeit t erreicht hat, ist gegeben durch

$$a = \int_0^{t_0} U \, dt \tag{c}$$

und für alle Werte von t_0, die größer sind als τ_0, können wir in dieser Formel statt der wirklichen Geschwindigkeit U die äquivalente Geschwindigkeit U' setzen.

In Fig. 11 sind zwei identische Geschwindigkeitskurven U_1 und U_2 mit einem Zeitunterschied von t_0 Sek. dargestellt, sowie die entsprechenden Strecken r_1 und r_2, die die Figuren von A_1 und A_2 aus zurückgelegt haben.

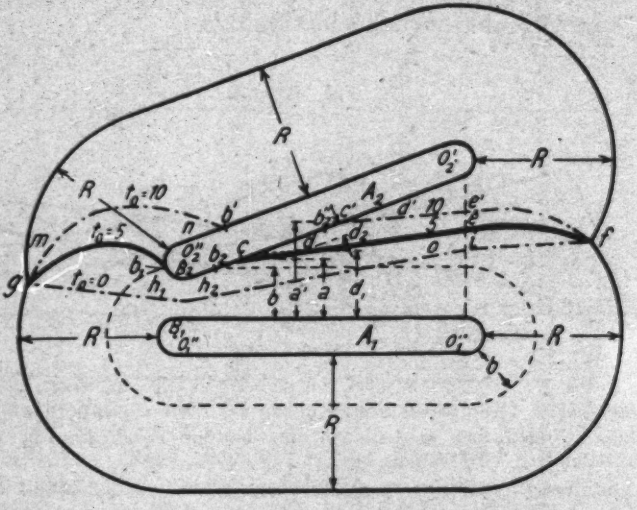


Zwei identische Geschwindigkeitskurven U_1 und U_2 mit einem Zeitunterschiede von t_0 Sek. und die entsprechenden Wegkurven r_1 und r_2.

Fig. 11.

Es wird sogleich gezeigt werden, daß das, was auf der photographischen Platte gemessen wird, der Zeitunterschied zwischen zwei steilen Wellenstirnen der Äquivalentgeschwindigkeitskurve ist. Gesucht ist aber in Wirklichkeit der Zeitunterschied zwischen den Wellenstirnen zweier zusammengehöriger elektrischer Impulse. Wenn die Impulse ihrer Form nach identisch sind, ist der Zeitunterschied zwischen den Impulsen genau so groß wie der Zeitunterschied zwischen den zwei steilen Fronten bei den äquivalenten Geschwindigkeitskurven. Wenn die zwei Impulse aber verschieden geformte Stirnen haben, so kann man ein wenig in Zweifel sein, wie der Zeitunterschied zwischen ihnen zu definieren ist. Die natürlichste Definition ist in diesem Falle wohl die folgende. Die Front des Spannungsimpulses $o\,b\,c\,f$ (vgl. Fig. 10, II)

wird in die „äquivalente" Spannungskurve mit senkrechter Stirn $e\,b\,d\,c\,f$ umgewandelt, wobei die Lage der senkrechten Stirn $e\,d$ so gewählt wird, daß die zwei Flächen $O\,e\,b$ und $b\,d\,c$ gleich sind. Der Zeitunterschied zwischen den zwei Spannungsimpulsen wird dann als der Unterschied zwischen den senkrechten Stirnen der zwei äquivalenten Spannungsimpulse angenommen. Wenn, wie in Fig. 10, I angenommen ist, die Geschwindigkeit U proportional zur Spannung V ist, so ist der Zeitunterschied zwischen den senkrechten Stirnen der äquivalenten Geschwindigkeitskurven sehr nahe gleich dem Zeit-



Zwei Grenzlinien, die den flachen Wellenstirnen von Fig. 11 entsprechen. Bei der stark ausgezogenen Linie ist $t = 5$, bei der strichpunktierten ist $t = 10$. Die Reichweite R ist dieselbe bei beiden Figuren.

Fig. 12.

unterschiede zwischen den senkrechten Stirnen der äquivalenten Spannungsimpulse. Selbst in den Fällen, wo die Proportionalität zwischen U und V nicht besteht, sind die zwei Zeitunterschiede sehr nahe gleich. Wir können daher ohne bemerkenswerten Fehler als Zeitunterschied zwischen zwei Spannungsimpulsen den Zeitunterschied zwischen den senkrechten Stirnen der äquivalenten Geschwindigkeitskurven nehmen und dieser ist, wie gleich gezeigt werden soll, durch das auf der photographischen Platte gemessene t_0 gegeben. In allen Fällen, wo die

Wellenstirnen der zwei Impulse gleiche Form haben, ist der Fehler Null.

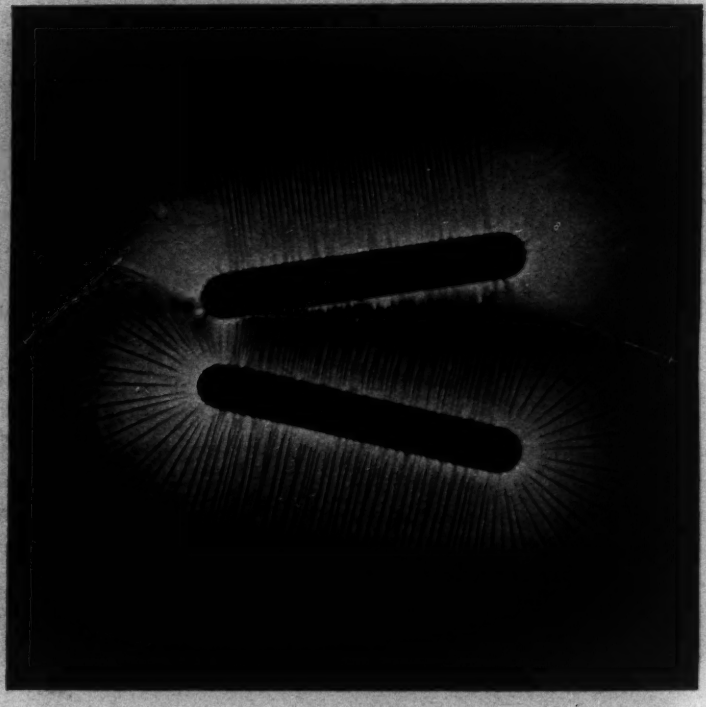
Um den Einfluß der flachen Wellenstirnen zu erläutern, ist in Fig. 12 die Grenzlinie abgebildet, die aus den zwei Geschwindigkeitsfiguren der Fig. 11 mit einem Zeitunterschiede $t_0 = 5$ hervorgehen würde. Bei senkrechter Wellenstirn würde sich der geradlinige Teil der Kurve bis zum Punkte c auf der Kante von A_2 fortsetzen. Die Abflachung der Wellenstirnen verursacht ein Abbiegen des Teiles $d\,c$ der Grenzlinie bis $d\,b_2$. Die Entfernung des Punktes b_2 von der A_1-Kante ist gleich der Entfernung b, die die Figur von A_1 im Entstehungsmomente der Figur von A_2 schon zurückgelegt hat (vgl. Fig. 11). Die Grenzlinie folgt der A_2-Kante von b_2 bis zum Punkte b_1, wo die Entfernung von A_1 wieder gleich b ist. Von diesem letzteren Punkte geht die Grenzlinie in einem Bogen bis zum Punkte g.

Es ist sehr leicht, mit Hilfe der r_1- und r_2-Kurven der Fig. 11 in Fig. 12 die Grenzlinie zu ziehen; entsprechende Entfernungen sind in den beiden Figuren auf gleiche Weise bezeichnet. Zwischen den Punkten d und e ist die Grenzlinie nach Abschnitt 2 eine gerade Linie und wenn diese über d hinaus verlängert wird, so schneidet sie die Kante von A_2 im Punkte c. Aus Fig. 11 ist leicht ersichtlich, daß die Entfernung a dieses Punktes c von der A_1-Kante gleich ist der Entfernung, die die Figur von A_1 im Entstehungsmomente der Figur in A_2 durchlaufen hätte, wenn die Geschwindigkeitskurve die äquivalente mit senkrechter Stirn wäre. Die Entfernung a ist daher gleich der Entfernung, die eine Figur in der Zeit t_0 durchläuft, wenn sie sich gemäß der äquivalenten Geschwindigkeitskurve ausbreitet. Diese Entfernungen a sind es, die in den Figg. 4—6 mit den entsprechenden Werten von t_0 benutzt worden sind.

5. Die allgemeine Form der Grenzlinie. Experimenteller Beweis für ihre stellenweise Geradlinigkeit.

In Fig. 12 sind außer den schon erwähnten Grenzlinien noch zwei andere strichpunktiert eingezeichnet, die auf den Geschwindigkeitskurven der Fig. 11 beruhen, und den Werten $t_0 = 0$ und $t_0 = 10$ entsprechen. Alle diese Grenzlinien haben ihre gemeinsamen Endpunkte in g und f. Für $t_0 = 0$ sind die

äußeren Teile der Grenzlinie $g h_1$ und $i f$ geradlinig und schneiden die Mittelpunkte der zwei Verbindungslinien $o_1' o_2'$ und $o_1'' o_2''$ senkrecht. Der Teil $h_2 i$ dieser Grenzlinie ist ebenfalls eine Gerade und zwar die Halbierungslinie des Winkels zwischen den Kanten von A_1 und A_2. Für $t_0 = 10$ ist $c' d'$ der geradlinige Teil der Grenzlinie, während a' die Entfernung ist, die der Rand der Figur von A_1 in der Zeit $t_0 = 10$ zurücklegt.



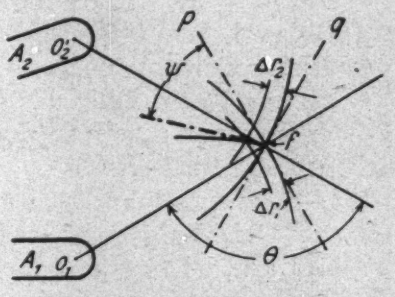
Negative Geschwindigkeitsfiguren.
Die gestrichelte Linie stellt die theoretische Grenzlinie dar.

Fig. 13.

Um die theoretische und die experimentell gefundene Grenzlinie miteinander vergleichen zu können, sind in den Figg. 13, 16—18 zwei positive und zwei ngeative Geschwindigkeitskurven abgebildet, bei denen die theoretische Grenzlinie gestrichelt eingezeichnet ist. Die Übereinstimmung zwischen der wirklichen und der theoretischen Grenzlinie soll weiter unten diskutiert werden. Es muß jedoch bemerkt werden,

daß bei Linien, wie sie Fig. 12 für $t_0 = 10$ zeigt, die Figur von A_1 den Bereich in der Nähe von n nicht erreichen kann und die Figur von A_2 nicht weit genug umbiegen kann, um den Bereich bei m zu decken. Der Bereich n wird daher von der A_2-Figur, der Bereich m von der A_1-Figur überdeckt, wie es auch aus den Figg. 13, 16 bis 18 ersichtlich ist.

Bei negativen Figuren ist es nicht möglich eine Grenzlinie wie die in Fig. 12 für $t_0 = 10$ eingezeichnete zu erhalten, ohne daß ein Funken zwischen A_1 und A_2 in den Punkten B_1 und B_2 überspringt. Der Funken kann so früh auftreten, daß die Lage der Grenzlinie dadurch geändert wird. Bei Geschwindigkeits- oder Zeitmessungen mit negativen Figuren müssen daher die Elektroden A_1 und A_2 immer so weit voneinander angebracht werden, daß der Punkt, wo die Grenzlinie die Kante von A_2 trifft, nahe beim Punkt B_2 liegt. Bei positiven Figuren, wo die Neigung zur Funkenbildung viel geringer ist, kommt es auf die Lage von A_1 und A_2 nicht so sehr an.[1])



Richtung der Tangente der Grenzlinie im Endpunkte f.

Fig. 14.

Über die zwei Endpunkte f und g der Grenzlinie (vgl. Fig. 12) muß noch ein Wort gesagt werden. Falls das Verhältnis der Momentangeschwindigkeiten der zwei Figuren bekannt ist, so kann man leicht die Richtung der Grenzlinie in diesen Punkten bestimmen. In Fig. 14 ist die Linie fp senkrecht zu fo_1'. Zur Zeit t hat die Figur von A_1 die Entfernung $R - \Delta r_1$ und die Figur von A_2 die Entfernung $R - \Delta r_2$ zurückgelegt, wo R die Reichweite ist. Das Verhältnis $\Delta r_2 / \Delta r_1$ muß nach den Gleichungen (3) und (5) gleich sein dem konstanten Verhältnisse k der Geschwindigkeiten. Es kann leicht gezeigt werden, daß der Winkel zwischen der Tangente der Grenzlinie in f und der Linie fp gegeben ist durch

---

1) Dieser Unterschied zwischen positiven und negativen Figuren soll an anderem Orte behandelt werden.

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\Theta}{k + \cos\Theta},$$

wo Θ der Winkel zwischen den Linien $f o'_1$ und $o_2' f$ ist.

Wenn die Winkel ψ und Θ bekannt sind, so ist das Verhältnis k gegeben durch

$$\text{(13)} \qquad k = \frac{\sin\Theta}{\operatorname{tg}\psi} - \cos\Theta.$$

Aus Gleichung (12) folgt, daß für

$k =$	∞	1	0
$\psi =$	0	$\frac{1}{2}\Theta$	Θ

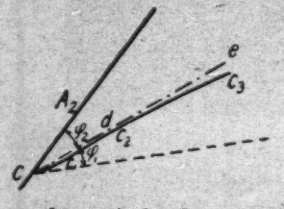
Die Richtigkeit dieser Werte ist klar.

Aus Gleichung (8) folgt, daß

$$\text{(14)} \qquad k = e^{a t_0} = \frac{R}{R - a},$$

d. h. der Wert des Verhältnisses k hängt nur von den Werten von R und a ab.

Bisher haben wir angenommen, daß die Reichweiten R_1 und R_2 der Figuren von A_1 und A_2 gleich sind. Im allgemeinen ist das nicht der Fall, da R_2 bei positiven Figuren etwas kleiner und bei negativen Figuren bedeutend größer ist als R_1. Weitere Einzelheiten über diese Frage findet man L. F. I. S. 32—33 und es braucht hier nicht näher darauf eingegangen zu werden. Es genügt zu bemerken, daß die Lage des Punktes c in Fig. 12 und daher die gemessenen Werte von a nur von der Geschwindigkeit (und dem Abstande) der Figur von A_1 abhängt. Wenn aber $R_1 \lessgtr R_2$, so verändern die Punkte f und g ihre Lage und die Gleichungen (12) und (13) gelten nicht mehr.



$c\,e$ theoretische Grenzlinie, $c\,c_1\,c_2\,c_3$ wirkliche Grenzlinie deformiert durch das elektr. Feld der Ladung von A_2 und seiner Figur.

Fig. 15.

Selbst wenn $R_1 = R_2$, werden die von den Figuren selbst ausgehenden elektrischen Felder bis zu einem gewissen Grade die theoretische Form der Grenzlinien verändern. Diese Deformation ist aber in den meisten Fällen nur klein. Wir wollen diese Einflüsse kurz untersuchen und nehmen der Einfachheit halber an, daß die Wellenfront senkrecht sei. Die Figur von A_1 (vgl. Fig. 15) erreicht in dem Augenblicke die Linie $c\,p$, in

dem der Impuls A_2 erreicht. Wenn dann das Verhältnis der Geschwindigkeiten der zwei Figuren konstant ist, so ist die Grenzlinie eine Gerade $c\,e$ durch den Punkt c. Das elektrische Feld der Ladung von A_2 und der von A_2 ausgehenden Figur verursacht jedoch eine geringe Deformation dieser Linie. Die Hauptwirkung dieses Feldes ist die Verzögerung der Ausbreitung der Figur von A_1, besonders zwischen den Punkten c und d. Eine andere, aber gewöhnlich sehr kleine Wirkung ist die Verzögerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der

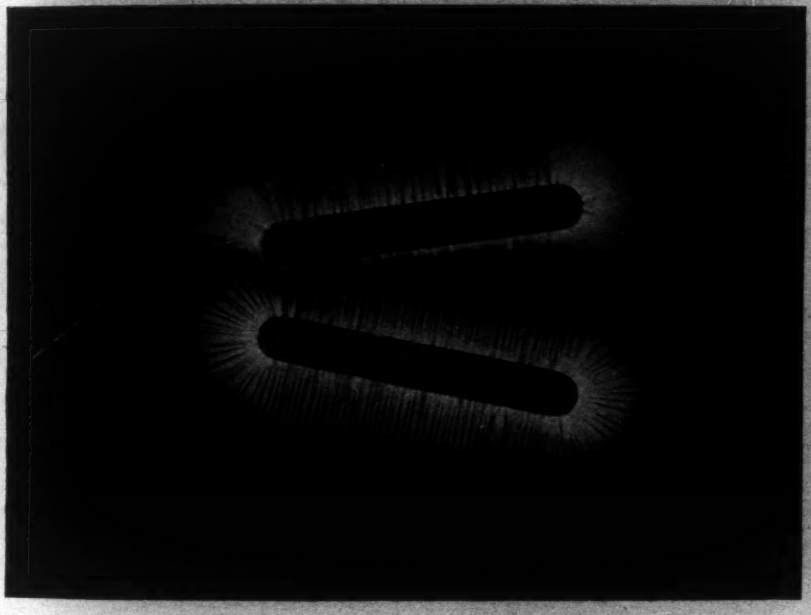


Fig. 16.

Figur von A_1 zwischen den Punkten d und e, die sich in einem Herunterbiegen der Grenzlinie bemerkbar macht, wie es in der Kurve $c_2\,c_3$ zu sehen ist. Diese Wirkung ist nur dann merklich, wenn die Entfernung des Punktes e von A_1 sehr nahe gleich der Reichweite der Figur von A_1 ist. In diesem Falle ist die elektrische Dichte über der Grenzlinie viel größer als unter ihr, deshalb wird die Figur von A_1 verzögert.

Die Deformation bei c_1 erscheint hauptsächlich bei positiven Figuren. Das hängt zweifellos wenigstens zum Teil damit zusammen, daß positive Figuren sich erst dann auszubreiten

beginnen, wenn die Spannung einen bestimmten Wert erreicht hat, der von den Versuchsbedingungen abhängt, vgl. L. F. I. S. 51 und 54 und die Bemerkung auf S. 229 der vorliegenden Arbeit.

Im allgemeinen sind die oben erwähnten Deformationen der geraden Grenzlinien nur sehr klein und der Punkt c kann daher mit beträchtlicher Genauigkeit bestimmt werden. Eine große Hilfe dabei ist, daß der Winkel φ_2, den die theoretische

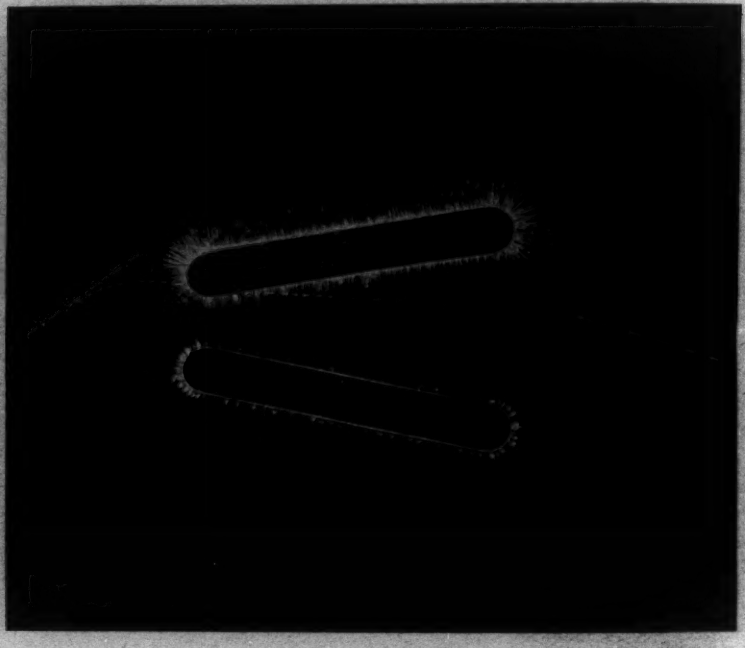


Fig. 17.

gerade Grenzlinie mit A_2 bildet, aus der Gleichung (10) berechnet werden kann.

Wie groß die Übereinstimmung zwischen der theoretischen und wirklichen Grenzlinie ist, geht aus einer Prüfung der negativen Geschwindigkeitsfiguren in Fig. 16 und der positven in Figg. 17 und 18 hervor. Außerdem sind in Tafel II und III Vergrößerungen des geraden Teiles einiger Grenzlinien gegeben und zwar Tafel II, *I—IV* und Tafel III, *I—II* für positive Figuren, Tafel III, *III—IV* für negative Figuren. Eine nähere Betrachtung zeigt, wie genau geradlinig diese Teile der Grenz-

linie sind. Das Abbiegen in der Nähe von A_2, das man bei *II* und *IV* auf Tafel II bemerkt, hat seine Ursache in einer flachen Wellenstirn (vgl. Fig. 12) und in dem elektrischen Felde von A_2 (vgl. Fig. 15). Der abgebogene Teil *ab* auf Tafel III, *II* wird durch das Ende von A_1 veranlaßt.

Die Prüfung der Figuren auf Tafel II u. III zeigt, daß der geradlinige Teil der Grenzlinie mit Hilfe einer Lupe sehr sicher

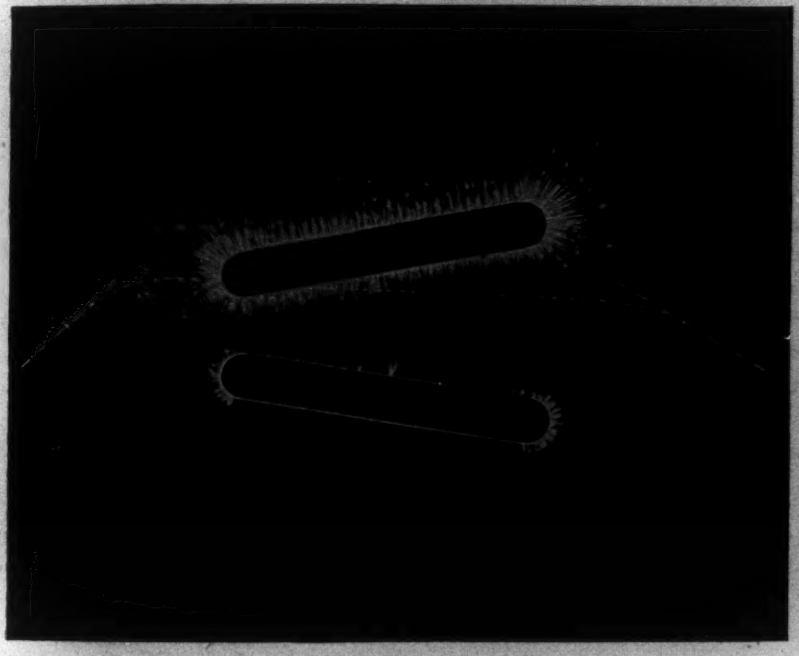


Fig. 18.

eingezeichnet werden kann. Wenn die negativen Geschwindigkeitsfiguren in Figg. 13 und 16 den Eindruck machen, als ob die Lage der Grenzlinie doch recht unsicher sei, so beruht das nur darauf, daß einige Einzelheiten, die zur genauen Festlegung der Linie benutzt werden und auf den Originalplatten sowie auf Tafel III, *III* und *IV* deutlich sichtbar sind, in den Kopien verloren gegangen sind.

Eine weitere Kontrolle für die Richtigkeit unserer Resultate liefert ein Vergleich des Winkels φ_2 zwischen der Elektrode A_2 und dem geraden Teile der Grenzlinie, wie er auf

der Platte gemessen wird und wie er mit Hilfe der Gleichung (10_2) und (11) berechnet wird. Eine lange Reihe von Messungen hat gezeigt, daß die beobachteten und berechneten Werte von φ_2 genügend genau übereinstimmen, da die Unterschiede innerhalb der Fehlergrenze liegen. Als Beispiel sind in Tab. 1 drei Serien solcher Messungen wiedergegeben.

Tabelle 1.

Positive Geschwindigkeitskurven.

Platte	R	a	φ_0	$\Delta\varphi$	φ_2 ber.	φ_2 beob.	φ_2 ber. - φ_2 beob.
M. 324	30 mm	8,6 mm	22°	3,7°	12,8°	12,5°	+ 0,3°
M. 320	31 „	10,9 „	21°	4,5°	12,5°	12 6°	− 0,1°
M. 327	34 „	13,0 „	19°	4,5°	11,8°	12,2°	− 0,4°

Die zwei negativen Geschwindigkeitsfiguren Figg. 13 und 16 und eine dritte hier nicht abgebildete scheinen eine Ausnahme zu bilden. Die Zahlenwerte für diese Figuren sind in Tab. 2 zusammengestellt, woraus hervorgeht, daß die berechneten Werte entschieden größer sind als die beobachteten; die Unterschiede liegen außerhalb der Fehlergrenze. Der Grund für diesen Widerspruch liegt in folgendem.

Tabelle 2.

Negative Geschwindigkeitsfiguren.

Platte	R	a	φ_0	$\Delta\varphi$	φ_2 ber.	φ_2 beob.	φ_2 ber. - φ_2 beob.
M. 319	32 mm	9,0 mm	21,2°	3,5°	12,3°	10,0°	+ 2,3°
M. 320	25 „	9,5 „	19,2°	4,4°	11,8°	10,2°	+ 1,6°
M. 321	32 „	12,0 „	20,0°	4,6°	12,3°	10,6°	+ 1,7°

Wie früher bemerkt, ist die Reichweite R_2 — bei verhältnismäßig großen Werten von t_0 — bedeutend größer als R_1. Um die Richtigkeit der Gleichungen (12) bis (14) für negative Figuren zu untersuchen, war es nötig, die Anordnungen so zu treffen, daß die zwei Reichweiten gleich wurden. Um dies zu erreichen, wurde ein Nebenschluß zwischen den Punkt c (vgl. Fig. 1) und Erde gelegt und dessen Widerstand so abgeglichen, daß $R_1 = R_2$. Dieser Nebenschluß bewirkt aber außerdem,

daß die Spannung bei A_2 etwas kleiner wird als bei A_1, und infolgedessen muß das beobachtete φ_2 kleiner sein als das aus Gleichungen (10_2) und (11) berechnete.

In den Figg. 13 und 16—18 wurde die Richtung der Tangenten an die Grenzlinie in den Punkten f und g mit Hilfe der Gleichungen (12) bis (14) berechnet. Für den Punkt f stimmt die berechnete Richtung der Tangente genügend genau mit der wirklichen Richtung der Grenzlinie in diesem Punkte überein. Für den Punkt g ist eine Übereinstimmung nicht vorhanden; der Grund dafür wurde schon früher genannt und braucht nicht weiter erörtert zu werden. Aber es ist vielleicht nicht überflüssig zu erwähnen, daß die Linien der negativen Figuren von der Elektrode A_1 geradlinig und in der Nachbarschaft des Punktes g rechtwinklig zur theoretischen Grenzlinie sind und daß sie beim Überqueren dieser Linie ziemlich plötzlich abbiegen, vgl. besonders Fig. 13.

Die Versuche haben somit alle Folgerungen bestätigt, die aus den Gleichungen (5_2), (8) und (9) gezogen worden sind.

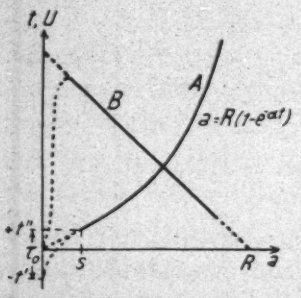
6. Messung von sehr kleinen Zeitintervallen. Schlußbemerkungen.

Wir sind nun in der Lage die Ausbreitung der Lichtenbergschen Figuren zur Bestimmung des kleinen Zeitraumes t_0 zu benutzen, der zwischen dem Augenblicke liegt, wo ein elektrischer Impuls die Elektrode A_1 erreicht und demjenigen, wo ein zweiter Impuls A_2 erreicht. Es ist dazu nichts weiter nötig, als die entsprechende A-Kurve mit a als Abszissen und t_0 als Ordinaten aufzutragen, wo a die Entfernung des Punktes c von der Kante der Elektrode A_1 ist und c der Punkt, wo der gerade Teil der Grenzlinie die Kante von A_2 trifft, vgl. Figg. 3 bis 6 und 12.

Es hat praktisch keine Schwierigkeiten, die Lage des geraden Stückes der Grenzlinie mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Am besten geschieht es auf folgende Weise. Man zieht versuchsweise eine Linie und mißt den entsprechenden Wert von a. Mit diesem Wert von a und dem gemessenen Werte von R_1 wird der Winkel φ_2 aus den Gleichungen (10_2) und (11) berechnet. Nun zieht man eine neue Gerade, die den gefundenen Winkel mit A_2 bildet und möglichst nahe mit der wirklichen Grenzlinie zusammenfällt. Dabei ist eine Lupe von

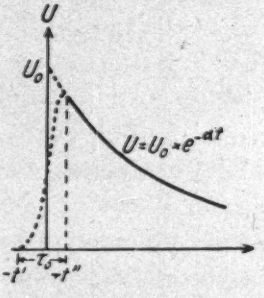
großem Nutzen. Wenn der neue, der letzten Grenzlinie entsprechende Wert von a nicht sehr erheblich von dem ersten abweicht, so wird er als der richtige angenommen; wo nicht, muß das Verfahren wiederholt werden. Bei einiger Übung wird eine Wiederholung im allgemeinen nicht nötig sein. Mit dem so gefundenen Werte von a entnehmen wir aus der A-Kurve den entsprechenden Wert von t_0.

Dies ist jedoch nur für den stark ausgezogenen Teil der A-Kurve in den Figg. 4—6 richtig. Bei sehr kleinen Werten von a und bei solchen, die sich der Reichweite R annähern, wird die Methode ungenau. Was den ersten Teil anbetrifft, so kann keinerlei Zweifel bestehen, daß die Wellenfront nicht vertikal ist und die A- (und B-)Kurven müssen daher notwendig eine andere Form haben als die der Gleichungen (8)



Wahrscheinliche Form der A- und B-Kurven für flache Wellenfronten und für sehr kleine Werte von a.

Fig. 19.



Wahrscheinliche Form der Geschwindigkeitskurven für flache Wellenstirnen.

Fig. 20.

und (9) entsprechende. Der erste Teil der A- und B-Kurven wird in Wirklichkeit eine ähnliche Form haben wie sie in Fig. 19 punktiert angegeben ist. Die A-Kurve beginnt in einem Punkte t' auf der t-Achse, die B-Kurve im Nullpunkte. Die Geschwindigkeitskurve wird ebenfalls, wie Fig. 20 zeigt, im Punkte t' auf der t-Achse beginnen. Die Dauer der flachen Front ist in beiden Figuren mit τ_0 bezeichnet, die Bedeutung von t' und t'' ist dieselbe wie in Fig. 10.

In den Figg. 4—7 ist der Wert von t_0 von der Ankunft der senkrechten Front der äquivalenten Welle an gerechnet und wie früher gezeigt worden ist, haben die von der flachen Welle herrührende Unregelmäßigkeiten keinen Einfluß auf

die Form und Lage der A-Kurve für alle Werte von a, die größer sind als s (vgl. Fig. 19) und sie haben auch keinerlei Einfluß auf die Bestimmung des Zeitraumes t_0 zwischen 2 Impulsen, wenn $t_0 > t''$.

Die Dauer $\tau_0 = t' + t''$ der flachen Wellenstirn ist sicher sehr kurz. Zur Bestimmung von Zeiträumen *unter* 5×10^{-9} sec wäre es gut, die genaue Form der Wellenform zu kennen. Es sind einige Vorversuche zu diesem Zwecke angestellt worden, aber das Problem ist ziemlich schwierig und vorläufig kann noch keine definitive Mitteilung gemacht werden.

Betrachtet man die Figg. 4—6 und 8—9 genauer, so findet man, daß die hier entwickelte Methode am besten zur Messung von Zeiträumen zwischen $0{,}5 \times 10^{-8}$ und 10×10^{-8} sec geeignet ist. Zweifellos kann aber der Nutzbereich nach unten bis zu 1×10^{-9} und darunter, nach oben bis ungefähr 2×10^{-7} Sek. ausgedehnt werden.

Was den zweiten ungenauen Punkt betrifft, wenn der Wert von a sich dem Reichwert R nähert, so ist es von selbst klar, daß so große Werte von a nicht zu einer genauen Messung von t benutzt werden können.

Eine Frage bleibt noch zu erwähnen. Entstehen die Figuren sofort, wenn die Spannung die Elektrode erreicht oder gibt es eine Verzögerung? Für die Messung von t_0 ist diese Frage nicht von Bedeutung — vgl. Abschnitt 5 — und es soll daher hier nicht auf Einzelheiten eingegangen werden, doch soll dieses Problem, das enge mit der Frage der Entstehung elektrischer Funken zusammenhängt, an anderem Orte behandelt werden. Nur ein paar Worte müssen gesagt werden auf Grund einiger Bemerkungen von K. Pzribram.[1]) Es kann gar kein Zweifel sein, daß die positiven Figuren erst dann entstehen, wenn die Spannung einen bestimmten Wert erreicht hat, der vom Gasdrucke und verschiedenen anderen Umständen abhängt. Darauf ist schon früher in L. F. I., S. 52 und 54 hingewiesen worden. Auf S. 60 derselben Arbeit, wo es heißt: „Wenn angenommen wird, daß die 2 Figuren gleichzeitig entstehen, so ist das Verhältnis der Abstände von den Elektroden zu der ‚neutralen Entladung' gleich dem Verhältnisse ihrer Geschwindigkeiten", haben wir es deshalb nicht

1) Phys. Zeitschr. **21**. S. 480—484. 1920; Wien. Ber. Math. Naturw. Kl. IIa, **129**. S. 151—160. 1920.

erwähnt, weil damals unser Hauptzweck der war, zu zeigen, daß die Geschwindigkeiten der positiven Figuren größer ist als die der negativen. Eine etwaige Verzögerung der positiven Figuren hätte an unserer Beweisführung nichts geändert und es schien uns daher nicht nötig, weiter auf diesen Punkt einzugehen.

Die interessanten Untersuchungen von Pzribram scheinen zu beweisen, daß die Verzögerung beim Entstehen der positiven Figuren größer ist als durch die Existenz der oben erwähnten kleinsten Spannungen erklärt werden kann. Andere Beobachtungen deuten in derselben Richtung. Wir glauben jedoch nicht, daß diese Frage, die nach verschiedenen Seiten von bedeutendem Interesse ist, damit schon endgültig abgeschlossen sei.

Zusammenfassung.

Es wurde gezeigt, daß die drei Gleichungen (I) bis (III) auf S. 206 die folgende Form haben:

(I) $$r = R(1 - e^{-at}),$$

(II') $$U = aRe^{-at} = U_0 e^{-at}$$

und

(III') $$t = \frac{1}{a} \log \text{nat} \frac{R}{R - a} .$$

Einige Werte der Konstanten sind in den Figg. 8 und 9 gegeben.

Der Verf. möchte den Herren I. P. Christensen und A. G. Jensen seinen Dank für ihre wertvolle Hilfe bei dieser Untersuchung aussprechen.

Auch sei die Unterstützung dankend anerkannt, die der Carlsberg Fund dieser Untersuchung angedeihen ließ.

Kopenhagen, Königl. techn. Hochschule.
Laboratorium für Telegraphie und Telephonie.

(Eingegangen 1. Mai 1922.)

4. *Über die Temperaturabhängigkeit der Dispersion der magnetischen Doppelbrechung;* von *G. Szivessy.*

§ 1. *Theoretisches zur Temperaturabhängigkeit der Dispersion der magnetischen Doppelbrechung.* Das magnetische Analogon zum elektrooptischen Kerreffekt ist der Cotton-Moutoneffekt, der bei reinen Flüssigkeiten beobachtet wurde und dessen Gesetzmäßigkeit ihren Ausdruck in der Beziehung

$$\Psi = C\,l\,H^2 \tag{1}$$

findet.[1]) Hierbei bedeutet Ψ die relative Verzögerung zwischen außerordentlicher und ordentlicher Welle, l die Länge der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht und H die Intensität der äußeren magnetischen Feldstärke; C ist die Cotton-Moutonsche Konstante, die von der Natur der Flüssigkeit, ihrer Temperatur und der Wellenlänge der Strahlung abhängt.

Stellt man sich auf den Boden der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie[2]), nach welcher die Moleküle der isotropen Flüssigkeit anisotrop und regellos verteilt sind, im magnetischen Felde aber ein Moment und dadurch eine (durch die Wärmebewegung behinderte) Ausrichtung erfahren, so ergibt sich für die *Temperaturabhängigkeit der Cotton-Moutonschen Konstante bei konstanter Wellenlänge* der Ausdruck

$$C = \text{konst.}\,\frac{\delta\,(n^2+2)^2}{\vartheta\,n}, \tag{2}$$

wo ϑ die absolute Temperatur, δ die Dichte und n der Brechungsindex der ursprünglich isotropen Flüssigkeit ist.

Dieses Gesetz wird jedoch, wie ich kürzlich[3]) an einigen reinen

1) A. Cotton und H. Mouton, Compt. rend. **145**. S. 229. 870. 1907; Ann. chim. phys. (8) **19**. S. 153. 1910; **20**. S. 194. 1910.

2) P. Langevin, Compt. rend. **151**. S. 475. 1910; Le Radium **7**. S. 249. 1910; W. Voigt, Göttinger Nachrichten Math. phys. Kl. 1912. S. 577; A. Enderle, Zur Theorie der elektrischen und magnetischen Doppelbrechung von Flüssigkeiten. Dissert. Freiburg 1912.

3) G. Szivessy, Ann. d. Phys. **68**. S. 127. 1922.

Flüssigkeiten bei einer bestimmten Wellenlänge ($\lambda = 589\,\mu\mu$) gezeigt habe, durch die Beobachtungen nicht bestätigt; mit abnehmender Temperatur nimmt vielmehr C stärker zu, als die Formel (2) verlangt.

Eine weitere Möglichkeit zur experimentellen Prüfung der Langevinschen Theorie der magnetischen Doppelbrechung bietet die *Temperaturabhängigkeit der Dispersion*. Die Cotton-Moutonsche Konstante C ist eine Funktion der Wellenlänge, und zwar gilt hierfür das sogenannte Havelocksche *Gesetz*

$$C = h\frac{(n^2-1)^2}{n\lambda}, \tag{3}$$

wo n wieder der Brechungsindex der isotropen Flüssigkeit ist und λ die Wellenlänge bedeutet; h ist die Havelocksche Konstante und hängt von der Natur der Flüssigkeit und ihrer Temperatur ab, ist aber von λ unabhängig.

Die bei „Zimmertemperatur" ausgeführten Beobachtungen von Skinner[1]), sowie von Cotton und Mouton[2]) haben dieses Gesetz gut bestätigt; es läßt sich aus der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie herleiten und zwar erhält man unter den Annahmen, daß das Molekül nur eine einzige Elektronengattung enthält, ferner die (rhombische) Anisotropie der Bindung und somit auch der Cotton-Mouton-Effekt schwach ist, für die Havelocksche Konstante den Ausdruck

$$\left\{ h = \frac{M}{240\pi R p e^2}\cdot\frac{1}{\vartheta\delta}\{(\beta_1-\beta_2)(k_1-k_2)+(\beta_2-\beta_3)(k_2-k_3) + (\beta_3-\beta_1)(k_3-k_1)\}. \right. \tag{4}$$

Hierbei bedeutet M das Molekulargewicht der Flüssigkeit, ϑ ihre absolute Temperatur, δ ihre Dichte, R die auf ein Grammmolekül bezogene Gaskonstante ($R = 8{,}31\cdot 10^7$), p die Zahl der im Molekül enthaltenen Elektronen von der bestimmten Gattung, e die Ladung eines Elektrons. k_1, k_2, k_3 sind die nach den molekularen Achsen des rhombisch-symmetrischen Moleküls genommenen Parameter der quasielastischen Kraft, die auf das Elektron wirkt; β_1, β_2, β_3 sind die Hauptwerte eines

1) C. A. Skinner, Pys. Review **29**. S. 541. 1909.

2) A. Cotton und H. Mouton, Ann. de chim. et de phys. (8) **20**. S. 213. 1910.

symmetrischen Tensors, durch den die magnetische Anisotropie des Moleküls bedingt wird.

Nimmt man an, daß die molekularen Konstanten k_1, k_2, k_3, β_1, β_2, β_3 der optischen und magnetischen Anisotropie von der Wärmebewegung unabhängig sind, so folgt aus (4) die Beziehung

$$h\,\vartheta\,\delta = \text{konst.} \tag{5}$$

wobei die Konstante rechts bei derselben Flüssigkeit für alle Temperaturen und Wellenlängen den nämlichen Wert besitzen muß. (5) *stellt das aus der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie folgende Gesetz für die Temperaturabhängigkeit der Dispersion der magnetischen Doppelbrechung dar.*

§ 2. *Versuchsanordnung.* Die Prüfung dieser Gesetzmäßigkeit habe ich bei *Nitrobenzol* durchgeführt, welches sich wegen seiner großen Cotton-Moutonschen Konstante C für genaue Messungen besonders gut eignet. Die Versuchsanordnung war dieselbe, welche ich in der schon erwähnten Arbeit beschrieben habe[1]); ich kann daher bezüglich aller Einzelheiten auf die dortigen Angaben verweisen. Während aber damals die Messungen nur bei *einer* bestimmten Wellenlänge ($\lambda = 589\,\mu\mu$) ausgeführt wurden, mußte diesmal sowohl die Temperatur ϑ, als auch die Wellenlänge λ variiert werden.

Da es Schwierigkeiten machte, die Temperatur der Flüssigkeit länger als etwa $^1/_2$ Stunde innerhalb der gewünschten Grenzen konstant zu halten, so wurden die Messungen in der Weise ausgeführt, daß die Temperatur bei konstant gehaltener Wellenlänge variiert wurde.

Folgende Wellenlängen kamen zur Verwendung:

$$\lambda = 486\,\mu\mu,\ 540\,\mu\mu,\ 589\,\mu\mu,\ 620\,\mu\mu,\ 656\,\mu\mu.$$

Die Kompensatorplatte des Braceschen Halbschattenkompensators, der bei der Messung der Doppelbrechung zur Verwendung kam, wurde für die einzelnen Wellenlängen in der früher angegebenen Weise[1]) mittels einer parallel zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatte geeicht; die den einzelnen Wellenlängen entsprechenden Verzögerungen dieser Quarzplatte wurden mit Hilfe eines Babinet-Soleilschen Kompensators mit Halbschattenvorrichtung bestimmt.

---

1) G. Szivessy, a. a. O.

In der folgenden Tab. 1 sind die relativen Verzögerungen φ der benutzten Kompensatorplatte zusammengestellt.

Tabelle 1.

λ (in $\mu\mu$)	486	540	589	620	656
φ	0,0392 λ	0,0309 λ	0,0244 λ	0,0205 λ	0,0172 λ

Die Bestimmung des Brechungsindex und seiner Temperaturabhängigkeit wurde für die Wellenlängen $\lambda = 486\,\mu\mu$, $\lambda = 589\,\mu\mu$ und $\lambda = 656\,\mu\mu$ durchgeführt; die den übrigen Wellenlängen entsprechenden Werte wurden durch Interpolation ermittelt. Als Meßinstrument diente wieder das Pulfrichsche Refraktometer, das mit einem Wasserstoff-Geißlerrohr bzw. mit einer Natriumflamme beleuchtet wurde.

Die Werte für die Dichte wurden der zitierten Abhandlung[1]) entnommen, da dieselbe Flüssigkeitsprobe zur Untersuchung kam.

§ 3. *Messungsergebnisse.* Im folgenden sind die Beobachtungsergebnisse zusammengestellt, welche zur Prüfung der in § 1 angegebenen Gesetzmäßigkeiten erforderlich sind.

Für die *Dichte* δ des Nitrobenzols und ihren Temperaturkoeffizienten ergab sich[1])

$$\delta = 1{,}2020 \text{ für } \vartheta = 293^0 \text{ abs.}; \quad \frac{d\,\delta}{d\,\vartheta} = -\,0{,}00095.$$

Die den einzelnen Wellenlängen λ entsprechenden Werte des *Brechungsindex* n und der zugehörigen Temperaturkoeffizienten sind in der folgenden Tab 2 enthalten; dabei sind, wie schon erwähnt, die zu den Wellenlängen $\lambda = 486\,\mu\mu$, $589\,\mu\mu$ und $656\,\mu\mu$ gehörenden Zahlen gemessen, die übrigen interpoliert.

Tabelle 2.

λ (in $\mu\mu$)	n für $\vartheta = 293^0$ abs.	$d\,n/d\,\vartheta$
486	1,5708	– 0,00049
540	1,5601	– 0,00048
589	1,5526	– 0,00047
620	1,5489	– 0,00047
656	1,5456	– 0,00046

1) G. Szivessy, a. a. O.

Diese Werte stimmen mit den Angaben von Falk[1]) gut überein.

Tabelle 3.

$\lambda = 486$; $\varphi = 0{,}0392\,\lambda$				$\lambda = 540$; $\varphi = 0{,}0309\,\lambda$			
ϑ	$2a$	$2a'$	$\Phi \cdot 10^3$	ϑ	$2a$	$2a'$	$\Phi \cdot 10^3$
278,6	8° 54′	12° 37′	2,47	278,1	8° 59′	13° 6,5′	2,17
289,0	8° 57′	12° 21′	2,26	289,3	9° 03′	12° 45,5′	1,95
298,7	9° 08′	12° 16′	2,08	299,0	9° 29′	12° 55,5′	1,81
309,0	9° 14′	12° 08′	1,93	309,6	9° 34′	12° 44,5′	1,67
320,5	9° 21′	12° 02,5′	1,79	320,3	9° 38′	12° 36′	1,56
329,4	9° 26′	12° 0′	1,71	329,1	9° 41′	12° 30′	1,48

$\lambda = 589$; $\varphi = 0{,}0244\,\tau$				$\lambda = 620$; $\varphi = 0{,}0205\,\tau$			
ϑ	$2a$	$2a'$	$\Phi \cdot 10^3$	ϑ	$2a$	$2a'$	$\Phi \cdot 10^3$
278,4	8° 34′	13° 11′	1,92	278,3	8° 38′	13° 46,5′	1,80
289,2	8° 32′	12° 42,5′	1,74	289,4	8° 41′	13° 21′	1,63
298,9	8° 30′	12° 22′	1,61	298,6	8° 51′	12° 11,5′	1,52
309,4	8° 12′	11° 47′	1,50	309,5	8° 53′	12° 53′	1,40
320,1	8° 29′	11° 49′	1,39	320,0	8° 57′	12° 39,5′	1,30
329,3	8° 04′	11° 14′	1,32	328,9	9° 02′	12° 36′	1,25

$\lambda = 656$; $\varphi = 0{,}0172\,\lambda$			
ϑ	$2a$	$2a'$	$\Phi \cdot 10^3$
278,0	8° 42′	14° 25,5′	1,68
289,2	8° 47′	13° 57,5′	1,52
298,8	8° 52,5′	13° 40,5′	1,41
309,1	8° 55′	13° 22′	1,31
320,4	8° 58,5′	13° 03,5′	1,20
329,0	9° 04′	12° 58,5′	1,15

In Tab. 3 sind die bei konstanter Feldstärke (etwa 10000 Gauss) und konstanter Länge der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht ausgeführten Messungen der magnetischen Doppelbrechung zusammengestellt. In dieser Tabelle bedeutet:

λ die Wellenlänge der benutzten Strahlung in $\mu\mu$;

ϑ die mittlere absolute Flüssigkeitstemperatur;

a das Azimut der Halbschattenstellung des Braceschen Kompensators, bevor die Flüssigkeit durch Erregen des Magnetfeldes doppelbrechend gemacht wurde;

1) K. G. Falk, Journ. amer. chem. soc. **31**. S. 809. 1909.

α' das Azimut der Halbschattenstellung nach Erregung des Magnetfeldes;

φ die der Tab. 1 entnommene relative Verzögerung der Kompensatorplatte;

Φ eine der Cotton-Moutonschen Konstante C proportionale Größe, und zwar ist $\Phi = \Psi \sin 2\beta$, wobei $\Psi = \frac{\sin \varphi}{2\pi}$ $(\sin 2\alpha' - \sin 2\alpha)$ die in Wellenlängen ausgedrückte relative Verzögerung zwischen außerordentlicher und ordentlicher Welle und β der Winkel ist, den die Kraftlinienrichtung des Magnetfeldes mit der Schwingungsrichtung des Analysators bildet. Hieraus und aus der Beziehung (1) folgt die Proportionalität zwischen Φ und C. β hatte bei allen Messungen denselben Wert (nahezu gleich 45^0).

Bezüglich der Methode der Messung von ϑ, α, α', sowie der Genauigkeit der gemessenen Werte ist die erwähnte Arbeit einzusehen.

§ 4. *Prüfung des Langevinschen Gesetzes der Temperaturabhängigkeit bei konstanter Wellenlänge.* Für die Temperaturabhängigkeit der Cotton-Moutonschen Konstante bei konstanter Wellenlänge ergibt die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie das durch Gleichung (2) ausgedrückte Gesetz; da die von uns mit Φ bezeichnete Größe der Cotton-Moutonschen Konstante C proportional ist, so muß nach jener Theorie der Ausdruck

$$\frac{\Phi \vartheta n}{\delta (n^2 + 2)^2} = Q \tag{6}$$

bei konstanter Wellenlänge für alle Temperaturen denselben Wert besitzen.

Zur Prüfung dieser Beziehung sind die erforderlichen Beobachtungsdaten in Tab. 4 zusammengestellt. In dieser bedeutet:

λ die Wellenlänge der benutzten Strahlung in $\mu\mu$;
ϑ die absolute Temperatur der Flüssigkeit;
δ die Dichte der Flüssigkeit;
n den Brechungsindex der Flüssigkeit;
Φ die aus Tab. 3 entnommenen Werte dieser Größe;
Q den durch Formel (6) definierten Ausdruck.

Wie man sieht, nimmt Q bei allen Wellenlängen mit abnehmender Temperatur zu. Hieraus folgt, daß — wie ich

Tabelle 4.

$\lambda = 486$					$\lambda = 540$				
ϑ	δ	n	$\Phi \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^2$	ϑ	δ	n	$\Phi \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^2$
278,6	1,2157	1,5779	2,47	4,43	278,1	1,2162	1,5672	2,17	3,92
289,0	1,2058	1,5728	2,26	4,26	289,3	1,2055	1,5619	1,95	3,71
298,7	1,1966	1,5680	2,08	4,10	299,0	1,1963	1,5573	1,81	3,59
309,0	1,1868	1,5630	1,93	3,98	309,6	1,1862	1,5521	1,67	3,48
320,5	1,1759	1,5573	1,79	3,88	320,3	1,1761	1,5470	1,56	3,41
329,4	1,1674	1,5530	1,71	3,85	329,1	1,1677	1,5428	1,48	3,35

$\lambda = 589$					$\lambda = 620$				
ϑ	δ	n	$\Phi \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^2$	ϑ	δ	n	$\Phi \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^2$
278,4	1,2159	1,5594	1,92	3,50	278,3	1,2160	1,5558	1,80	3,28
289,2	1,2056	1,5544	1,74	3,33	289,4	1,2054	1,5506	1,63	3,13
298,9	1,1964	1,5498	1,61	3,22	298,6	1,1967	1,5463	1,52	3,04
309,4	1,1864	1,5449	1,50	3,13	309,5	1,1863	1,5412	1,40	2,94
320,1	1,1763	1,5398	1,39	3,05	320,0	1,1764	1,5362	1,30	2,86
329,3	1,1675	1,5355	1,32	3,02	328,9	1,1679	1,5320	1,25	2,85

$\lambda = 656$				
ϑ	δ	n	$\Phi \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^2$
278,0	1,2162	1,5525	1,68	3,07
289,2	1,2056	1,5472	1,52	2,92
298,8	1,1965	1,5429	1,41	2,83
309,1	1,1867	1,5382	1,31	2,75
320,4	1,1760	1,5330	1,20	2,65
329,0	1,1678	1,5290	1,15	2,63

schon in der erwähnten Arbeit für den speziellen Fall $\lambda = 589\ \mu\mu$ gezeigt habe — *die Cotton-Moutonsche Konstante bei allen Wellenlängen mit abnehmender Temperatur schneller zunimmt, als die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie verlangt.*

§ 5. *Prüfung des Havelockschen Gesetzes bei verschiedenen Temperaturen.* Für die Abhängigkeit der Cotton-Moutonschen Konstante von der Wellenlänge liefert die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie bei konstanter Temperatur das Havelocksche Gesetz, das durch Gleichung (3) angegeben wird.

Wegen der Proportionalität zwischen Φ und der Cotton-Moutonschen Konstante C müßte also nach jener Theorie der Ausdruck

$$(7) \qquad \frac{\Phi n \lambda}{(n^2-1)^2} = H$$

bei derselben Temperatur konstant, d. h. unabhängig von der Wellenlänge λ sein.

Da die in § 3 zusammengestellten Werte Φ sich nicht genau auf dieselben Temperaturen beziehen, so mußten zur Prüfung der Formel (7) die der nämlichen Temperatur entsprechenden Werte durch Interpolation ermittelt werden; in vielen Fällen war die anzubringende Korrektur nur klein, entsprechend dem Umstande, daß die Beobachtungstemperaturen meist nur wenig auseinanderlagen.

In der folgenden Tab. 5 bedeutet:

ϑ die absolute Temperatur der Flüssigkeit;
λ die Wellenlänge der benutzten Strahlung in $\mu\mu$;
n den Brechungsindex der Flüssigkeit;
Φ die aus Tab. 3 entnommenen oder daraus interpolierten Werte dieser Größe;
H die durch Formel (7) definierte, der Havelockschen Konstante h proportionale Größe.

Tabelle 5.

$\vartheta = 278{,}0$				$\vartheta = 289{,}0$				$\vartheta = 299{,}0$			
λ	n	$\Phi \cdot 10^3$	H	λ	n	$\Phi \cdot 10^3$	H	λ	n	$\Phi \cdot 10^3$	H
486	1,5781	2,48	0,856	486	1,5728	2,26	0,795	486	1,5679	2,08	0,745
540	1,5673	2,17	0,866	540	1,5620	1,95	0,793	540	1,5573	1,81	0,749
589	1,5596	1,93	0,864	589	1,5546	1,74	0,794	589	1,5498	1,61	0,751
620	1,5559	1,80	0,860	620	1,5508	1,63	0,794	620	1,5461	1,52	0,759
656	1,5525	1,68	0,860	656	1,5473	1,52	0,794	656	1,5429	1,41	0,749

$\vartheta = 309{,}0$				$\vartheta = 320{,}0$				$\vartheta = 329{,}0$			
λ	n	$\Phi \cdot 10^3$	H	λ	n	$\Phi \cdot 10^3$	H	λ	n	$\Phi \cdot 10^3$	H
486	1,5630	1,93	0,704	486	1,5575	1,80	0,670	486	1,5532	1,72	0,651
540	1,5523	1,68	0,709	540	1,5471	1,56	0,671	540	1,5428	1,48	0,647
589	1,5451	1,49	0,705	589	1,5398	1,39	0,669	589	1,5356	1,32	0,647
620	1,5414	1,41	0,711	620	1,5362	1,30	0,669	620	1,5319	1,25	0,655
656	1,5383	1,31	0,708	656	1,5332	1,20	0,662	656	1,5290	1,15	0,645

Wie man sieht, ist die Größe H innerhalb der Beobachtungsfehler bei allen Temperaturen von der Wellenlänge unabhängig; *die Dispersion der magnetischen Doppelbrechung gehorcht also bei allen Temperaturen dem Havelockschen Gesetz.*

§ 6. *Prüfung des Gesetzes für die Temperaturabhängigkeit der Dispersion.* Für die Temperaturabhängigkeit der Dispersion der magnetischen Doppelbrechung folgt aus der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie das durch Gleichung (5) ausgesprochene Gesetz. Da die in § 5 mit H bezeichnete Größe der in jener Gleichung vorkommenden Havelockschen Konstante h proportional ist, so muß also nach der Langevinschen Theorie auch das Produkt

$$H\,\vartheta\,\delta = p \tag{8}$$

für alle Temperaturen denselben Wert besitzen.

Nun wird, wie in § 4 gezeigt wurde, das aus der Langevinschen Theorie sich ergebende Temperaturabhängigkeitsgesetz (bei konstanter Wellenlänge) durch die Beobachtungen nicht bestätigt; es ist daher zu erwarten, das auch die Formel (8) den wirklichen Verhältnissen nicht entspricht.

Dies ist auch in der Tat der Fall, wie sich aus der in Tab. 6 enthaltenen Zusammenstellung ergibt; in dieser bedeutet

ϑ die absolute Flüssigkeitstemperatur;
δ die Dichte der Flüssigkeit;
H die aus Tab. 5 entnommenen, durch Mittelwertbildung gewonnenen Werte dieser Größe;
p das durch Gleichung (8) definierte Produkt.

Tabelle 6.

ϑ	δ	H	$p \cdot 10^2$
278,0	1,2162	0,861	2,91
289,0	1,2058	0,794	2,77
299,0	1,1963	0,751	2,69
309,0	1,1868	0,707	2,59
320,0	1,1764	0,668	2,52
329,0	1,1678	0,649	2,49

Während nach der Langevinschen Theorie p für alle Temperaturen denselben Wert haben müßte, zeigt p bei zunehmender Temperatur eine deutliche Abnahme. *Die Langevinsche Theorie vermag also die Temperaturabhängigkeit der Dispersion der magnetischen Doppelbrechung nicht richtig wiederzugeben.*

§ 7. *Zusammenfassung.* Es wurde die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Doppelbrechung des Nitrobenzols für fünf verschiedene Wellenlängen des sichtbaren Spektralbereichs bestimmt. Dabei ergaben sich folgende Ergebnisse:

1. Die sich aus der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie bei konstanter Wellenlänge ergebende Beziehung

$$C = \text{konst.}\,\frac{\delta\,(n^2+2)^2}{\vartheta\,n}$$

(C Cotton-Moutonsche Konstante, ϑ absolute Temperatur, n Brechungsindex, δ Dichte der Flüssigkeit) erwies sich bei keiner Wellenlänge als richtig. Die Cotton-Moutonnsche Konstante nimmt vielmehr bei allen Wellenlängen mit abnehmender Temperatur stärker zu, als dieses Gesetz verlangt.

2. Das sogen. Havelocksche Gesetz

$$C = h\,\frac{(n^2-1)^2}{n\,\lambda}$$

(λ Wellenlänge, h von der Wellenlänge unabhängige Havelocksche Konstante), das bisher nur bei etwa 20° C bestätigt worden war, zeigte sich bei allen Temperaturen als gültig.

3. Die von der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie für die Temperaturabhängigkeit von h geforderte Beziehung

$$h\,\vartheta\,\delta = \text{konst.}$$

wird durch die Beobachtungen nicht bestätigt; bei abnehemender Temperatur nimmt h stärker zu, als durch dieses Gesetz vorgeschrieben wird.

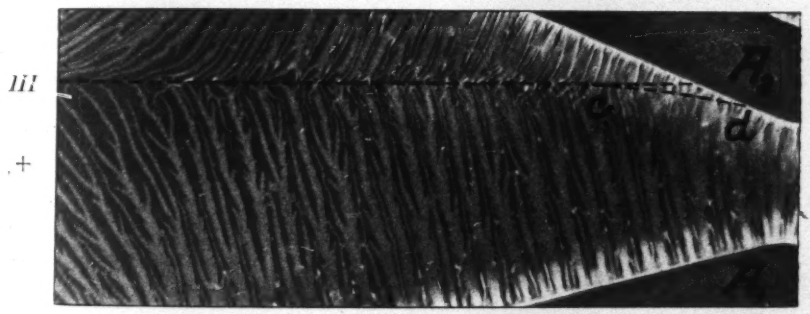
Münster i. Westf., Physik. Inst. d. Universität, Mai 1922.

(Eingegangen 26. Mai 1922.)

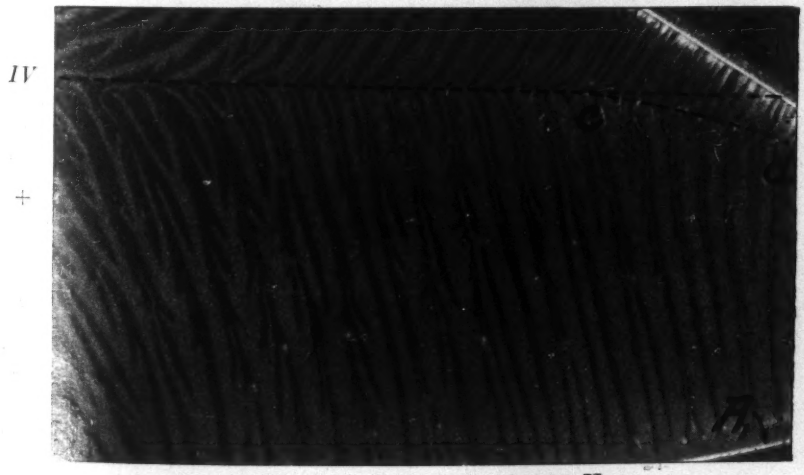
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

$t_0 = 2{,}1 \times 10^{-8}$ sec; $p = 300$ mm Hg

$t_0 = 2{,}45 \times 10^{-8}$ sec; $p = 150$ mm Hg



$t_0 = 3{,}5 \times 10^{-8}$ sec; $p = 500$ mm Hg

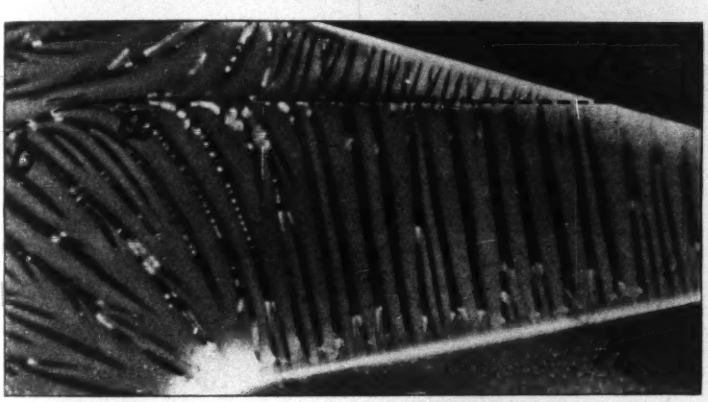


$t_0 = 6{,}3 \times 10^{-8}$ sec; $p = 300$ mm Hg

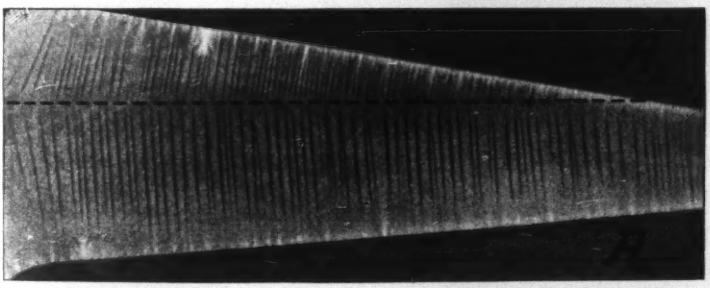
P. O. Pedersen

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY.

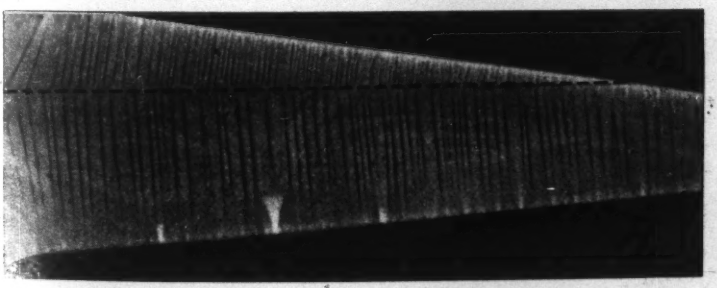
$t_0 = 2{,}1 \times 10^{-8}$ sec; $p = 150$ mm Hg



$t_0 = 2{,}1 \times 10^{-8}$ sec; $p = 300$ mm Hg



$t_0 = 3{,}5 \times 10^{-8}$ sec; $p = 400$ mm Hg



$t_0 = 3{,}5 \times 10^{-8}$ sec; $p = 400$ mm Hg

P. O. Pedersen.

Inhalt.

		Seite
1.	Edith Einstein. Zur Theorie des Radiometers	241
2.	W. Esmarch. Eine Methode zur genauen Messung kleiner Widerstände	255
3.	Karl F. Lindman. Über die durch ein aktives Raumgitter erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen	270
4.	Max Wehrli. Funkenpotentiale im transversalen Magnetfelde	285
5.	Victor Fischer. Eine Differentialform der Zustandsgleichung bei hohem Druck	315

Max Kohl A. G. Chemnitz

Fabrik physikalischer Apparate

Hörsaal- u. Laboratoriums-Einrichtungen

Experimentiertisch für Physik. 3 m lang. [7/8.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

Ölluftpumpen — Experimentier-Schalttafeln

Preislisten und Sonderangebote bereitwilligst

1922. № 20.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 69.

1. *Zur Theorie des Radiometers; von Edith Einstein.*

I.

Die Tatsache, daß ein im partiellen Vakuum aufgehängter Körper infolge von Bestrahlung eine Abstoßung erfährt, wurde bereits von Fresnel[1]) beobachtet.

Eine eingehende Untersuchung dieser Erscheinung finden wir aber erst bei W. Crookes[2]), der im Jahre 1874 das sogenannte „Radiometer" konstruierte.

Der Apparat besteht aus einer vertikalen Achse mit vertikalen, gleich weit entfernten, auf der einen Seite geschwärzten Flügeln, welche innerhalb einer, bis zu einem gewissen Grad evakuierten Röhre drehbar befestigt sind. Läßt man Lichtstrahlen, oder die dunkle Strahlung eines Körpers, auf die geschwärzte Flügelseite fallen, so wird dieselbe abgestoßen Dadurch werden die Flügel in eine beschleunigte Drehbewegung versetzt, welche in eine gleichförmige Bewegung übergeht, wenn der Luftwiderstand und die Reibung an den Achsen gleich groß sind, wie die durch die Reibung erzeugte Kraft. Der Name „Radiometer" wurde gewählt, weil man die Umdrehungsgeschwindigkeit der Flügel als ein Maß der Strahlungsintensität gebrauchen kann.

Aus den Untersuchungen von Crookes ergab sich folgendes:

1. Der Radiometerdruck ist abhängig vom Druck des Gases.[3])

2. Der Radiometerdruck ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes der Radiometerflügel von der Energiequelle.[4])

1) A. Fresnel, Ann. de Chimie et Physique **29**. S. 57, 107. 1825.
2) W. Crookes, Phil. Trans. **164**. S. 501. 1874.
3) W. Crookes, Phil. Trans. **170**. S. 128. 1880.
4) W. Crookes, Phil. Trans. **166**. S. 340. 1876.

3. Der Radiometerdruck ist proportional der Intensität der Energie, mit welcher die Flügel bestrahlt werden.[1])

4. Der Radiometerdruck ist abhängig vom Absorptionsvermögen der Flügeloberfläche.[2])

Gleichzeitig mit den letzten Experimenten von Crookes[3]) stellte auch A. Schuster[4]) Radiometerversuche an, welche die Erklärung der Ursachen des Radiometereffektes wesentlich förderten. Seine Versuche zeigten, daß der Effekt nicht durch den Strahlungsdruck zustande kommt. Den Beweis der Richtigkeit dieser Annahme erbrachte Schuster, indem er das Radiometergefäß im Gleichgewicht aufhing, und das Licht direkt auf die Flügel auffallen ließ. Infolge des Reaktionsprinzips drehten sich die Flügel und das freihängende Gehäuse in entgegengesetztem Sinne. Würde der Radiometerdruck durch den Strahlungsdruck erzeugt, so hätten sich die Flügel und das Gefäß in demselben Sinne drehen müssen.

Sowohl die Versuche von Crookes, als von Schuster, enthalten keine genauen quantitativen Angaben über die Intensität der verwendeten Strahlung, so daß sie nur in beschränktem Maße zur Kontrolle von theoretisch berechneten Drucken verwendet werden können.

Genauere quantitative Messungen wurden 1899 von Donle[5]) vorgenommen. Er bestimmte den Radiometereffekt aus dem Drehmoment, welches die Strahlung dem bifilar aufgehängten Balken eines Radiometers erteilt. Als Strahlungsquelle dienten ihm Hefnerkerze, Stearinkerze und Auerbrenner. Da bei den Messungen von Donle der Gasdruck nicht variiert wurde, so liefern sie nur genaue quantitative Angaben über die Abhängigkeit des Radiometereffektes von der Strahlungsenergie der Lichtquelle, geben aber keinen Aufschluß über die Abhängigkeit vom Gasdruck.

---

1) W. Crookes, Phil. Trans. 166. S. 342. 1876.
2) W. Crookes, Phil. Trans. 166. S. 365. 1876.
3) W. Crookes, Phil. Trans. 170. S. 132. 1880.
4) A. Schuster, Phil. Trans. 166. S. 715. 1880.
5) W. Donle, Wied. Ann. 68. S. 306. 1899.

II.

W. Crookes[1]) versuchte als erster, den Radiometerdruck theoretisch zu erklären, und erkannte auch, daß der Effekt vom Drucke der Moleküle erzeugt werde.

Einige Jahre nach Crookes ersten Experimenten veröffentlichte J. C. Maxwell[2]) seine Theorie der Radiometerkräfte.

Maxwell nahm an, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle an jeder Stelle des Mediums durch die Temperatur und den Temperaturgradienten beeinflußt sei, so daß eine Abweichung vom Exponentialgesetze, welches für einen im ganzen Gase gleichförmigen Temperaturzustand gilt, stattfindet. Maxwell versuchte den Radiometerdruck als Funktion der Temperatur darzustellen, und zwar in Abhängigkeit der zweiten Ableitung der Temperatur.

Aus dieser Theorie ergab sich, daß auf einen in ein Gas mit einem Temperaturgefälle eingetauchten Körper gar keine Radiometerkräfte wirken.

Die Tatsache, daß sich aus der Maxwellschen Berechnung kein Radiometerdruck ergab, ist, nach unserer Meinung, die Folge davon, daß Maxwell in seiner Entwicklung die Glieder höherer Ordnung, die gerade den Radiometerdruck bestimmen, vernachlässigt hat.

Den beobachteten Radiometerdruck suchte Maxwell auf die Wirkung des Gleitens des Gases längs der ungleich erwärmten Gefäßwände zurückzuführen. Da aber die Gesetze dieser Gleitwirkung äußerst kompliziert sind, so wurde durch diese Annahme die Lösung des Problems sehr erschwert.

Gleichzeitig mit Maxwell befaßte sich auch O. Reynolds[3]) mit der Radiometertheorie. Seine Resultate stimmen mit dem negativen Ergebnis der Maxwellschen Theorie überein, so daß auch durch diese Untersuchung die Lösung des Problems des Radiometereffektes nicht erzielt wurde.

Erst in den letzten Jahren gelang es M. Knudsen[4]) durch die Einführung einer neuen Größe in die Berechnungen, den „Akkommodationskoeffizienten", für *tiefe* Drucke eine Theorie

1) W. Crookes, Phil. Trans. 160. S. 362. 1876.
2) J. C. Maxwell, Phil. Trans. 170. S. 231. 1880.
3) O. Reynolds, Proc. Roy. Soc. S. 407. 1874.
4) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 32. S. 809. 1910.

aufzustellen, welche mit den Ergebnissen der Versuche in gutem Einklang steht.

Im Jahre 1919 veröffentliche W. Westphal[1]) eine Theorie des Radiometers bei höherem Druck. Da sie aber einen Widerspruch gegen den Impulssatz enthielt, so hat der Verfasser diese Theorie später[2]) widerrufen.

So blieb das Problem für hohe Drucke noch ungelöst.

III.

Da die bisher veröffentlichten Radiometertheorien, mit Ausnahme des Falls tiefer Drucke, dem Vorgange nicht in erschöpfender Weise gerecht werden können, so ist in der folgenden Arbeit versucht worden, eine allgemeine Radiometertheorie aufzustellen.

Die Grundlage unserer Theorie ist die bekannte molekulartheoretische Vorstellung, daß durch die Molekularstöße des umgebenden Gases nicht der gleiche Betrag an Bewegungsgröße auf die beiden Seiten des Radiometerflügels übertragen wird.

Die Ursache hiervon erblicken wir in dem Bestehen eines Wärmestromes, der mit einer leichten Abweichung von der in einem ruhenden, gleichtemperierten Gase gültigen Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung verbunden ist. Diese Abweichung bringt ihrerseits wieder eine Abweichung des Spannungstensors von der Isotropie und Homogenität hervor. — Wir wollen zunächst untersuchen, in welcher Weise die Geschwindigkeitsverteilung an einer bestimmten Stelle mit der Wärmeströmung an *dieser* Stelle zusammenhängt, und hieraus den Zusatztensor als Funktion der Wärmeströmungskomponenten ableiten.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Gasschicht, welche sich zwischen zwei ebenen, parallelen Platten A und B befindet. Die Temperaturen der Platten seien T_1 und T_2, wobei $T_1 \neq T_2$.

Welches ist die Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle im betrachteten Raum?

Befindet sich das Gas im stationären Zustand, so erfüllt es die vier Bedingungen:

---

1) W. Westphal, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 21. S. 129. 1919.
2) W. Westphal, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 21. S. 669. 1919.

a) Die Zahl der Moleküle zwischen A und B ist konstant.

b) Die Summe der mittleren Energie der Moleküle ist konstant.

c) Es findet kein Transport von Materie statt, d. h. die Summe der Moleküle, welche pro Zeiteinheit durch eine Fläche senkrecht zum Wärmestrom hindurchtreten, muß gleich Null sein.

d) Es findet eine Wärmeströmung statt.

Unsere Aufgabe besteht vorerst darin, aus allen möglichen Geschwindigkeitsverteilungen diejenigen auszuwählen, welche den erwähnten 4 Bedingungen entsprechen, und unter diesen die wahrscheinlichste zu ermitteln.

Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Geschwindigkeitskomponenten eines Moleküls innerhalb der Grenzen ξ, η, ζ, und $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ liegen, mit $f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$, so erhalten wir die gesuchte Verteilungsfunktion, indem wir das Minimum der Boltzmannschen H-Funktion

$$H = \int f \lg f \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \int f \lg f \, d\tau \tag{1}$$

unter Berücksichtigung der vier Nebenbedingungen bestimmen. Unsere vier Nebenbedingungen lassen sich folgendermaßen formulieren:

$$\int f \, d\tau = N = \text{Konst.} \tag{2}$$

$$\frac{m}{2} \frac{1}{N} \int f \, d\tau (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = U, \tag{3}$$

wobei U = Energie einer Molekel, N = Anzahl Molekeln im cm^3 m = Masse einer Molekel.

$$\int f \, d\tau \cdot \xi = 0, \tag{4}$$

$$\varphi_x = \frac{m}{2} \int \xi (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f \, d\tau, \tag{5}$$

wobei φ_x = x-Komponente der Wärmeströmung. Die Extremalbedingung der drei ersten Nebenbedingungen (1), (2), (3) allein würde liefern:

$$\delta \left\{ \int f \, d\tau \lg f \right\} = 0 \qquad \text{aus (1)}$$

$$\delta \left\{ \int f \, d\tau \right\} = 0 \qquad \text{aus (2)} \tag{7}$$

$$\delta \left\{ \int f \, d\tau \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \right\} = 0 \qquad \text{aus (3)}. \tag{8}$$

Indem wir (6) mit 1, (7) mit μ, (8) mit λ multiplizieren, addieren, und die Summe gleich Null setzen, erhalten wir:

$$(9)\quad \begin{cases} \delta\left\{f\lg f + f + \mu f + \lambda f \frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\} d\tau = 0, \\ \int\left\{\lg f + 1 + \mu + \lambda \frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\}\delta f = 0; \end{cases}$$

daraus erhielte man den bekannten Ausdruck:

$$\lg f + 1 + \mu + \lambda \frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) = 0,$$

$$f = e^{-1-\mu-\lambda\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}$$

und hieraus würde sich die Verteilungsfunktion ergeben:

$$(10)\quad f = A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

wobei $h = \frac{\lambda m}{2}$ gesetzt ist.

Um die für unser Problem wesentlichen Bedingungen (4) und (5) zu berücksichtigen, bilden wir die Variation von (4) und (5)

$$(11)\quad \delta\left\{\int \xi f\, d\tau\right\} = 0$$

$$(12)\quad \delta\left\{\int \xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) f\, d\tau\right\} = 0.$$

Wir multiplizieren (11) mit $(-\alpha)$ und (12) mit $(-\beta)$, addieren zu (9) und setzen die Summe gleich Null.

$$\delta\left\{\int f\lg f + f + \mu f + \lambda\frac{m}{2} f(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - \alpha\xi - \beta\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\}\delta\tau = 0,$$

$$\lg f + 1 + \mu + \lambda\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - \alpha\xi - \beta\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) = 0,$$

$$(13)\quad f = e^{-1-\mu-\lambda\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-\alpha\xi-\beta\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Die gesuchte Verteilungsfunktion, welche die 4 Bedingungen enthält, wird also lauten:

$$(14)\quad f = A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha\xi+\beta\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Wir entwickeln die Funktion $e^{\alpha\xi+\beta\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}$ in eine Reihe und brechen mit den quadratischen Gliedern ab. Dies ermöglicht uns, α und β zu bestimmen.

Eine einfache Untersuchung, auf die wir hier nicht eingehen, zeigt, daß solch eine Entwicklung zulässig ist.

Setzen wir

$$u = \alpha\xi + \beta\xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \tag{14a}$$

dann lautet die Verteilungsfunktion:

$$f = A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!}\right). \tag{15}$$

IV. Bestimmung der Konstanten α und β.

Um die Konstanten α und β zu bestimmen, setzen wir (15) in (4) und (5) ein; dies ergibt:

$$\int \xi f \, d\tau = \int A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} \, d\tau \, \xi \left(1 + u + \frac{u^2}{2}\right) = 0 \tag{16}$$

und

$$\begin{cases} \int \xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f \, d\tau \\ = \int A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} (\xi^3 + \xi\eta^2 + \xi\zeta^2)\left(1 + u + \frac{u^2}{2}\right) d\tau = \frac{2\varphi_x}{m}. \end{cases} \tag{17}$$

Führt man die Integration dieser beiden Gleichungen aus, so erhalten wir:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}(\xi + \alpha\xi^2 + \beta\xi^4 + \beta\xi^2\eta^2 + \beta\xi^2\zeta^2) \, d\tau \\ \qquad = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^5}} + \frac{5}{4}\beta\sqrt{\frac{\pi^5}{h^7}} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Ebenso erhalten wir durch die Ausführung der Integration von (17):

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}(\xi^3 + \xi\eta^2 + \xi\zeta^2)(\alpha\xi + \beta\xi^2 + \beta\xi\eta^2 + \beta\xi\zeta^2) \, d\tau \\ \qquad = A\left\{\alpha\frac{5}{4}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^7}} + \beta\frac{35}{8}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^9}}\right\} = \frac{2\varphi_x}{m}. \end{cases} \tag{19}$$

Aus (18) und (19) ergeben sich die Werte von α und β.

$$\alpha = -\frac{4\varphi_x}{A\,m}\sqrt{\frac{h^7}{\pi^5}}. \tag{20}$$

$$\beta = \frac{8}{5}\frac{\varphi_x}{A\,m}\sqrt{\frac{h^9}{\pi^5}}. \tag{21}$$

V.

Für die νte Komponente des Druckes auf die Fläche mit der Normalen μ (herrührend von der Geschwindigkeitskomponente ξ der Moleküle) kann bekanntlich geschrieben werden:

$$p_{\mu\nu} = Nm\overline{\xi_\mu \xi_\nu}. \tag{22}$$

Für die (xx)-Komponenten ergibt das:

$$\begin{cases} p_{xx} = m\int \xi^2 f\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A m \left\{ e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} \xi^2 \left(1 + u + \frac{u^2}{2}\right)\right\} d\tau \\ = Am\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^5}} + \frac{3}{8}\alpha^2\sqrt{\frac{\pi^5}{h^7}} + \frac{21}{8}\alpha\beta\sqrt{\frac{\pi^5}{h^9}} + \frac{189}{32}\beta^2\sqrt{\frac{\pi^5}{h^{11}}}\right\}, \end{cases} \tag{23}$$

und wenn man die Werte für α und β aus (20) und (21) einsetzt,

$$p_{xx} = A\frac{m}{2}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^5}} + \frac{\varphi_x^2}{Am}\sqrt{\frac{h^7}{\pi^5}} \cdot \frac{108}{25}.$$

Ebenso erhält man für die beiden anderen Normaldrucke

$$\begin{cases} p_{yy} = \int \eta^2 f\, d\tau = mA\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^5}} + \frac{\alpha^2}{8}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^7}} + \frac{7}{8}\alpha\beta\sqrt{\frac{\pi^5}{h^9}}\right. \\ \qquad \left. + \frac{63}{32}\beta^2\sqrt{\frac{\pi^5}{h^{11}}}\right\} = A\frac{m}{2}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^5}} + \frac{36}{25}\frac{\varphi_x^2}{Am}\sqrt{\frac{\pi^5}{h^7}}, \\ p_{zz} = \int \zeta^2 f\, d\tau = p_{yy}. \end{cases} \tag{24}$$

VI.

Die so ermittelte Abhängigkeit des Drucktensors vom Wärmestrom an einer Stelle werden wir als gültig ansehen dürfen auch in einem ausgedehnteren, beliebig inhomogenem Strömungsfeld; dabei ist jedoch Vorsicht vonnöten. Denn die Größen A und h variieren örtlich, und nichts berechtigt uns zu der Annahme, daß gerade die *von φ_x freien Glieder* in (23) und (24) räumlich konstant sind. Es wäre also unberechtigt, und, wie sich zeigen wird, auch wirklich unrichtig, unmittelbar die mit φ_x^2 proportionalen Terme in den Ausdrücken (23) und (24) als die Zusatzspannungen anzusehen, die den Radiometereffekt hervorbringen.

Vielmehr müssen wir durch eine besondere Überlegung die allgemeine Gestalt des Zusatztensors feststellen, worauf wir

ihn leicht aus den gefundenen Ausdrücken — durch Absonderung des räumlich konstanten, isotropen Druckes — werden herausschälen können.

Entsprechend dem für spezielle Orientierung des Koordinatensystems gefundenen Resultate, machen wir für den *gesamten* Drucktensor $p_{\mu\nu}$ im allgemeinen Fall den Ansatz, daß er sich aus einem räumlich konstanten isotropen Druck Θ, und aus einem symmetrischen Tensor zusammensetzt, dessen Komponenten quadratische Formen der Wärmestromkomponenten mit räumlich konstanten Koeffizienten sind.

Der allgemeinste Ansatz dieser Art ist, wie leicht zu zeigen:

$$p_{\mu\nu} = \Theta\,\delta_{\mu\nu} + \sigma\,\varphi_\mu\,\varphi_\nu + \lambda\,\varphi_\alpha\,\varphi_\alpha\,\delta_{\mu\nu}, \tag{25}$$

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1 & \mu = \nu, \\ 0 & \mu \neq \nu. \end{matrix}$$

Nun beachten wir, daß im stationären Falle:

I. Die Divergenz des Tensors Null sein muß:

$$\frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{26}$$

II. Die Wärmeströmung wirbelfrei sein muß:

$$\frac{T\varphi_\mu}{Tx_\nu} - \frac{T\varphi_\nu}{Tx_\mu} = 0. \tag{27}$$

III. Die Divergenz der Wärmeströmung Null sein muß:

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \tag{28}$$

Bilden wir

$$\frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\nu},$$

so erhalten wir nach Gl. (25)

$$\frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sigma\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu}\varphi_\mu + \sigma\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}\varphi_\nu + 2\lambda\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\mu}\varphi_\alpha$$

und mit Rücksicht auf (27) und (28)

$$\frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sigma\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}\varphi_\nu + 2\lambda\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\mu}\varphi_\alpha = 0.$$

Setzen wir im ersten Gliede $\nu = \alpha$, so erhalten wir:

$$\varphi_\alpha\left\{2\lambda\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} + \sigma\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha}\right\} = 0,$$

daraus folgt:

$$2\lambda \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_\mu} = -\sigma \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_a}$$

und mit Rücksicht auf (27)

$$\lambda = -\frac{\sigma}{2}. \tag{29}$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung (25) ein, so lautet unser Tensor:

$$p_{\mu\nu} = \sigma\{\varphi_\mu \varphi_\nu - \tfrac{1}{2}\varphi_a \varphi_a \delta_{\mu\nu}\} + \Theta \delta_{\mu\nu}, \tag{30}$$

daraus können wir die Druckkomponenten bilden:

$$\varphi_a^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases},$$

so lauten die Komponenten des Druckes:

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= \sigma\{\varphi_x \varphi_x - \tfrac{1}{2}\varphi_x^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_y^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_z^2\} + \Theta, \\
p_{xy} &= \sigma \varphi_x \varphi_y, \\
p_{xz} &= \sigma \varphi_x \varphi_z, \\
p_{yx} &= \sigma \varphi_y \varphi_x, \\
p_{yy} &= \sigma\{\varphi_y \varphi_y - \tfrac{1}{2}\varphi_x^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_y^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_z^2\} + \Theta, \\
p_{yz} &= \sigma \varphi_y \varphi_z, \\
p_{zx} &= \sigma \varphi_z \varphi_x, \\
p_{zx} &= \sigma \varphi_z \varphi_y, \\
p_{zz} &= \sigma\{\varphi_z \varphi_z - \tfrac{1}{2}\varphi_x^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_y^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_z^2\} + \Theta.
\end{aligned}$$

Rechnet man nun wieder auf die spezielle, früher benützte Orientierung des Koordinatensystems, so werden alle Komponenten des Tensors, mit Ausnahme derjenigen, welche φ_x enthalten, gleich Null. Also erhalten wir:

$$p_{xx} = \frac{\sigma}{2}\varphi_x^2 + \Theta, \tag{31}$$

$$p_{yy} = -\frac{\sigma}{2}\varphi_x^2 + \Theta, \tag{32}$$

$$p_{zz} = -\frac{\sigma}{2}\varphi_x^2 + \Theta. \tag{33}$$

Vergleichen wir nun die beiden gaskinetisch (Gleichung 23) und tensoriell (31) abgeleiteteten Gleichungen für p_{zz}, so ergibt sich aus ihnen der von den räumlichen Koordinaten unabhängige Teil des Druckes, und zwar

$$\Theta = \frac{A\,m}{2}\sqrt{\frac{\pi^3}{h^5}} + \frac{72}{25}\sqrt{\frac{h^7}{\pi^3}} \tag{34}$$

und somit lauten unsere Druckkomponenten:

$$p_{xx} = \Theta + \frac{36}{25}\,\frac{\varphi_x^2}{A\,m}\sqrt{\frac{h^7}{\pi^3}}\,, \tag{35}$$

$$p_{yy} = p_{zz} = \Theta - \frac{36}{25}\,\frac{\varphi_x^2}{A\,m}\sqrt{\frac{h^7}{\pi^3}}\,. \tag{36}$$

VII.

Um nun dieses Ergebnis der Theorie mit experimentell bestimmten Drucken vergleichen zu können, ist es erforderlich, unseren Druck in Abhängigkeit von der Temperatur und der Dichte zu berechnen. Da indessen die Temperatur im Gase von Ort zu Ort veränderlich ist, so können wir T in unserer Formel nur als eine angenähert bekannte Größe einführen, welche nicht vollständig mit der an der betrachteten Stelle wirklich vorhandenen Temperatur übereinstimmt.

Da die Geschwindigkeitsverteilung unseres Gases nur leicht von der Maxwellschen Verteilung für isotropen Druck abweicht, so kann man die Konstante h als die für das Maxwellsche Gesetz geltende betrachten, also

$$h = \frac{m}{2\,k\,T}\,, \tag{37}$$

wobei k = Boltzmannschen Konstante, m = Masse eines Molküls, T = die in unserem Falle nur *angenähert* bekannte absolute Temperatur bedeutet.

Berechnet man den Wert von A aus Gleichung (2) $N = \int f\,d\tau$, wobei f die Verteilungsfunktion aus Gleichung (10) darstellt, so erhalten wir:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\,d\tau = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}}\,. \tag{38}$$

Setzen wir nun die Werte von A und h in (35) und (36) ein, so erhalten wir unsere Druckkomponenten als Funktionen des Wärmestromes und der Temperatur.

$$(39)\qquad \begin{cases} p_{xx} = \Theta + \frac{9}{25}\frac{\varphi_x^2 m}{N\varkappa^2 T^2}, \\ p_{yy} = p_{zz} = \Theta - \frac{9}{25}\frac{\varphi_x^2 m}{N\varkappa^2 T^2}. \end{cases}$$

Erweitern wir das zweite Glied mit m, und mit dem Quadrate der Avogadroschen Zahl N_0, so erhalten wir:

$$p_{xx} = \Theta + \frac{9}{25}\frac{m^2 N_0^2 \varphi_x^2}{m N N_0^2 \varkappa^2 T^2},$$

und da

$m \cdot N_0 = M$ = Masse eines Mols,
$Nm = \varrho$ = Dichte,
$N_0 \varkappa = R$ = allgemeine Gaskonstante,

so nehmen die Druckkomponenten die Form an:

$$(40)\qquad \begin{cases} p_{xx} = \Theta + \frac{9}{25}\frac{M^2 \varphi_x^2}{\varrho R^2 T^2}, \\ p_{yy} = p_{zz} = \Theta - \frac{9}{25}\frac{M^2 \varphi_x^2}{\varrho R^2 T^2}. \end{cases}$$

Somit ersehen wir, daß der so berechnete Druck aus zwei Summanden besteht. Der erste Summand stellt den von den Raumkoordinaten unabhängigen Druck dar, der zweite Summand stellt den Drucküberschuß dar, welcher den eigentlichen Radiometerdruck bewirkt.

Dieses letzte Glied ist abhängig von der zweiten Potenz der Wärmeströmung. Hieraus ergibt sich, daß der Radiometerdruck dem Quadrate des Temperaturgradienten des Gases proportional ist.

Die Abhängigkeit des Radiometerdruckes vom Gasdruck ist durch die Größe ϱ bedingt, welche dem Drucke des Gases direkt proportional ist.

VIII.

Die für den Drucktensor gefundene Abhängigkeit vom Wärmestrom zeigt eine interessante Analogie zur Elektrostalik.

Die Komponenten des Radiometerdruckes hängen von denjenigen des Wärmestroms in derselben Weise ab, wie die Maxwellschen Spannungen vom elektrostatischen Feld, nur das Vorzeichen ist das entgegengesetzte.

Freien Ladungen auf der Oberfläche der Leiter entspricht ein Eintreten oder Austreten von Wärmestromlinien in die den Gasraum begrenzenden, oder in ihm — zum Studium der Radiometerwirkung — suspendierten festen Körper.

Diese Auffassung wird eine rasche Übersicht ermöglichen, wie — die Gültigkeit der hier vorgetragenen Theorie vorausgesetzt — Versuche einzurichten seien, um die Theorie in einfacher Weise an der Erfahrung zu prüfen.

Unter den bisher vorliegenden Versuchen konnten wir keine finden, für welche dieses der Fall wäre.

Die früher für die einfachste gehaltene Anordnung (wie sie z. B. Knudsen anwandte), bei welcher einer erwärmten Platte in kleinem Abstand eine zweite bewegliche Platte gegenübersteht realisiert angenähert den Fall eines linearen Temperaturgefälles.

Nun erkennt man aber leicht, daß bei vollkommen idealer Durchführung dieser Anordnung, der Wärmestrom zu beiden Seiten der Platte denselben Wert haben müßte, und dabei, nach unserer Theorie, überhaupt kein Radiometereffekt auftreten dürfte — ebensowenig als eine ungeladene Metallplatte, die sich senkrecht zum Felde in einem Kondensator befindet, eine rendierende elektrostatische Kraft erfährt.

Der Radiometereffekt, der in diesem Falle wirklich auftritt, sollte demnach seine Ursache lediglich in der Abweichung des Feldverlaufes von der Linearität, und insbesondere in dem (von vornherein mehr nebensächlich erscheinenden) Umstand haben, daß nicht alle Wärme, die auf der einen Seite in die Platte eintritt, auf der anderen Seite wieder an das Gas abgegeben wird, sondern ein Teil derselben durch die unvermeidlichen Träger abströmt.

Vom Standpunkt der oben erwähnten Analogie entspricht dies einer elektrischen Ladung auf der Platte, weil sie dem Gase gegenüber eine Wärmesenke darstellt.

Was wir erwarten können, ist, daß der beobachtete Radiometereffekt nicht mehr als einen kleinen Bruchteil des nach unserer Formel berechneten einseitigen Drucküberschusses

$$\frac{9}{25}\,\frac{\varphi_\infty^2\, M}{\varrho\, R^2\, T^2}$$

beträgt.

Dies bestätigt sich nun auch an den Versuchen von M. Knudsen.[1])

Die Messungen von Knudsen wurden bei einem Hg-Dampfdruck von 2,04 Dyn/cm², einer Temperatur von 296°, und einem Temperaturgefälle von 105°/cm ausgeführt.

Hieraus ergeben sich folgende für unsere Formel in Betracht kommenden Größen:

$$M = \text{Molekulargewicht des Hg} = 200,$$

$$\varrho = \text{Dichte} = 1{,}8 \cdot 10^{-8},$$

$$R = 8{,}32 \cdot 10^{7}.$$

Setzt man den Wärmestrom = Produkt aus Temperaturgefälle × Leitfähigkeit, so ist $\varphi_x = 1{,}15 \cdot 10^5$ in mechanischem Maß.

Hieraus ergibt sich der Radiometerdruck:

$$\frac{9}{25} \frac{\varphi_x^2 M}{\varrho R^2 T^2} = 18{,}2 \text{ Dyn/cm}^2.$$

Der von Knudsen gemessene Druck war 1,02 Dyn/cm².

So beträgt in der Tat der gemessene Druck nur einen kleinen Bruchteil des berechneten *einseitigen* Druckes.

Leider fehlen bei den meisten Radiometermessungen genauere Angaben über das Temperaturgefälle und die Temperatur des Gases; so hatten wir nur eine beschränkte Anzahl von Versuchsergebnissen zur Verfügung, mit welchen wir unsere theoretisch berechneten Drucke vergleichen konnten.

Es wäre deshalb sehr wünschenswert, die Theorie auch an neueren Messungen kontrollieren zu können, bei welchen genaue Angaben über alle für unsere Formel in Betracht kommenden Größen angegeben sind.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. A. Einstein für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie Herrn Prof. Dr. S. Ratnowsky und Herrn Prof. Dr. P. Epstein für das fördernde Interesse, welche sie mir zuteil werden ließen, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 32. S. 809. 1910.

(Eingegangen 4. Juli 1922.)

2. *Eine Methode zur genauen Messung kleiner Widerstände;* *von W. Esmarch.*

1. Einleitung.

Gelegentlich einer Untersuchung am hiesigen Metallographischen Institut trat die Aufgabe an mich heran, sehr kleine Widerstände bei großen und nicht ganz konstanten Übergangswiderständen in den Strom- und Potentialzuleitungen zu bestimmen. Die Thomsonbrücke erwies sich als zu wenig empfindlich für meine Zwecke, und ich benützte daher anfangs eine von C. Benedicks konstruierte Meßbrücke[1]), die auf dem Prinzip der Nernst-Streintzschen Brücke[2]) beruht, aber wesentliche Verbesserungen aufweist. Die Brücke ist von Hrn. E. Herlin (l. c.) näher geprüft, in einigen Punkten verbessert und zu weiteren Messungen verwandt worden. Da die Beschreibung derselben sich nur in der schwer zugänglichen Dissertation von E. Herlin befindet, möge hier noch eine kurze Schilderung der

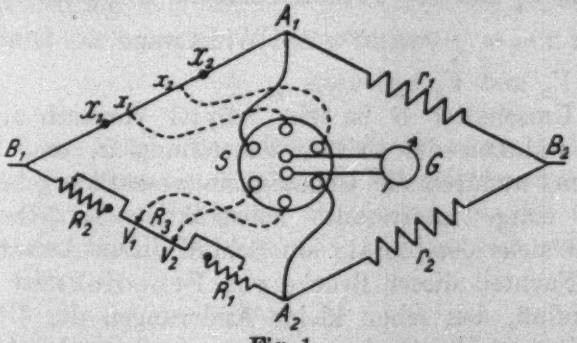


Fig. 1.

Methode folgen. Fig. 1 zeigt schematisch die Anordnung der Brücke von Benedicks. r_1 und r_2 sind zwei Widerstände in

1) E. Herlin, Methoden zur Bestimmung des elektrischen Widerstandes und der Thermokraft an Körpern von geringen Dimensionen. Dissertation, Upsala 1919.

2) F. Streintz, Ann. d. Phys. 3. S. 1. 1900.

den Zweigen $A_1 B_2$ und $A_2 B_2$. In dem Zweige $A_1 B_1$ ist der zu untersuchende Leiter eingeschaltet. X_1 und X_2 sind die Strom-, x_1 und x_2 die Potentialzuleitungen. $A_2 B_1$ ist ein variabler Widerstand, der aus drei Hauptteilen besteht: R_1, womit der totale Widerstand in $A_2 B_1$ verändert wird; R_2, der variiert werden kann ohne Veränderung des Gesamtwiderstandes im Zweige dadurch, daß bei dem Einschalten eines Widerstandes in R_2 ein gleich großer in R_1 ausgeschaltet wird, und endlich R_3, der aus einem Metalldraht mit zwei Gleitkontakten V_1 und V_2 besteht. Der Galvanometer G kann mittels des Umschalters S zwischen: 1. A_1 und A_2, 2. x_1 und V_1 und 3. x_2 und V_2 eingeschaltet werden.

Zuerst wird S in die Stellung 1 gestellt und R_1 variiert, bis der Galvanometer keinen Ausschlag gibt; dann haben A_1 und A_2 dasselbe Potential. Bezeichnet i_1 die Stärke des Stromes durch den zu untersuchenden Leiter, i_2 den Strom durch R_3, so wird

$$i_1 : i_2 = r_2 : r_1 .$$

Dann wird S in die Lage 2 gestellt und R_2 verändert, so daß x_1 und V_1 dasselbe Potential erhalten. Dabei wird, wie hervorgehoben, der Gesamtwiderstand des Zweiges $A_2 B_1$ nicht geändert, infolgedessen A_1 und A_2 dasselbe Potential behalten.

Schließlich wird S in die Lage 3 gebracht und V_2 verschoben, bis V_2 und x_2 dasselbe Potential haben. Dann ist $i_1 x = i_2 \omega$ und daher $x = \omega \frac{r_1}{r_2}$, wenn ω den Widerstand des Drahtstückes zwischen V_1 und V_2 bedeutet.

Am Umschalter S ist ein Stöpsel vorgesehen, welcher gestattet während der dritten Einstellung x_1 und V_1 kurzzuschließen, wodurch die Genauigkeit wesentlich erhöht wird.

Über einige interessante konstruktive Einzelheiten der Apparatur siehe den Zusatz am Schluß dieses Aufsatzes.

Ein Nachteil dieser Brücke von Benedicks ist aber der große Einfluß, den schon kleine Änderungen der Übergangs- und Zuleitungswiderstände an dem zu untersuchenden Leiter auf die Resultate ausüben, wodurch das Messen sehr erschwert und häufig ungenau, bei größeren Schwankungen der genannten Widerstände wohl auch unmöglich wird.

Indem ich mich bemühte, diesen Übelstand zu beseitigen und das Verfahren zu vereinfachen (namentlich auch den zwar sehr sinnreich konstruierten, aber teuren und komplizierten

Rheostaten R_1 R_2 R_3[1]) zu vermeiden), bin ich zu der im folgenden mitzuteilenden Methode gekommen. Diese Methode dürfte (bei großer Einfachheit in Anordnung und Handhabung) an Empfindlichkeit den sonst üblichen Methoden im Falle bedeutender und schwankender Kontaktwiderstände in den Zuleitungen überlegen sein.

2. Das Prinzip der neuen Methode besteht in folgendem: der zu messende Widerstand x und der Vergleichswiderstand ω sind mit den vier festen Widerständen r_1, r_2, R_1, R_2, die im Verhältnis

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}, \tag{1}$$

zueinander stehen, sowie mit dem veränderlichen Widerstand W so miteinander verbunden, wie das aus Fig. 2 zu ersehen ist. Die Enden von x sind ferner mit den entsprechenden Enden von ω durch zwei Leiter $S\,S$ und $S_1\,S_1$ verbunden, in deren einem der Galvanometer g, in dem anderen ein Unterbrecher A eingeschaltet sind. Der Widerstand W wird so abgeglichen, daß bei unterbrochener Leitung $S\,S$ der Galvanometer stromlos ist. Dann hat man

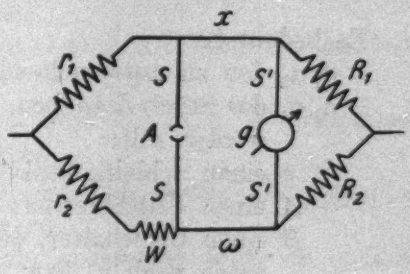


Fig. 2.

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}, \tag{2}$$

wo i_1 und i_2 die Stärke des Stromes durch x bzw. ω bedeutet. Nun wird A geschlossen und ω (durch Verschieben eines Schleifkontaktes auf einem Meßdraht) abgeändert, bis der Galvanometer stromlos wird. Dann muß $i_1 x = i_2 \omega$ sein, und wegen (2) erhält man:

$$x = \frac{R_1}{R_2}\,\omega.$$

Diese einfache Versuchsanordnung — gewissermaßen ein Kompensationsverfahren, aber mit nur einer Stromquelle und ohne Strommesser, bloß mit einem Galvanometer — verlangt wegen der Übergangswiderstände und der Widerstände der

1) Über die Konstruktion dieses Rheostaten siehe Zusatz am Schluß dieses Aufsatzes.

Stromzuleitungen eine leichte Modifikation, wobei man zu folgender endgültigen Anordnung gelangt (Fig. 3).

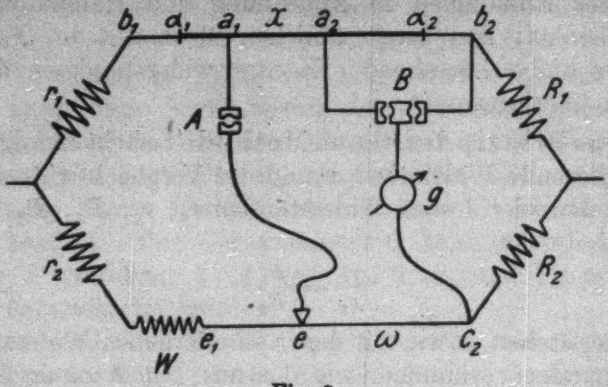


Fig. 3.

Es bedeutet

$a_1\,a_2$ den zu untersuchenden Leiter;

$a_1\,a_2$ das Stück desselben, dessen Widerstand x gemessen werden soll;

e einen Schleifkontakt auf dem Meßdraht $C_1\,C_2$;

A einen Unterbrecher;

B einen Umschalter, der gestattet den Galvanometerzweig nach a_2 bzw. b_2 umzuschalten.

Die übrigen Buchstaben haben dieselbe Bedeutung wie in Fig. 2. Die Widerstände r_1, r_2, R_1, R_2 stehen wieder im Verhältnis $r_1 : r_2 = R_1 : R_2$ zueinander.

Ferner sei der Widerstand des oberen Brückenzweiges zwischen b_1 und a_2 mit x_1, der des Stückes $a_2\,b_2$ mit x_2 bezeichnet.

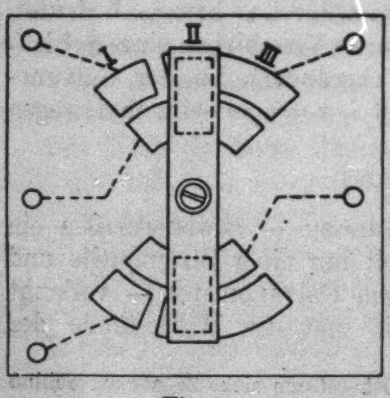


Fig. 4.

Bei der praktischen Ausführung ist es bequemer und zweckmäßiger, den Unterbrecher A und Umschalter B durch einen einzigen Umschalter von der in Fig. 4 angegebenen einfachen Form zu ersetzen. Ist die Kurbel dieses Umschalters auf I gestellt, so ist die Leitung bei A

(Fig. 3) unterbrochen, der Galvanometer auf b_2 geschaltet. Führt man die Kurbel auf II über, so wird dadurch der Galvanometer auf a_2 umgeschaltet. Endlich in der Lage III ist der Galvanometer wiederum auf a_2 geschaltet, aber die Leitung bei A geschlossen.

In der Fig. 3 sind bloß der Übersichtlichkeit wegen die Stöpsel A und B statt dieses Umschalters eingetragen.

Zur exakten Bestimmung des Widerstandes x werden folgende drei Bestimmungen ausgeführt:

I. Umschalter auf I gestellt (d. h. A geöffnet, Galvanometer auf b_2 geschaltet).

Wähle $W = w$ so, daß der Galvanometer stromlos wird.

II. Umschalter auf II gestellt (d. h. A geöffnet, Galvanometer auf a_2 umgeschaltet).

Wähle $W = w'$ so, daß der Galvanometer wiederum stromlos wird.

III. Umschalter auf III gestellt (d. h. A geschlossen, Galvanometer auf a_2 geschaltet).

Verschiebe Kontakt c auf dem Meßdraht, bis der Galvanometer stromlos wird.

Der auf der Meßdrahtskala abgelesene Wert sei ω Ohm. Dann ist der gesuchte Wert von x:

$$x = \omega \frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{w - w'}{R_2 + r_2}\right). \tag{3}$$

In weitaus den meisten Fällen hat man $R_2 = r_2$ und die Formel vereinfacht sich dann zu[1]):

---

1) Beweiß der Formel (3):

Da $r_1 : r_2 = R_1 : R_2$, so hat man nach der ersten Einstellung:

$$x_1 + x_2 = \frac{R_1}{R_2} w. \tag{α}$$

Anderseits hat man bei der zweiten Einstellung:

$$\frac{r_1 + x_1}{r_2 + w'} = \frac{R_1 + x_2}{R_2} = \frac{i_2}{i_1}. \tag{β}$$

Aus (α) und (β) folgt:

$$x_2 = \frac{R_1 (w - w')}{R_2 + r_2 + w}. \tag{γ}$$

Gemäß der dritten Einstellung ist aber

$$x = \omega \frac{i_2}{i_1},$$

$$x = \omega \frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{w - w'}{2 R_2}\right). \tag{4}$$

Das zweite Glied in der Klammer ist nur ein kleines Korrektionsglied. Bei allen gewöhnlichen Messungen, wo der Übergangswiderstand an den Stromzuleitungen gering ist, kann man dasselbe meist ganz vernachlässigen, da dann $\frac{w - w'}{2 R_2}$ oder (was dasselbe) $x_2/2 R_1$ sehr klein gegen 1 ist. Man braucht in solchen Fällen die Bestimmung I überhaupt nicht vorzunehmen, x berechnet sich einfach aus der Formel: $x = \omega \frac{R_1}{R_2}$. Aber auch bei größeren Übergangswiderständen wird das Korrektionsglied nur dann zu berücksichtigen sein, falls man in einem großen Verhältnis R_2/R_1 (etwa $= 100$) mißt. Jedenfalls braucht man den Wert von $w - w^1$ und daher auch die Einzelwerte w und w^1 immer nur angenähert (bis auf $^1/_{10}$ Ohm) zu kennen.[1])

Über die Genauigkeit der drei Einstellungen ist folgendes zu sagen:

Die Einstellung I braucht, wenn überhaupt, nur ganz roh ausgeführt zu werden (bis auf $^1/_{10}$ Ohm genau).

Einstellung II braucht bei kleineren Übergangswiderständen (etwa 0,05 Ohm) auch nur bis auf $^1/_{20}$ Ohm genau ausgeführt zu werden (falls man einen bis auf einige Promille genauen Wert für x erhalten will). Für größere Übergangswiderstände muß aber die Einstellung genauer erfolgen, bis auf $^1/_{100}$ Ohm, und bei exzessiv großen Übergangswiderständen (von der Größenordnung von einigen Ohm) sogar bis auf $^1/_{1000}$ Ohm genau. Näheres darüber in 5.

Einstellung III muß natürlich möglichst sorgfältig und genau gemacht werden, da sie direkt den Wert von ω liefert.

3. Die Apparatur.

Über die Apparatur ist bei der großen Einfachheit der ganzen Anordnung nicht viel zu sagen. Für die Widerstände r_1, r_2, R_1, R_2 benützt man am besten zwei Proportionalbüchsen

---

also zufolge (β) und (γ):

$$x = \omega \frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{w - w'}{R_2 + r_2 + w)}\right).$$

Nun ist w immer klein gegen $R_2 + r_2$ und kann daher im Nenner (da das zweite Glied in der Klammer schon an sich sehr klein gegen 1 ist) weggelassen werden.

1) Dabei ist R_2 etwa gleich 1000 Ohm vorausgesetzt.

mit Kurbelkontakten und mit 10, 100, 1000 Ohm auf jeder Seite. Der Widerstand W braucht nicht besonders genau zu sein. Man verwendet zweckmäßig einen Widerstandssatz (mit Kurbeln) aus drei Dekaden (Zehner, Einer und Zehntel Ohm), sowie einen kleinen kontinuierlich veränderlichen Schleifdrahtwiderstand (ohne Skala) von etwa 0,06 Ohm.

Um das Potentialgefälle auf dem Meßdraht möglichst klein zu machen, legt man zu einem mäßig dicken Manganindraht einen Nebenschluß, der aus einem Manganinblech von passend gewählten Widerstand besteht, das durch dicke und breite Kupferstreifen an den Draht angeschlossen ist. Da der Widerstand dieser Streifen gering gegen den des Manganinbleches ist, sind Temperaturänderungen nicht von Einfluß. In meinem Apparat ist der Meßdraht 70 cm lang, seine Dicke 1,75 mm, der Widerstand des Nebenschlusses so abgeglichen, daß der resultierende Gesamtwiderstand $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ Ohm beträgt. Eine Verschiebung des Schleifkontaktes um 1 mm entspricht somit einer Änderung des Widerstandes ω um $5 \cdot 10^{-6}$ Ohm.

Über den Umschalter ist schon früher das Nötige beigebracht.

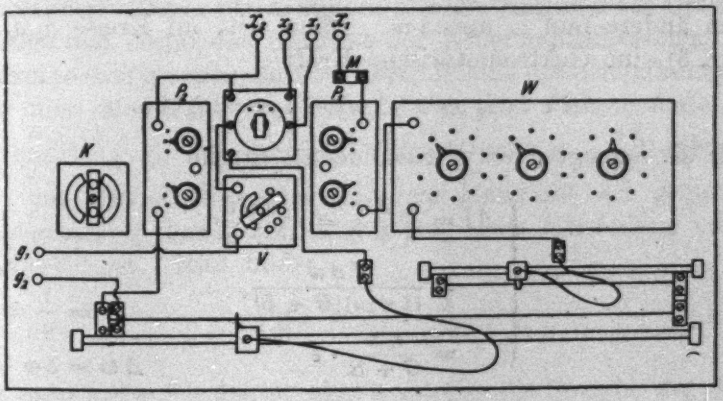


Fig. 5.

Die Gesamtanordnung meines Apparates ist aus Fig. 5 zu ersehen, die wohl keiner ausführlichen Erläuterung bedarf. P_1 und P_2 bedeuten die Proportionalbüchsen, S den Umschalter, V einen veränderlichen Vorschaltwiderstand zum Galvanometer, W den oben erwähnten Widerstand, K den Kommutator in der Hauptleitung. M ist ein kleiner Manganinwiderstand (etwa

0,2 Ohm). Er ist bloß zur Bequemlichkeit angebracht, um negative Werte der Größe

$$w' = \frac{R_2}{R_1}(x_1 - x_2)$$

zu vermeiden. Denn da der Widerstandssatz W im ganzen nur 111 Ohm umfaßt (während der Widerstand r_2 meistens 1000 Ohm beträgt), so wäre man sonst genötigt in Fällen, wo $x_1 < x_2$ zur Erziehung positiver w' die Verbindungen des zu untersuchenden Leiters mit den Klemmen x_1 und x_2 zu wechseln, was lästig ist. Der Widerstand M gibt nun x_1 immer ein Übergewicht über x_2, so daß die Differenz dieser beiden Größen und daher auch w' nicht negativ werden.

4. Über die Empfindlichkeit der Methode.

Die Betrachtungen hierüber gestalten sich ganz ähnlich wie bei der gewöhnlichen Kompensationsmethode.

Es möge ω den Wert des Vergleichswiderstandes bedeuten, bei welchem der Galvanometer stromlos ist, also:

$$i_1 x - i_2 \omega = 0 .$$

Man ändere nun ω um $\Delta\omega$. Dann tritt im Kreise $a_1 a_2 c_2 e$ (Fig. 3) eine elektromotorische Kraft

$$\Delta\varepsilon = i_2(\omega + \Delta\omega) - i_1 x = i_2 \Delta\omega$$

auf; sie erzeugt einen Strom, dessen Stärke

$$(5) \qquad \begin{cases} \Delta i = \dfrac{i_2 \Delta\omega}{G+S} = \dfrac{i_1 \alpha \Delta\omega}{G+S}, \\ \quad = \dfrac{J\Delta\omega}{(1+\alpha)(G+S)}, & \alpha = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{R_2}{R_1} \\ \quad = \dfrac{i_1 x}{G+S} \cdot \varepsilon & \Delta\omega = \varepsilon\omega \end{cases}$$

beträgt. Hier bedeutet G den Widerstand des Galvanometerzweiges $a_2 c_2$ (siehe Fig. 3) und S den Widerstand des anderen Zweiges $a_1 e$. Die Widerstände x und ω können ihrer Geringfügigkeit wegen unberücksichtigt bleiben. J ist die Stromstärke in der Hauptleitung.

Entspricht $\Delta\omega$ einer Verschiebung des Schleifkontaktes auf dem Meßdraht um 1 mm, so stellt Δi den dadurch hervorgerufenen Strom im Galvanometer dar.

5. Der durch ungenaue Einstellung von w' hervorgerufene Fehler.

Das ist ein Punkt, der besondere Beachtung verdient. Ist w' um Δw ungenau eingestellt, so fließt durch die Gesamtheit der beiden Brücken $a_1 e$ und $a_2 c_2$ (vgl. Fig. 3) ein Strom wie in einer einfachen Wheatstoneschen Brücke, wenn in derselben der Widerstand r_2 einen um Δw falschen Wert besitzt. Die Stärke dieses Stromes ist:

$$\Delta i_0 = \frac{J \Delta w}{(1+a) N},$$

wo

$$N = r_1 + r_2 + G\left(1 + \frac{r_1}{R_1}\right).$$

Von diesem Gesamtstrom wird durch den Galvanometer der Bruchteil

$$\Delta i_g = \frac{S}{S+G} \cdot \Delta i_0 = \frac{J \cdot S \cdot \Delta w}{(1+a)(S+G) N}$$

abgezweigt. Dieser Strom fälscht also die Angaben des Galvanometers und damit das Resultat der Widerstandsmessung. Wir haben soeben gesehen, daß bei Verschiebung des Schleifkontaktes auf dem Meßdraht um 1 mm durch den Galvanometer ein Strom Δi (vgl. (5)) geht. Der Quotient $\Delta n = \frac{\Delta i_g}{\Delta i}$ gibt also an, um wieviel Millimeter auf dem Meßdraht der gemessene Widerstand x durch die um Δw ungenaue Einstellung von w' verfälscht ist. Man findet:

$$\Delta n = \frac{\Delta w}{\Delta \omega} \cdot \frac{S}{N}. \tag{6}$$

Ist $\omega = n \Delta \omega$, bedeutet also $n = \frac{\omega}{\Delta \omega}$ die Anzahl der Millimeter auf dem Meßdraht, die dem Widerstand ω entspricht, so wird der relative (prozentuale) Fehler:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta w}{\omega} \cdot \frac{S}{N}. \tag{7}$$

Stellt man sich vor, daß die Ungenauigkeit Δw durch eine Veränderung $\Delta \xi$ der Kontakt- und Zuleitungswiderstände an dem zu messenden Widerstand nach der Einstellung II hervor-

gerufen ist, so wird man den Ausdruck (7) zweckmäßig auf die Form bringen:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta \xi}{x} \cdot \frac{S}{N} \cdot \tag{8}$$

Da in diesen Ausdrücken die Größe S im Zähler nicht unter einen gewissen Wert (der hauptsächlich von dem Übergangswiderstand in der Potentialzuleitung $a_1 e$ herrührt) herabgebracht werden kann, so läßt sich bei gegebenen $\Delta \xi$ der relative Fehler $\Delta n/n$ nur dadurch hinreichend klein machen, daß man N entsprechend groß macht. Man wird also den Widerstand r_2 (und entsprechend r_1) möglichst groß wählen, um die ganze Anordnung zu stabilisieren, etwa 1000 Ohm, was wohl in fast allen Fällen hinreichen dürfte. Um dabei mit nicht allzu schwachen Strömen arbeiten zu müssen, wird man die Spannung in der Hauptleitung entsprechend etwas höher nehmen (ich arbeite meist mit 24 Volt, was unter allen Umständen ausreicht). Man sieht jetzt, daß die Widerstände r_1 und r_2 von der allergrößten Bedeutung in dieser Anordnung sind. Die große Sicherheit, Genauigkeit und Bequemlichkeit der Methode ist wesentlich durch dieselben bedingt.

Aus Formel (7) erkennt man ferner, daß die Einstellung II mit um so größerer Genauigkeit zu erfolgen hat, je größer S ist, d. h. je größer die Kontaktwiderstände an den Potentialzuleitungen sind. Darüber war schon am Ende des § 2 das Nötige beigebracht.

6. Vergleich der neuen Methode in bezug auf Empfindlichkeit mit der Differentialmethode und der Thomsonbrücke.

Um diesen Vergleich vornehmen zu können, wollen wir den Ausdruck (5) für die Empfindlichkeit noch auf eine andere Form bringen. Wir schreiben:

$$G = n\,x\,,$$
$$S = m\,x\,,$$

dann wird (5):

$$\Delta i = \frac{i_1 e}{n + m} \cdot$$

Der Ausschlag des Galvanometers wird bei gegebener Schwingungsdauer):

$$(9) \qquad \begin{cases} C = \dfrac{K\sqrt{n}}{n+m}, \\ K = c_0 \cdot i_1 \cdot \sqrt{x} \cdot \varepsilon, \end{cases}$$

wo C_0 den Ausschlag des Galvanometers bei 1 Ohm Widerstand und für 1 Mikroampere bedeutet.

Für die Differentialmethode findet man analog:

$$(10) \qquad C' = \frac{K\sqrt{n}}{\sqrt{2}(n+m')},$$

wo wieder $n\,x$ den Galvanometerwiderstand und $m'\,x$ den übrigen Widerstand des Stromkreises bedeutet (vgl. W. Jäger, Elektrische Meßtechnik S. 336).

Für die Thomsonbrücke (in günstigster Galvanometerschaltung) bekommt man:

$$(11) \qquad C'' = \frac{K}{2\sqrt{1+\alpha}\sqrt{2\,m''}}.$$

Hier ist m'' das Verhältnis des Verzweigungswiderstandes oder des Überbrückungswiderstandes (wir nehmen sie als gleich an) zu x.

Diese drei Ausdrücke (9), (10) und (11) wollen wir noch etwas vereinfachen. Zunächst bemerken wir, daß die m hauptsächlich durch die Übergangswiderstände an den Potentialzuleitungen bedingt sind. Ist dieser Widerstand $\frac{\gamma}{2}\,x$, so können wir setzen:

$$m = \gamma; \qquad n + m' = \varkappa\gamma; \qquad m'' = \frac{\varkappa\gamma}{2}.$$

Berücksichtigen wir, daß $\varkappa$ immer sehr groß gegen 1 sein muß (soll die Genauigkeit der Messung $^1/_2\,\%$ betragen, so darf $\varkappa$ kaum weniger als 400 sein), und daß man bei der Differentialmethode immer suchen wird m^1 klein gegen n zu machen, so erhalten wir:

$$C = \frac{K\sqrt{n}}{n+\gamma}; \qquad C' = \frac{K}{\sqrt{2\varkappa\gamma}}; \qquad C'' = \frac{K}{2\sqrt{1+\alpha}\sqrt{\varkappa\gamma}}.$$

Es ist somit:

$$\frac{C'}{C''} = \sqrt{2}\sqrt{1+\alpha} = 1{,}414\sqrt{1+\alpha},$$

also zwischen 1,414 und 2, da $2 \leqq \alpha \leqq 1$.

Es erübrigt somit nur noch, C und C' miteinander zu vergleichen. Zunächst ist:

$$\frac{C}{C'} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{2\varkappa\gamma}}{n+\gamma}.$$

Dieses Verhältnis wird am größten für $n = \gamma$, nämlich gleich $\frac{\sqrt{2\varkappa}}{2}$. Soll z. B. das Resultat der Messung bis auf $^1/_2\,^0/_0$ genau sein, so wird:

$$\frac{C}{C'} = \frac{\sqrt{800}}{2} = 14{,}14.$$

Dieser Fall kann realisiert werden für relativ große Übergangswiderstände, z. B. 0,7 Ohm. Dann muß der Galvanometer einen Widerstand von 1,4 Ohm haben.

Ist dagegen der Übergangswiderstand etwa 0,08 Ohm und G wieder 1,44 Ohm, so wird:

$$n = G\gamma$$

und

$$\frac{C}{C'} = \frac{3\sqrt{2\varkappa}}{2},$$

also für $\varkappa = 400$:

$$\frac{C}{C'} = 6\sqrt{2} = 8{,}48.$$

Man ersieht hieraus, daß für den Fall merklicher Übergangswiderstände die angegebene Methode in bezug auf Empfindlichkeit den beiden anderen Methoden überlegen ist.

Erwähnen möchte ich noch, daß Hr. O. Gallander[1]) zum Messen kleiner Widerstände bei größeren Kontaktwiderständen in den Zuleitungen ein Kompensationsverfahren angewendet hat, das ebenfalls gute Resultate ergab. Da hierbei aber zwei verschiedene Stromquellen benutzt werden, und außer dem Galvanometer noch zwei empfindliche Amperemeter (wobei alle drei Apparate ungefähr gleichzeitig abzulesen sind), so ist die Handhabung dieser Methode wohl nicht ganz einfach und bequem.

---

1) O. Gallander, Mitteil. des int. Verbandes für die Materialprüfung der Technik 1912. Bd. II. Nr. 11, IX.

Zusatz.

Über die Meßbrücke von C. Benedicks.

Die in der Einleitung erwähnte Brücke von Benedicks enthält einige interessante konstruktive Einzelheiten, die es an und für sich wohl verdienen, allgemeiner bekannt zu werden. Ich erlaube mir daher, das Hauptsächlichste über die Apparatur hier mitzuteilen.

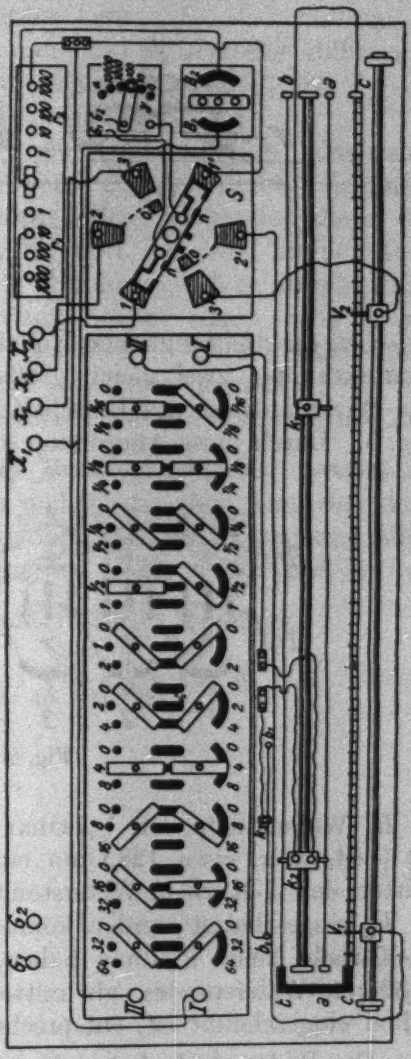


Fig. 6.

Die in die Brücke eingehenden Widerstände und Kommutatoren sind auf einem Brett montiert, das in Fig. 6 wiedergegeben ist. Es befinden sich auf dem Brette: 1. der Kommutator $B_1 B_2$ der Hauptleitung; 2. die Widerstände r_1 und r_2 (Proportionalbüchse); 3. der Vorschaltwiderstand V des Galvanometers; 4. der Umschalter S; 5. ein Kurbelrheostat I—II und vier mit Gleitkontakten versehene Metalldrähte, welche zusammen den Widerständen R_1, R_2 und R_3 der Fig. 1 entsprechen. Der nach dem Rapsschen Prinzip konstruierte Kurbelrheostat hat zwei Reihen von Doppelkurbeln (I und II) mit 10 Kurbeln in jeder Reihe. Jede Kurbel der I-Reihe ist mit der gegenüberstehenden der II-Reihe zu einer Gruppe zusammengefaßt. Die Kurbeln schleifen über drei Reihen von Messingkontakten. In der Mitte hat jede Gruppe drei längliche, für beide Kurbeln

gemeinsame Kontakte, ganz vorne eine Kontaktschiene für die I-Kurbel und zu hinderst drei Kontaktknöpfe für die II-Kurbeln. Um einen federnden Druck gegen die Kontakte zu erzielen, liegen zwischen dem Holzgriff und den Messingkontakten jeder Kurbel kleine Filzscheiben (Fig. 7, F). In jeder Gruppe sind

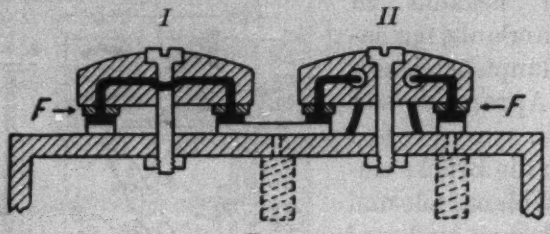


Fig. 7.

zwischen die drei länglichen Kontakte und ebenso zwischen die Kontaktknöpfe zwei gleich große Widerstände eingeschaltet. Die Wirkungsweise des Umschalters erhellt am besten aus der Fig. 8. Durch diese Anordnung können mittels der I-Kurbeln

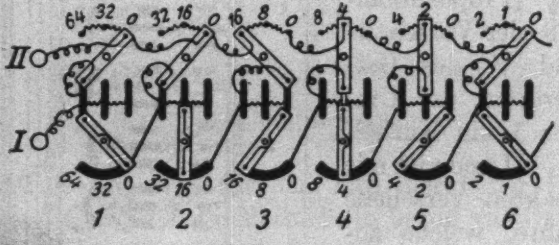


Fig. 8.

in R_1 Widerstände von $^1/_{16}$ Ohm bis $^1/_{16} + ^1/_8 + ^1/_4 + \ldots + 32 + 64$, d. h. etwa 128 Ohm eingeschaltet werden, während mittels der II-Kurbeln Widerstände in R_1 aus- und gleichzeitig in R_2 eingeschaltet werden können. Dabei dürfen jedoch die II-Kurbeln keine Stellung haben, die dem Ausschalten eines größeren Widerstandes, als mittels der zugehörigen I-Kurbel schon eingeschaltet ist, entsprechen.

Die Widerstände I und II in dem Kurbelrheostat werden von den zwei Schleifdrähten *a* und *b* aus Manganin fortgesetzt. Mittels des an a gleitenden Kontaktes K_1 wird die Feineinstellung von R_1 gemacht, und der doppelte Gleitkontakt R_2 be-

wirkt an b die Feineinstellung von R_2 unter gleichzeitigem Ausschalten einer gleich großen Strecke von a.

b_1 ist ein Kupferdraht mit einem Gleitkontakt R_3, womit die letzte Feineinstellung in R_2 ausgeführt werden kann, was zwar eine Veränderung des Gesamtwiderstandes hervorruft, die jedoch vernachlässigt werden kann.

Der Kupferdraht C (2 mm dick) ist über eine Millimeterskala ausgespannt und mit zwei Gleitkontakten V_1 und V_2 versehen. Hier wird der Wert R_3 abgelesen.

Der Umschalter S ist mit großer Sorgfalt konstruiert und ausgeführt. Die Kontaktklötze 2 und 2′ sind mit je einem von zwei kleinen Kontaktklötzen leitend verbunden, die in der dritten Lage der Kurbel in Kontakt mit zwei an derselben befindlichen Kontaktfedern n kommen, welche durch einen Stöpsel kurzgeschlossen werden können, somit einen Kurzschluß zwischen V_1 und x_1 bewirkend. Dieser Kurzschluß sollte immer angewandt werden, da ohne demselben, wie ich mich überzeugt habe, ein genaueres Messen kaum möglich ist.

Vorliegende Arbeit ist im Metallographischen Institut in Stockholm ausgeführt worden und ich bin dem Vorsteher desselben, Hrn. Prof. C. Benedicks, für die Überlassung aller Hilfsmittel des Instituts zu großem Dank verpflichtet.

Stockholm, Metallograph. Institut, Mai 1922.

(Eingegangen 29. Mai 1922.)

3. *Über die durch ein aktives Raumgitter erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen;*

von Karl F. Lindman.

Durch eine experimentelle Untersuchung[1]) habe ich früher nachgewiesen, daß wenn planpolarisierte Hertzsche Wellen durch ein isotropes System von spiralförmigen elektrischen Resonatoren hindurchgehen, die Polarisationsebene der Wellen eine Drehung erfahren, die nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ mit den Forderungen der von Drude entwickelten elektrodynamischen Theorie der Photogyration übereinstimmt. Es zeigte sich demnach, daß ein von einer großen Anzahl gleicher, linksgewundener und im Raume regellos verschieden gerichteter Resonatoren bestehendes dreidimensionales Gitter die Polarisationsebene der durch das System hindurchgehenden Wellen nach links oder nach rechts (für ein entgegen der Fortpflanzungsrichtung der Wellen blickendes Auge) drehte, je nachdem die Länge (λ) der Wellen größer oder kleiner als die den Eigenschwingungen der Resonatoren entsprechende Wellenlänge (λ_0) war. Ein aus rechtsgewundenen Resonatoren bestehendes System verhielt sich in dieser Beziehung umgekehrt. Für Wellenlängen, die sich von λ_0 wesentlich unterschieden, befolgte der Drehungswinkel φ die aus der Drudeschen Theorie folgende Formel

$$\varphi = \frac{k_0}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \tag{1}$$

wo k_0 eine Konstante ist. Falls λ_0^2 gegen λ_2^2 vernachlässigt werden kann, so ist also φ dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional (optisches Gesetz von Biot). Wenn λ von λ_0 nur wenig abwich oder $= \lambda_0$ war, so waren die aus dem Gitter heraustretenden Wellen deutlich elliptisch polarisiert,

1) Karl F. Lindman, Öfversigt af Finska Vet. Soc. Förh. LXII. A. 3. 1914. — Ann. d. Phys. 63. S. 621. 1920.

wobei der von der großen Achse der Schwingungsellipse mit der Schwingungsebene der einfallenden Wellen gebildete Winkel sein Vorzeichen wechselte, wenn λ den Wert λ_0 passierte. Weil die genannte Theorie — insofern sie von Drude entwickelt worden ist — voraussetzt, daß die Absorption vernachlässigt werden kann, in welchem Falle λ mit λ_0 nicht zu nahe übereinstimmen darf, fällt das zuletzt erwähnte Ergebnis außerhalb der Grenzzeichen dieser Theorie, was ich auch in meinen oben zitierten Aufsätzen hervorgehoben habe. Daß die aus einer aktiven Schicht heraustretende Wellenbewegung im allgemeinen elliptisch polarisiert sein muß, falls die Absorption nicht vernachlässigt werden kann, ist aus allgemein theoretischen Gründen schon längst bekannt und wird auch durch gewisse von Cotton[1]) gemachte Beobachtungen über die Photogyration bei gewissen Lösungen bestätigt. Wenn die Absorption verhältnismäßig gering ist, hat die größere Achse der Schwingungsellipse dieselbe Stellung wie die lineare Schwingungsbahn beim Nichtvorhandensein der Absorption.[2]) Bei meinen Versuchen waren die aus dem Resonatorengitter heraustretenden Wellen stets etwas elliptisch polarisiert, obwohl diese Elliptizität mit zunehmendem Unterschiede zwischen λ und λ_0 schnell abnahm.

2. Durch eine briefliche Mitteilung hat Dr. Felix Stumpf in Berlin mich darauf aufmerksam gemacht, daß die Ergebnisse meiner Versuche sogar bedeutend besser als ich durch Vergleich mit der Formel (1) zuerst fand, dem entsprechen, was man in dem vorliegenden Falle theoretisch erwarten kann. Wenn man nämlich, von der Drudeschen Theorie ausgehend, in den Differentialgleichungen der Elektronenbewegung die Dämpfung der Schwingungen der Elektronen berücksichtigt, so gelangt man zu der folgenden, zuerst von Natanson abgeleiteten Formel für die von einer aktiven Schicht (von der Dicke 1) erzeugten Drehung (φ) der Polarisationsebene (bzw. der größeren Achse der Schwingungsellipse):

$$\varphi = \frac{K \cdot \nu^2 (\nu_0^2 - \nu^2)}{k\{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \nu_r^2\}}. \tag{2}$$

In dieser Formel bezeichnen K und k zwei Konstanten, ν die Schwingungsfrequenz der einfallenden Wellen, ν_0 die Eigen-

1) A. Cotton, Comptes rend. 120. S. 989 u. 1044. 1895.
2) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. S. 34. 1908.

schwingungsfrequenz der aktiven Elektronen und ν_r die Dämpfungskonstante, die auch die Dimension einer Frequenz hat. In einem von ihm verfaßten Bericht über neuere Forschungen über Doppelbrechung und optische Aktivität, wo auch die Formel (2) abgeleitet wird, charakterisiert Stumpf[1]) die durch (2) ausgedrückte Drehung folgendermaßen. „Aus (2) sieht man, daß beim Fortschreiten in der Skala der Frequenzen die Drehung im Absorptionsstreifen $\nu = \nu_0$ ihr Vorzeichen umkehrt und dem Betrage nach dort sehr stark anwächst. Ihr Unendlichwerden wird jedoch durch die Dämpfung verhindert, die Drehung geht von großen positiven zu negativen Werten dadurch über, daß sie bei $\nu = \nu_0$ gleich Null wird, was sich jedoch wegen der dort herrschenden Absorption der Beobachtung entziehen kann. Die Drehung hat auf jeder Seite vom Absorptionsstreifen einen Extremwert, wobei derjenige auf der Seite der größeren Frequenzen der größere ist." Dies deckt sich in der Tat wörtlich mit den Ergebnissen meiner oben erwähnten Versuche und entspricht auch nach Stumpf gewissen neueren optischen Beobachtungen. Die Unsymmetrie in der Größe der Drehung links und rechts von dem Absorptionsstreifen $\nu = \nu_0$ (wo $\varphi = 0$ ist) wird durch das Vorkommen des Faktors ν^2 im Zähler des Ausdruckes für φ bedingt. In seinem oben genannten Briefe bemerkt Dr. Stumpf, daß die von mir beobachtete Unsymmetrie hierdurch jedoch nicht ihre volle Erklärung zu finden scheint und daß es wünschenswert wäre, die Genauigkeit der Beobachtungen so weit zu steigern, daß sich über die Gültigkeit der Formel (2) ein Urteil gewinnen ließe. In dem vorliegenden Aufsatze werde ich über einige neue Versuche berichten, welche in der Tat zu einer quantitativen Bestätigung der Formel (2) geführt haben.

3. Um bei der Prüfung der Formel (2) die bei den Versuchen vorkommenden Wellenlängen direkt brauchen zu können, ist es zweckmäßig, diese Formel in eine andere Form zu bringen, indem man die Frequenzen ν, ν_0 und ν_r durch die entsprechenden, ihnen umgekehrt proportionalen Wellenlängen λ, λ_0 und λ_r ersetzt. Die Formel (2) geht dann über in die folgende:

$$\varphi = \frac{K \cdot \lambda_0^3 \lambda_r^2 (\lambda^2 - \lambda_0^2)}{\{k (\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 \lambda_r^2 + \lambda_0^4 \lambda^2\}} . \tag{2a}$$

1) Felix Stumpf, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 15. S. 49. 1918.

Wenn λ nicht allzu nahe mit λ_0 übereinstimmt und außerdem λ_r genügend groß ist, was damit gleichbedeutend ist, daß die Dämpfungskonstante ν_r genügend klein ist, so kann das zweite Glied des Nenners gegen das erste vernachlässigt werden. Die Formel geht dann in (1) über.

Wenn man für einen gegebenen Wert von λ_0 (= der Eigenwellenlänge der spiralförmigen Gitterelemente) die Werte φ_1 und φ_2 des Drehungswinkels φ durch Beobachtung bestimmt, die zwei Wellenlängen λ_1 und λ_2 in der Nähe von λ_0 entsprechen, so kann man mit Hilfe der Formel (2a) den Wert von λ_r^2 (bzw. λ_r) berechnen. Durch Division von φ_1 mit φ_2 erhält man nämlich zuerst:

$$(3) \qquad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_0^2}{\lambda_2^2 - \lambda_0^2} \times \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_0^2)^2 \lambda_r^2 + \lambda_0^4 \lambda_2^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_0^2)^2 \lambda_r^2 + \lambda_0^4 \lambda_1^2},$$

woraus sich ergibt:

$$(4) \qquad \lambda_r^2 = \frac{\lambda_0^4 \left\{ (\lambda_2^2 - \lambda_0^2)\lambda^2 \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_2} - (\lambda_1^2 - \lambda_0^2)\lambda_2^2 \right\}}{(\lambda_1^2 - \lambda_0^2)(\lambda_2^2 - \lambda_0^2) \left\{ \lambda_2^2 - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \lambda_1^2 - \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - 1 \right) \lambda_0^2 \right\}}.$$

Wenn es sich zeigt, daß die Werte von λ_r, die man mit Benutzung verschiedener Wertepaare λ_1, φ_1 und λ_2, φ_2 erhält, innerhalb der Fehlergrenzen miteinander übereinstimmen, so bedeutet dies eine Bestätigung der Formel (2a) bzw. (2). Wenn λ_r bekannt ist (und einen konstanten Wert hat), so kann man mit Hilfe der aus (3) folgenden Formel

$$(5) \qquad \varphi = \varphi_a \times \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda_a^2 - \lambda_0^2} \times \frac{(\lambda_a^2 - \lambda_0)^2 \lambda_r^2 + \lambda_0^4 \lambda_a^2}{(\lambda^2 - \lambda_r^2)^2 \lambda_r^2 + \lambda_0^4 \lambda^2},$$

die einer beliebigen Wellenlänge λ entsprechende Drehung φ berechnen, falls man den Drehungswinkel φ_a für eine andere Wellenlänge λ_a beobachtet hat. — Anstatt der ganzen Wellenlängen kann man auch ohne weiteres in diese Formeln die entsprechenden halben Wellenlängen einführen, mit denen man bei Versuchen mit elektrischen Wellen gewöhnlich operiert.

4. Zuerst werden wir untersuchen, inwieweit meine früheren Beobachtungen der Formel (2a) quantitativ entsprechen.

Die halbe Eigenwellenlänge ($^1/_2 \lambda_0$) der spiralförmigen Gitterelemente war bei diesen Versuchen = 9,6 cm. Als das Raumgitter (M) aus 300 linksgewundenen Spiralen bestand, ergaben sich für verschieden lange einfallende Wellen die in der

folgenden Tabelle angeführten Werte des Drehungswinkels φ, wobei dieser als positiv gerechnet worden ist, wenn die Drehung für ein entgegen der Fortpflanzungsrichtung der Wellen blickendes Auge nach links geschah.

Halbe Wellenlänge $\lambda/2$	Die von M erzeugte Drehung		
	Beob. Wert	Aus Formel (1) berechn. Wert	Aus Formel (5) berechn. Wert ($^1/_2 \lambda_r = 33{,}7$ cm)
17,1 cm	+ 5°	+ 4,2°	+ 4,9°
13,0 „	+11°	—	—
11,4 „	+12°	(+22,3°)	+16,2°
10,0 „	+10°	(+108°)	—
9,6 „ $= {}^1/_2 \lambda_0$	0°	($\pm\infty$)	0°
9,0 „	−10°	(−75°)	−15,8°
7,7 „	−25°	−25,7°	−22,2°
6,1 „	−14 u. −15°	−15,4°	−17,1°

Beim Berechnen der in der vorletzten Kolumne vorkommenden Werte von φ nach der Formel (1) hat in jedem Falle der am genauesten beobachtete Wert $\varphi = 11°$ für $^1/_2 \lambda = 13$ cm als Ausgangswert gedient. Es geht aus der Tabelle hervor, daß für $^1/_2 \lambda > 13$ cm und $^1/_2 \lambda \leqq 7{,}7$ cm die beobachteten Werte des Drehungswinkels mit den nach der Formel (1) berechneten sogar recht gut übereinstimmen.[1])

Die Kurve I in Fig. 1 stellt φ als Funktion der beobachteten Werte von $^1/_2 \lambda$ graphisch dar. Qualitativ entspricht diese Kurve vollständig demjenigen Verlauf der Veränderung des Drehungswinkels, der nach der allgemeinen Formel (2) oder (2a) in der Umgebung von $^1/_2 \lambda_0$ erwartet werden kann (vgl.

1) Die in Parenthesen beiläufig angegebenen Werte von φ, die nach (1) für Werte von $^1/_2 \lambda$ in der Umgebung von $^1/_2 \lambda_0$ berechnet worden sind, sind hier — wie auch in meinen früheren Aufsätzen — nur deshalb angeführt, damit man die Gültigkeitsgrenzen der genannten Formel feststellen könne, welches auch in meinen früheren Aufsätzen ausdrücklich hervorgehoben worden ist. Merkwürdigerweise stellt Dr. Stumpf in seinem in den Physikal. Berichten 2. S. 163. 1921 veröffentlichten Referate von diesen Versuchen die Sache so dar, als ob ich in der Abweichung der genannten Werte von den beobachteten — speziell in dem Verschwinden der Drehung für $\lambda = \lambda_0$ — einen Widerspruch mit der Formel (1) erblickt hätte. Daß dies nicht der Fall war, wurde im Gegenteil von mir an mehreren Stellen betont.

oben S. 272). Die Kurve ist indessen in solchem Grade unsymmetrisch, daß man fragen kann, ob nicht speziell der für $^1/_2\,\lambda = 11{,}4$ cm gefundene Wert von φ etwas zu klein ist (die scharfe Biegung in der Nähe von $^1/_2\,\lambda = 10$ cm scheint etwas unwahrscheinlich zu sein). Um die entsprechende theoretische Kurve mit Hilfe der Formel (5) konstruieren zu können, muß man zuerst die Größe $^1/_2\,\lambda_r$ nach der Formel (4) berechnen. Mit Hilfe der beobachteten Werte $^1/_2\,\lambda_0 = 9{,}6$ cm, $^1/_2\,\lambda_1 = 13{,}0$ cm, $^1/_2\lambda_2 = 10{,}0$ cm, $\varphi_1 = 11^0$ und $\varphi_2 = 10^0$ erhält man aus der zuletzt

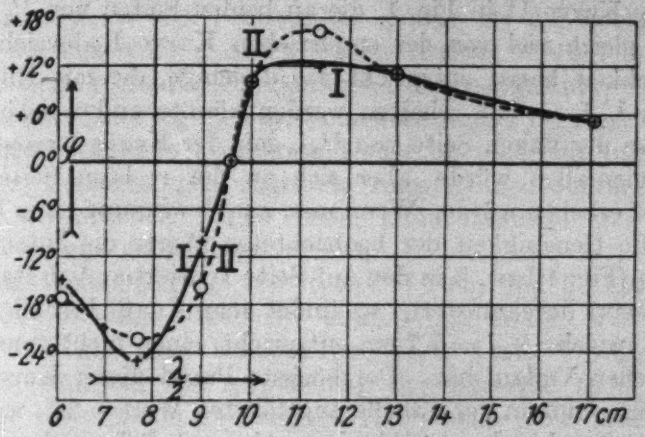


Fig. 1.

erwähnten Formel $(^1/_2\lambda_r)^2 = 1145$ oder $^1/_2\lambda_r = 33{,}7$ cm. Für $\varphi_a = 11^0$, $^1/_2\,\lambda_a = 13$ cm und $^1/_2\lambda_r = 33{,}7$ cm gibt die Formel (5) die in der letzten Kolumne der obigen Tabelle angeführten Werte des Drehungswinkels φ. Die aus ihnen erhaltene theoretische Kurve II in Fig. 1 hat in der Tat einen symmetrischeren Verlauf als die Kurve I. Während demnach die beobachtete Drehung für $^1/_2\lambda = 11{,}4$ cm etwas zu klein ist, scheint sie für $^1/_2\lambda = 7{,}7$ cm etwas zu groß (absolut genommen) zu sein. Wenn man bei der Berechnung von $^1/_2\lambda_r$ die Werte $^1/_2\lambda_1 = 13{,}0$ cm, $^1/_2\lambda_2 = 7{,}7$ cm, $\varphi_1 = 11^0$ und $\varphi_2 = -25^0$ benutzt, so findet man $^1/_2\,\lambda_r = 86{,}8$ cm, also einen wesentlich größeren Wert als den vorher erhaltenen, woraus hervorgeht, daß die Beobachtungen keinen konstanten Wert für die betreffende Größe ergeben. Der zuletzt erhaltene Wert von $^1/_2\lambda_r$ gibt für die Drehung, welche $^1/_2\lambda = 11{,}4$ cm entspricht, den Wert $20{,}9^0$, dessen Abweichung von dem beobachteten Werte (12^0)

sehr groß ist. Bei der Berechnung von $^1/_2\lambda_r$ zeigt es sich indessen, daß ein Fehler in dem für die Berechnung benutzten Werte von φ_2 sich viel stärker geltend macht, wenn der entsprechende Wert $^1/_2\lambda_2$ von $^1/_2\lambda_0$ wesentlich abweicht, als wenn er sich nur verhältnismäßig wenig von diesem Werte unterscheidet. Der zuerst ermittelte Wert von $^1/_2\lambda_r$ (= 33,7) muß also als wesentlich richtiger betrachtet werden wie der später erhaltene Wert (86,8), vorausgesetzt, daß die betreffende Größe überhaupt einen konstanten Wert hat. Es ist auch sehr wahrscheinlich, daß die Kurve II in Fig. 1, die an beiden Seiten von $^1/_2\lambda_0$ ungefähr gleich viel von der empirischen Kurve I abweicht, der Wirklichkeit besser entspricht wie diejenige, die mit Hilfe des Wertes $^1/_2\lambda_r = 86{,}8$ erhalten werden könnte und welche allerdings an der linken Seite von $^1/_2\lambda_0$ mit der Kurve I recht nahe zusammenfallen würde aber sich an der rechten Seite hoch darüber erheben würde. Wenn man zur Gewinnung eines Urteils über die Genauigkeit der beobachteten Werte die Intensitätskurven (Fig. 4 bzw. 3 in den auf Seite 1 zitierten Aufsätzen des Verfassers) durchmustert, so findet man, daß besonders die Kurve, welche $^1/_2\lambda = 7{,}7$ cm entspricht, einen nicht ganz symmetrischen Verlauf hat. Der höchste Punkt dieser Kurve gibt zwar für φ den in der Tabelle angeführten Wert -25^0, wogegen die Mittelpunkte der zur Abszissenachse parallelen Sehnen einer sogar mehrere Grade kleineren Drehung entsprechen. Beim Übergang zu dem tiefsten Punkte zeigt diese Kurve an einer Stelle eine etwas unregelmäßige Krümmung und könnte vielleicht hier etwas mehr symmetrisch aufgetragen werden, welches eine gewisse Verschiebung des Minimipunktes nach links bewirken würde, die auch einer Verkleinerung des Drehungswinkels φ entspräche. Die in der Nähe von $^1/_2\lambda = 7{,}7$ cm vorkommende Abweichung der Kurve I in Fig. 1 von der Kurve II scheint also beinahe vollständig durch Versuchsfelder erklärt werden zu können (wahrscheinlich eine geringe Unsymmetrie in der Versuchsanordnung). Wenn man — unter Beibehaltung von $^1/_2\lambda_1 = 13$ cm, $\varphi_1 = 11$ cm und $^1/_2\lambda_2 = 7{,}7$ cm — den Winkel $\varphi_2 = -22^0$ setzt, welches nach dem soeben Gesagten mit den Beobachtungen, die der Bestimmung von φ_2 zugrunde liegen, nicht ganz unverträglich scheint, so erhält man $^1/_2\lambda_r = 32$ cm, also einen Wert, der mit dem zuerst ermittelten Werte 33,7 cm sehr nahe übereinstimmt.

Für $^1/_2\lambda = 9$ cm ist die berechnete Drehung ($-15{,}8^0$) nicht weniger als $5{,}8^0$ größer (absolut genommen) wie die beobachtete (etwa -10^0). Die Intensitätskurve, aus welcher der zuletzt genannte Wert erhalten worden ist, ist auch nicht ganz symmetrisch und würde mit einer höchstens 1 oder 2^0 größeren (negativen) Drehung verträglich sein. Die Abweichung des berechneten Wertes von dem beobachteten scheint demnach in diesem Falle größer zu sein als was die zufälligen Beobachtungsfehler erlauben. Für $^1/_2\lambda = 11{,}4$ cm ist ebenso der berechnete Wert von φ ($= 16{,}2^0$) wesentlich größer als der beobachtete (12^0), der aus einer ziemlich symmetrischen, obwohl in ihrem oberen Teile recht flach verlaufenden Intensitätskurve erhalten worden ist. Die Frage, ob systematische Fehler bei diesen Beobachtungen begangen worden sind oder ob vielleicht irgendeine der den Berechnungen zugrunde gelegten Beobachtungen an einem wesentlichen Fehler leide, kann nunmehr nur durch neue Versuche entschieden werden.

Was schließlich die für $^1/_2\lambda = 17{,}1$ cm und 6,1 cm beobachteten Drehungen betrifft, stimmt die erstere von ihnen ($\varphi = +5^0$) mit dem berechneten Werte ($+4{,}9^0$) vollständig überein, während die Abweichung der letzteren ($\varphi = -16^0$) von der berechneten Drehung ($-17{,}1^0$) auch nicht größer ist, als daß sie innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fällt.[1])

5. Da nun die früheren Beobachtungen sich für eine befriedigende Prüfung der Formel (2a) bzw. (2) nicht als ganz ausreichend erwiesen haben, habe ich die betreffenden Messungen zum Teil wiederholt mit Benutzung derselben Versuchsanordnung und desselben Versuchsmaterials, deren ich mich früher bedient hatte.

Elektrische Wellen verschiedener Länge wurden demnach durch ein System von 300 regellos verschieden gerichteter linksgewundener, schraubenförmiger Resonatoren hindurchgesandt, deren halbe Eigenwellenlänge ($^1/_2\lambda_0$) durch genaue frühere

---

1) Für $^1/_2\lambda = 6{,}1$ cm bestand die Intensitätsmessung in Ablesungen von sehr kleinen Galvanometerausschlägen, weshalb die Quotienten der beiden gleichzeitigen Ausschläge dann nicht besonders genau waren. Um so bemerkenswerter ist es also, daß der für $^1/_2\lambda = 17{,}1$ cm gefundene Wert von φ, der sich auf Ablesungen sogar sehr großer Ausschläge gründet, mit dem berechneten Werte vollständig übereinstimmt.

Beobachtungen = 9,6 cm gefunden worden war. Vor Beginn der neuen Versuche wurde jeder Resonator mit Bezug auf die Steighöhe der Spirale geaicht und wurde dann wie früher in einem Baumwollballe eingebettet. Der geradlinige Meßresonator wurde vor jeder Messung von φ sorgfältig so eingestellt, daß der Zeiger des Empfängers auf dem Gradstriche 90° stand, wenn der mit dem Erreger isochrone Resonator zu dem elektrischen Vektor der einfallenden Wellen parallel war. Die Größe des Drehungswinkels wurde wie früher durch Messung der Wirkung bestimmt, die von den durch das Gitter hindurchgegangenen Wellen auf den Meßresonator ausgeübt wurde, wenn dieser verschieden große Winkel mit dem elektrischen Vektor der primären einfallenden Wellen bildete. Da die Erfahrung (sowohl jetzt wie auch früher) gezeigt hatte, daß die Lage der größeren Achse der Schwingungsellipse wesentlich genauer wie die der kleineren Achse bestimmt werden konnte, beschränkte ich mich bei diesen neuen Versuchen auf solche Intensitätsmessungen, die zur graphischen Feststellung der Lage der größeren Achse erforderlich waren.

Zuerst bestimmte ich den Drehungswinkel φ für $^1/_2\lambda =$ 13,0 cm, welche Bestimmung schon früher mit der größten Genauigkeit ausgeführt worden war. Wie vorher, fand ich auch jetzt für diesen Winkel den Wert +11°. Für $^1/_2\lambda = 10{,}0$ cm fand ich auch dieselbe Drehung $\varphi = +10°$ wie bei den früheren Versuchen. Bei der Bestimmung derjenigen Drehungen, auf die sich die Berechnung der Kurve II in Fig. 1 gründet, war also kein merkbarer Fehler begangen worden. Obwohl die Genauigkeit des Wertes $\varphi = +10°$ für $^1/_2\lambda = 10{,}0$ cm nicht groß ist (es dürfte jedoch dieser Wert um etwa 1° genau sein), hat, wie oben bemerkt wurde, ein Fehler des Drehungswinkels für eine Wellenlänge in der Nähe von λ_0 einen verhältnismäßig geringen Einfluß auf eine auf diesen Wert gegründete Berechnung von λ_r.[1])

Für $^1/_2\lambda = 7{,}7$ cm und 11,4 cm fand ich jetzt $\varphi = +16°$ bzw. −22°, also Werte, die mit den entsprechenden theoretisch

1) Wenn man unter Beibehaltung der vorher benutzten Werte von λ_1 und φ_1 den Winkel $\varphi_2 = 9°$ (anstatt 10°) für $^1/_2\lambda_2 = 10$ cm setzt, so erhält man $^1/_2\lambda_2 = 31{,}6$ cm, welcher Wert von dem mit Hilfe des beobachteten Wertes $\varphi_2 = 10°$ vorher berechneten Werte ($^1/_2\lambda_r = 33{,}7$ cm) recht wenig abweicht.

bestimmten Werten (vgl. die Tabelle auf S. 274) sogar vollständig übereinstimmen. Da diese Werte, wie aus dem vorher Gesagten hervorgeht, von besonderer Bedeutung sind, werde ich die einzelnen Beobachtungen und Berechnungen, aus denen sie hervorgegangen sind, hier anführen. Man gewinnt dadurch zugleich ein Urteil über die Genauigkeit der Intensitätsmessungen. In der folgenden Tabelle bezeichnet δ den an der Gradscheibe abgelesenen Winkel (der Gradstrich 90° entspricht der Schwingungsebene des elektrischen Vektors der einfallenden Wellen), a den Ausschlag des mit dem Meßresonator verbundenen Galvanometers, b den Ausschlag des mit einem Standardindikator verbundenen Galvanometers und J den ersteren Ausschlag, in Prozenten des letzteren ausgedrückt, oder m. a. W. die gemessene Strahlungsintensität.

$\frac{1}{2}\lambda$	δ	a	b	$J = 100 \times \frac{a}{b}$	Mittelwert von J
7,7 cm	90°	8	52	15	
		9	58	16	15
		8	53	15	
7,7 „	100°	10	58	17	
		10	54	19	18
		10	56	18	
7,7 „	110°	12	60	20	
		10	52	19	20
		11	50	22	
7,7 „	120°	10	56	18	
		10	50	20	
		10	54	19	19
7,7 „	130°	8	50	16	
		8	50	16	
		8	50	16	16
7,7 „	140°	7	56	12,5	
		7,5	54	14	
		7	53	13	13
7,7 „	100°	10	58	17	18
		10	53	19	
11,4 „	82	85	112	76	
		82	110	75	
		81	106	76	76
11,4 „	78°	86	102	84	
		101	122	83	
		93	112	83	83
11,4 „	70°	86	102	84	
		90	110	82	
		92	112	82	83
11,4 „	60°	88	114	77	
		78	102	76	
		80	106	75	76

Die in der Tabelle angegebenen Mittelwerte von J ergeben die in Fig. 2 und 3 dargestellten Intensitätskurven für $^1/_2\lambda =$ 7,7 cm und 11,4 cm. Wie man sieht, haben diese Kurven eine

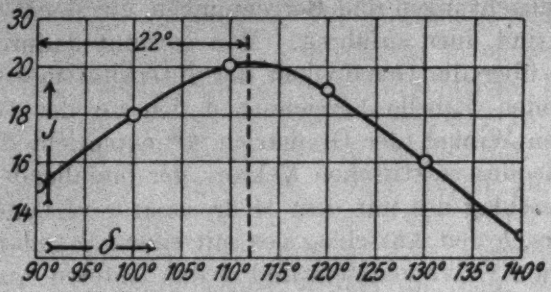


Fig. 2. ($\lambda/2 = 7{,}7$ cm.)

symmetrische Form und geben für die Drehungen die schon früher genannten Werte ($\varphi = +16^0$ für $^1/_2\lambda = 11{,}4$ cm und $\varphi = -22^0$ für $^1/_2\lambda = 7{,}7$ cm).[1])

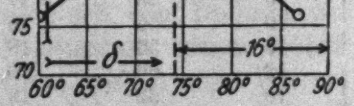


Fig. 3. ($\lambda/2 = 11{,}4$ cm.)

In analoger Weise sind die Drehungen für die anderen bei den früheren Versuchen vorgekommenen Wellenlängen bestimmt worden. Die so erhaltenen neuen Werte von φ sind in der Tabelle auf S. 281 angeführt. Mit Ausnahme von den beiden vorher erwähnten Werten, stimmen die neuen Werte mit den entsprechenden früher erhaltenen recht nahe überein. Für $^1/_2\lambda = 9$ cm vermochte ich indessen nicht die Drehung auf eine zuverlässige Weise mit der benutzten Versuchsanordnung zu bestimmen, indem ich in diesem Falle stets eine un-

1) Falls das bei den früheren Versuchen untersuchte Resonatorensystem selbst nicht ganz isotrop war, so kann die Verschiedenheit der damals und jetzt gefundenen Werte der extremen Drehungen (für $^1/_2\lambda = 7{,}7$ bzw. 11,4 cm) wahrscheinlich dadurch erklärt werden, daß der Meßresonator bei den früheren Versuchen seine Stellung im Verhältnis zu dem mit dem Empfänger verbundenen großen Metallrohr bei der Drehung des Rohres und des Meßresonators ganz wenig verändert hatte.

symmetrische Intensitätskurve erhielt, deren höchster Punkt einer wesentlich geringeren Drehung (φ) entsprach als die Mittelpunkte der zur Abszissenachse parallelen Sehnen. Dies dürfte darin seine Erklärung finden, daß, wenn die Eigenperiode des Meßresonators ein wenig kleiner als die der spiralförmigen Gitterelemente war, eine von diesen ausgehende Sekundärstrahlung („Fluoreszenzstrahlung") sich derart ein wenig geltend machte, daß der Meßresonator, dessen Eigenschwingungen in diesem Falle etwas stärker gedämpft waren als die der spiralförmigen Gitterelemente, hierdurch eine Schwingungsperiode erhielt, die ein wenig größer wie die seiner freien Eigenschwingungen war. Wenn seine Eigenperiode größer als die der Gitterelemente ($\lambda > \lambda_0$) oder auch wesentlich kleiner als diese war, so konnte nach gewissen anderen von mir gemachten Beobachtungen, auf die ich hier nicht näher eingehen kann, eine solche Wirkung kaum merkbar hervortreten. Daß die für $^1/_2\lambda = 9$ cm früher (wie auch jetzt) beobachtete Drehung, die dem höchsten Punkte der Intensitätskurve entsprach, wesentlich kleiner als die berechnete war, kann wahrscheinlich auf die erwähnte Wirkung zurückgeführt werden.

$^1/_2\lambda$	Drehungswinkel φ			
	Beobachteter Wert	Aus der Formel (5) berechneter Wert ($^1/_2\lambda_a = 13$ cm; $\varphi_a = 11°$)		
		$^1/_2\lambda_r = 33{,}7$cm	$^1/_2\lambda_r = 31{,}9$cm	$^1/_2\lambda_r = 32{,}5$cm
17,1 cm	+ 5°	+ 4,9°	+ 4,9°	+ 4,9°
13, „	+11°	—	—	—
11,4 „	+16°	+16,2°	+16,0°	+16,1°
10,0 „	+10°	+10,0°	+ 9,2°	+ 9,4°
9,6 „ $= ^1/_2\lambda_0$	0°	0°	0°	0°
9,0 „	?	−15,8°	−14,6°	−15,0°
7,7 „	−22°	−22,2°	−22,0°	−22,1°
6,1 „	−16°	−17,1°	−17,3°	−17,2°

Die Werte von φ, die $^1/_2\lambda = 10{,}0$ cm und 13,0 cm entsprechen und welche mit den früheren Beobachtungen übereinstimmen, geben $^1/_2\lambda_r = 33{,}7$ cm. Wenn man bei der Berechnung von λ_r, außer $\varphi_1 = 11°$ für $^1/_2\lambda_1 = 13{,}0$ cm, den Wert $\varphi_2 = -22°$ für $^1/_2\lambda_2 = 7{,}7$ cm benutzt, so erhält man $^1/_2\lambda_r = 31{,}9$ cm, während der für $^1/_2\lambda_2 = 11{,}4$ cm erhaltene Wert $\varphi_2 = +16°$ auch gibt $^1/_2\lambda_r = 31{,}9$ cm. Die nahe Übereinstimmung

aller so erhaltenen Werte von λ_r bedeutet eine Bestätigung der Formel (2a) bzw. (2). Was diejenigen Werte von λ_r betrifft, die mit Benutzung der beobachteten Werte $\varphi_2 = +5^0$ für $^1/_2\lambda_2 = 17{,}1$ cm bzw. $\varphi_2 = -16^0$ für $^1/_2\lambda_2 = 6{,}1$ cm noch erhalten werden können, stimmt allerdings der erstere von ihnen ($\lambda_r = 2 \times 31$) mit den soeben erwähnten Werten sehr nahe überein, wogegen der letztere ($\lambda_r = 2 \times 40$) wesentlich größer ist. Nach dem, was oben (S. 276) hervorgehoben worden ist, sind jedoch diese Werte, die mit Hilfe der für $^1/_2\lambda_2 = 17{,}1$ cm, bzw. 6,1 cm, gemachten Beobachtungen berechnet worden sind, sehr unsicher, indem ein Fehler in den Werten von φ_2 sich hier viel stärker geltend macht, als wenn λ_2 nur verhältnismäßig wenig von λ_0 abweicht. Die Schlußfolgerung von der Konstanz der Größe λ_r wird also nicht dadurch aufgehoben, daß der Wert $\lambda_r = 2 \times 40$ wesentlich größer als die anderen Werte dieser Größe ist (die Abweichung ist übrigens hier viel geringer wie die entsprechende bei den früheren Versuchen auftretende [vgl. S. 275]). Der wahrscheinlichste Wert von λ_r ist das Mittel der drei zuerst erwähnten Werte. Man erhält somit

$$\tfrac{1}{2}\lambda_r = \frac{33{,}7 + 31{,}9 + 31{,}9}{3} = 32{,}5 \text{ cm}.$$

Aus der Tabelle auf der Seite 281 ergibt sich, daß die Werte des Drehungswinkels φ, die mit Hilfe dieses Mittelwertes berechnet worden sind, mit denjenigen sehr nahe übereinstimmen, die durch Benutzung der Werte $^1/_2\lambda_r = 33{,}7$ und 31,9 cm erhalten worden sind, sowie auch mit den beobachteten Werten. Die Tabelle zeigt auch, daß ein Fehler in dem Werte von λ_r einen viel stärkeren Einfluß auf den berechneten Wert der Drehung hat, wenn λ sich nur wenig von λ_0 unterscheidet, als wenn dieser Unterschied einen größeren Wert hat (das umgekehrte Verhältnis ist schon vorher [siehe oben, S. 276] bemerkt worden).

Die aus den Beobachtungen hervorgehende Relation zwischen Drehung und Wellenlänge wird graphisch dargestellt durch eine Kurve, die fast vollständig mit der theoretischen Kurve II in Fig. 1 (S. 275) zusammenfällt, die mit Hilfe des Wertes $^1/_2\lambda_r = 33{,}7$ cm berechnet worden ist (die Kurven, welche $^1/_2\lambda_r = 31{,}9$ bzw. 32,5 cm entsprechen, fallen, wie aus der Tabelle auf S. 281 hervorgeht, mit dieser Kurve sehr nahe zusammen).

6. Obwohl es aus den oben angedeuteten Gründen als berechtigt erscheint, von dem Falle $^1/_2\lambda = 9$ cm abzusehen, wo ein zuverlässiger Wert der Drehung nicht erhalten werden konnte, und die übrigen in der Tabelle auf S. 281 angegebenen Werte für eine Prüfung der Formel (2a) hinreichend sein dürften, habe ich jedoch neulich durch Versuche nach einer veränderten Versuchsanordnung die genannte Lücke in den oben erwähnten Beobachtungen ausgefüllt. Ich bin dabei zum Teil auf eine Anordnung zurückgekommen, deren ich mich ursprünglich bei meinen ersten diesbezüglichen Versuchen bedient hatte, die ich aber, um die von dem Raumgitter ausgeübte Absorption auf eine exaktere Weise messen zu können, später aufgab. Anstatt

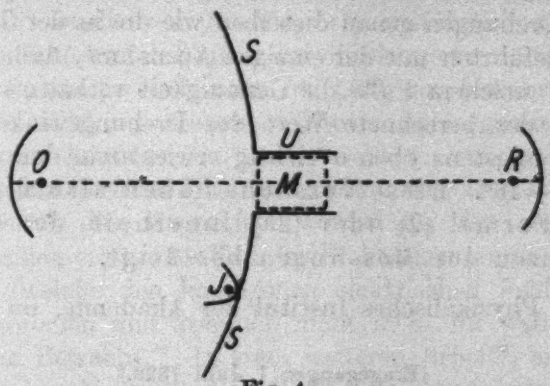


Fig. 4.

des 1 m langen Metallrohres, in dessen hinterem Ende der Meßresonator bei den obigen Versuchen angebracht war und welches zum Zusammenhalten des primären Strahlenbündels gedient hatte, benutzte ich jetzt zu demselben Zweck nur das 34 cm lange Metallrohr U (von 26 cm Durchmesser), worin sich das Raumgitter M befand, während der mit zylindrisch-parabolischem Spiegel versehene Meßresonator R in einer etwa 60 cm großen Entfernung von U aufgestellt war. Das vordere Ende des Rohres U war in eine kreisförmige Öffnung eines 1 m hohen und $1^1/_2$ m breiten Metallspiegels S eingeführt, der zur Abschirmung der seitlichen primären Strahlen diente. Bei dieser Anordnung wurden die aus dem Gitter M heraustretenden schädlichen Sekundärstrahlen wenigstens zum großen Teil zerstreut, so daß sie nur wenig auf den Meßresonator einwirken konnten. Der Erreger O und der Standardindikator J hatten

die in der Figur angegebenen Lagen (der Abstand zwischen O und M betrug etwa 70 cm). Diese Versuchsanordnung, die sich von der zu allererst benutzten eigentlich nur durch das Vorkommen des Rohres U unterscheidet, scheint mir in mehreren Beziehungen zweckmäßiger wie die von mir vorher benutzten anderen Anordnungen.

Auch für $^1/_2\lambda = 9$ cm erhielt ich jetzt beim Variieren des Winkels δ eine ganz symmetrische Intensitätskurve, und zwar entsprach diese Kurve einer Drehung $\varphi = -15^0$, welcher Wert mit dem oben berechneten Werte vollständig übereinstimmt (vgl. die Tabelle, S. 281, wo also das da vorkommende Fragezeichen jetzt durch die Zahl -15^0 zu ersetzen ist). Für die anderen früher benutzten Wellenlängen waren die jetzt beobachteten Drehungen genau dieselben wie die in der Tabelle auf S. 281 angeführten mit der einzigen Ausnahme, daß für $^1/_2\lambda =$ 6,1 cm, in welchem Falle die Genauigkeit verhältnismäßig gering war, der berechnete Wert des Drehungswinkels, -17^0, sich als wenigstens ebenso richtig erwies, wie der vorher gefundene, -16^0. Diese Versuche haben also die Natansonsche Formel (2) oder (2a) innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Messungen bestätigt.

Åbo, Physikalisches Institut der Akademie, im Mai 1922.

(Eingegangen 1. Juni 1922.)

Druckfehlerberichtigung: In meiner auf S. 270 zitierten Abhandlung in Ann. d. Phys. **63**. 1920 steht auf S. 635, Zeile 14 von oben: $\lambda_0 = 2 \times 13{,}6$; soll sein: $\lambda_0 = 2 \times 9{,}6$ cm.

4. *Funkenpotentiale im transversalen Magnetfelde; von Max Wehrli.*

§ 1. Einleitung. Lagert man über das homogene elektrische Feld einer Funkenstrecke ein Magnetfeld, so daß die magnetischen Kraftlinien senkrecht zu den elektrischen verlaufen (ein sog. transversales Magnetfeld), so beobachtet man eine komplizierte Beeinflussung auf das Funkenpotential. Diese Erscheinung wurde von E. Meyer[1]) ausführlich untersucht. Es ergab sich dabei, daß nach der Funkenpotentialtheorie von Townsend, welche sich sonst für Luft gut bewährt hat, die beobachtete Wirkung weder qualitativ noch quantitativ gedeutet werden konnte.

Den Grund für diese Diskrepanz vermutete Meyer in folgendem[2]): „Durch das Magnetfeld werden bei den verwendeten Funkenstrecken ein großer Teil der Elektronen an die Wandung der Ringe (welche den homogenen elektrischen Feldraum abgrenzen) geworfen und kommen nicht mehr für weitere Stoßionisation in Betracht." In einer weiteren Arbeit[3]) hat Meyer durch besondere Versuche diese Auffassung als richtig erwiesen.

Dieser Einfluß soll in der vorliegenden Arbeit vermieden werden. Es gelangte eine Funkenstrecke mit radialem, zylindrischem elektrischem Felde zur Verwendung. Überlagert man einem solchen ein transversales Magnetfeld, so bewegen sich die Elektronen in Bahnen, die in Ebenen senkrecht zur Zylinderachse liegen. Da, wie in § 2 gezeigt wird, die den Funkenraum abgrenzende Wandung auch senkrecht zur Zylinderachse steht, so laufen die Elektronen stets parallel zur Wand und der von Meyer vermutete Einfluß ist vermieden.

Das radiale Zylinderfeld ist nicht homogen, und es trat deshalb als Nebenaufgabe die Untersuchung schwach inhomogener Felder hinzu.

1) E. Meyer, Ann. d. Phys. 58. S. 297. 1919.
2) E. Meyer, Arch. de Genève 5. S. 1, 543. 1919.
3) E. Meyer, Ann. d. Phys. 67. S. 1. 1922.

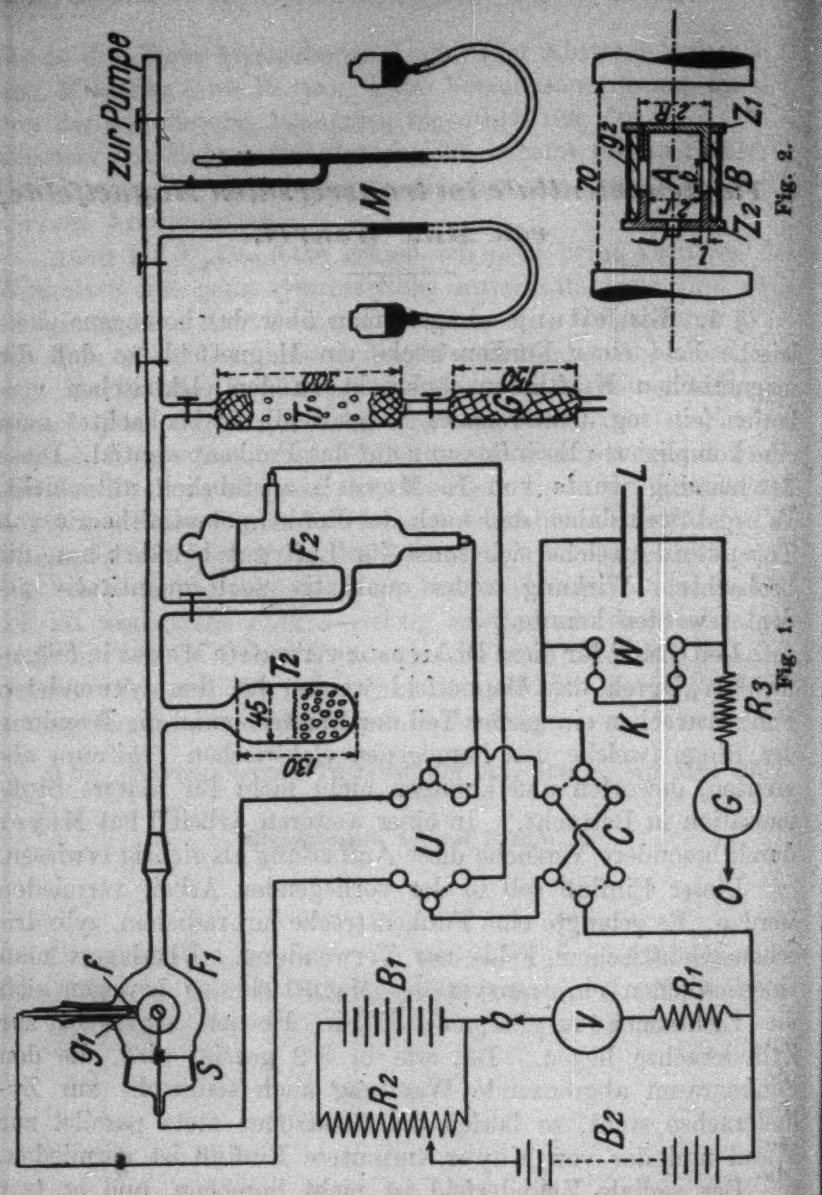


Fig. 2.

Fig. 1.

§ 2. Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 dargestellt. Mit Ausnahme der Funkenstrecke F_1 ist sie analog derjenigen von Meyer (l. c. § 6). Es wurden deshalb in Fig. 1 die gleichen Bezeichnungen eingeführt wie in der Fig. 1 von Meyer. Die eigentliche Meßfunkenstrecke F_1 (radiales Zylinderfeld) ist im

Schnitte in Fig. 2 dargestellt. Die beiden Elektroden A und B werden gebildet durch zwei koaxiale Messingzylinder. Diese werden zusammengehalten durch die beiden Ebonitstücke Z_1 und Z_2, welche den Funkenraum von der Breite b ausblenden. Als Funkenlänge l wird der senkrechte Abstand der beiden Elektroden bezeichnet. Um ein Feld zu haben, das durch die Wirkung der Ränder möglichst unverzerrt ist, sind die Ebonitringe von Z_1 und Z_2 2,5 bis 11 mal länger gewählt als die Funkenlänge l. Die Ebonitwandungen, welche senkrecht zur Zylinderachse der Elektroden stehen, sind gegen den Funkenraum hin auf Hochglanz poliert; Z_1 ist mit einem 0,5 mm Loche versehen zum Durchtritte des Gases. R und r sind die Radien der äußeren bzw. inneren Elektrode. Der ganze Apparat ruht in einer Glaskugel. Die Zuführung zur inneren Elektrode geschieht mit einer Feder durch den Schliff S (s. Fig. 1). Die Zuführung zur äußeren Elektrode B besorgt ein Stab mit der Feder f. Um unterhalb des Minimumpotentials ein Überspringen des Funkens außen herum zu vermeiden, mußte B mittels der zwei Glasröhren g_1 und g_2 geschützt werden. Die Hauptdimensionen (in Millimetern) der verschiedenen verwendeten Funkenstrecken sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

App. Nr.	l	b	R	r	$v = R/r$
1	5,01	11,5	12,99	8,00	1,62
2	5,0	12,1	31,80	26,8	1,18
3	2,00	14,3	12,99	11,00	1,18
4	0,99	14,1	12,99	12,01	1,08

Apparat Nr. 2 hat so große Dimensionen, daß er in einem speziellen dickwandigen zylinderförmigen Gefäße eingekittet ist. Als Kitt wurde weißer Siegellack verwendet. Das Verhältnis der elektrischen Feldstärke an der inneren Elektrode zur Feldstärke an der äußeren ist $v = R/r$. v stellt ein Maß für die Inhomogenität des Feldes dar.

Zu Vergleichszwecken dient eine Originalfunkenstrecke F_2 von E. Meyer mit homogenem Felde. Diese wird mit dem Umschalter U angeschlossen. Da bei F_1 das Funkenpotential von der Feldrichtung abhängt, kann diese mit dem Kommutator C gewechselt werden.

Um die Funkenverzögerung herabzusetzen, befindet sich in der Nähe von F_1 bzw. F_2 ein $RaBr_2$-Präparat.

Die Evakuierung geschieht mit einer rotierenden Quecksilberpumpe von Gaede. Untersucht wird in atmosphärischer Luft, vom Staub gereinigt durch das Glaswollefilter G und getrocknet durch die Trockenröhre T_1 und das Trockengefäß T_2. Als Trockenmittel wird Phosphorpentoxyd verwendet. Der Druck p, stets in mm Hg ausgedrückt, wird gemessen durch das Mac Leodsche Manometer M mit Kompensationsrohr (l. c. § 7).

Die Funkenstrecke F_1 befindet sich zwischen den Polen eines Weissschen Magneten mit Wasserkühlung von der Firma Max Kohl. Die ebenen Pole haben einen Durchmesser von 10 cm. Das Interferrikum ist 7 cm lang. Die absolute Messung der Magnetfelder wurde mit einer Wage nach Cotton[1]) ausgeführt.[2]) Der Vergleich des Feldes am oberen und unteren Linienelemente des Wagebalkens wurde mit Hilfe von Probespulen, die aus dem Felde herausgezogen und dabei um 90° gedreht werden konnten, gemacht. Dieselbe Methode diente zu relativen Feldmessungen, zur Untersuchung der Magnetfelder auf Homogenität und zur Kontrolle. Die Genauigkeit der Magnetfeldmessungen ist sicher $\pm 1\%$. Die Homogenität der magnetischen Felder ist im Bereich der Funkenstrecke auf $0{,}5\%$ gewahrt. Die Entmagnetisierung geschah durch abnehmende Kommutation.

§ 3. Vorversuche. Die Meßmethode war die von Meyer verwandte (l. c. § 10). Es wurde das niedrigst gemessene Potential als Funkenpotential angesprochen[3]), wenn dabei auch das Galvanometer einen minimalen Ausschlag zeigte, was meistens der Fall war. Für alle Vorversuche gelangt der Apparat Nr. 1 zur Verwendung (s. Tab. 1). Wenn die Elektronenbahnen (ohne Magnetfeld) parallel zur Wandung verlaufen, so dürfen nach Meyer diese begrenzenden Wandungen keinen Einfluß auf das Funkenpotential haben, d. h. die Funken-

1) A. Cotton, Journ. de phys. 9. S. 383. 1900. — A. Piccard, Die Magnetisierungskoeffizienten des Wassers und des Sauerstoffs. Züricher Diss. 1913.

2) Für die leihweise Überlassung der Cottonschen Wage habe ich Hrn. Prof. Debye zu danken.

3) E. Meyer, Ann. d. Phys. 65. S. 335. 1921.

potentiale müssen in unserem Falle unabhängig von der Feldbreite b sein. Um das zu prüfen, wurde die Funkenpotentialkurve bei $b = 11{,}5$ mm zwischen den Drucken 0,5—4 und 7 bis 11 mm aufgenommen bei beiden elektrischen Feldrichtungen. Dann wurde an den Ebonitstücken Z_1 und Z_2 je 5 mm Ebonit abgedreht, d. h. die Feldbreite b fast verdoppelt und wieder gemessen. Es ergaben sich Abweichungen, die innerhalb der Meßfehler liegen, d. h. die kleiner als ± 5 Volt waren.

Die Unabhängigkeit des Magnetfeldeinflusses von der Feldbreite wurde mit dem Magnetfelde $H = 1630$ Gauss geprüft. Zu diesem Zwecke wurde in den Druckintervallen 0,5—3 und 6—10 mm der Magnetfeldeinfluß aufgenommen. Eine Feldverschmälerung geschah durch Einsetzen eines Ebonitringes von 10 mm Breite, wodurch b von 21,5 auf 11,5 mm herabgesetzt wurde. Der Ring war an Z_2 angesetzt, so daß der Funkenraum nachher nicht mehr in der Mitte des Apparates lag, sondern um 5 mm seitlich verschoben war. Dann wurden wiederum die gleichen Messungen ausgeführt. Tab. 2 gibt ein Beispiel. Die Differenz der Funkenpotentiale mit und ohne Magnetfeld ist mit ΔV bezeichnet. Die Indizes $\pm$ sollen immer das Vorzeichen der inneren Elektrode bedeuten.

Tabelle 2.

p	ΔV			
	$b = 21{,}5$ mm		$b = 11{,}5$ mm	
1,5	45^+	52^-	53^-	45^+
2,5	49^+	53^-	54^-	49^+
6,5	48^+	39^-	40^-	50^+
8,0	43^+	38^-	37^-	42^+

Der Unterschied für verschiedene Feldbreite b ist immer kleiner als 2,5 Volt, liegt also innerhalb der Meßfehler. Zugleich ist auch hiermit eine genügende Homogenität des magnetischen und elektrischen Feldes parallel zur Apparatenachse nachgewiesen.

§ 4. Feuchtigkeit. Die Minimumpotentiale der Kurven, aufgenommen an der Funkenstrecke F_2, liegen im allgemeinen etwa 20 Volt höher als der Normalwert von Meyer (327 Volt). Ferner zeigten sich bei lange andauernden Messungen, besonders beim Stehenlassen der Apparatur, kleinere Schwankungen.

Beides läßt sich durch den Einfluß der Feuchtigkeit erklären, entsprechend den Arbeiten von Meyer und Stücklen.[1]) Ein Vergleich aller an F_1 und F_2 aufgenommenen Messungen zeigt, daß die Funkenpotentiale durch die Feuchtigkeit nicht bei allen Drucken gleich beeinflußt werden. Die größte Änderung tritt in der Nähe des Minimumpotentiales auf, während bei höheren Drucken die Schwankungen durch die Feuchtigkeit kleiner sind.

Der Einfluß der Feuchtigkeit auf die Funkenpotentiale mit und ohne Magnetfeld ist derselbe, d. h. der Magnetfeldeinfluß, welcher gleich ist der Differenz der Funkenpotentiale mit und ohne Magnetfeld, zeigt keine Abhängigkeit von der Feuchtigkeit. Das wurde bis zu solchen Feuchtigkeitsänderungen verfolgt, die Funkenpotentialänderungen von 20 Volt ergaben.

§ 5. Die endgültige Meßmethode wurde wie folgt gewählt: Abschmirgeln der Elektroden mit Schmirgelpapier 00, Einsetzen derselben, eintägiges Stehenlassen der Apparatur bei vermindertem Drucke, verbunden mit dem Trockengefäße T_2, zweimaliges Spülen mit atmosphärischer Luft, wobei stets auf 0,1 mm evakuiert wurde.[2]) Darauf Druckeinstellung und -messung, Feststellung der Funkenpotentiale[3]) an F_2, dann an F_1, sowohl wenn die innere Elektrode negativ, als auch wenn sie positiv war. Einstellen des Magnetfeldes, Potentialmessung an F_1 mit beiden elektrischen Feldrichtungen. Fortschreiten zu höheren Magnetfeldern, Entmagnetisieren, Kontrolle eines Anfangswertes. Die Versuchsdauer für einen Druck betrug etwa eine halbe Stunde. Es wurden im Maximum fünf Drucke eingestellt, dann von neuem gespült. Da für schwach inhomogene, radiale Felder noch keine Normalkurven bestehen, mußte möglichst rasch gemessen werden, um Feuchtigkeitsschwankungen zu vermeiden. Eine vollständige Versuchsreihe dauerte gewöhnlich drei Tage und eine Nacht. Sämtliche Messungen der vorliegenden Arbeit sind bei Temperaturen zwischen 14 und 19° C vorgenommen, so daß eine Reduktion auf gleiche Dichte nicht vorgenommen werden muß.

---

1) E. Meyer, Ann. d. Phys. 65. S. 335. 1921. — H. Stücklen, Ann. d. Phys. 65. S. 369. 1921.

2) E. Meyer, Ann. d Phys. 65. S. 364. 1921.

3) Mindestens je drei Ablesungen.

§ 6. Die Meßresultate des Apparates Nr. 3 ($l = 2{,}00$ mm) sind in Tab. 3 in chronologischer Weise ausführlich angegeben. t bedeutet die Temperatur in Celsiusgraden nahe am Entladungsgefäß F_1.

Tabelle 3.

Messungen vom 8. bis 11. Juni 1921.

p	t	Funkenpotentiale				
		H = 0	705	1220	1630	3160
1,27	16,1	433+	301+	280+	282+	320+
		430−	299−	278−	279−	318−
3,41	16,1	332+	322+	320+	322+	350+
		330−	319−	318−	320−	349−
8,66	16,0	438+	438+	440+	443+	466+
		440−	440−	442−	447−	468−
0,76	16,2	807+	318+	286+	288+	323+
		820−	313−	279−	281−	320−
0,31	18,1	* +	351+	308+	312+	412+
		* −	338−	293−	297−	392−
2,33	18,2	349+	310+	300+	301+	324+
		341−	308−	297−	298−	331−
6,37	17,1	390+	390+	390+	392+	419+
		388−	388−	389−	391−	413−
1,59	16,2	388+	308+	290+	291+	328+
		381−	303−	287−	289−	324−
4,72	16,0	358+	352+	352+	355+	380+
		352−	350−	350−	352−	379−
9,74	15,9	455+	458+	459+	462+	486+
		460−	461−	463−	468−	489−
1,15	17,3	479+	310+	277+	288+	325+
		478−	309−	281−	282−	321−
7,82	17,1	421+	422+	423+	428+	450+
		421−	421−	422−	428−	449−
14,08	16,9	523+	—	529+	532+	553+
		538−	—	542−	547−	566−
0,49	17,7	* +	332+	291+	298+	330+
		* −	330−	282−	288−	323−
0,20	16,0	* +	403+	361+	385+	500+
		* −	388−	336−	338−	487−
0,15	15,8	* +	462+	418+	461+	530+
		* −	430−	373−	393−	518−
11,68	15,8	489+	—	492+	498+	520+
		500−	—	502−	508−	528−
13,40	15,7	512+	—	518+	521+	543+
		526−	—	530−	523−	552−

Das Zeichen * bedeutet: das Funkenpotential ist größer als 870 Volt. Da bei hohen Drucken der Einfluß eines Magnetfeldes von 705 Gauss gering ist, wird hier bei diesem Felde nicht gemessen.

Fig. 3 gibt das V-p-Diagramm für den Fall: innere Elektrode negativ, erhalten aus den Werten der Tab. 3. Es wurde bei einigen Drucken auch noch mit anderen Magnetfeldern ge-

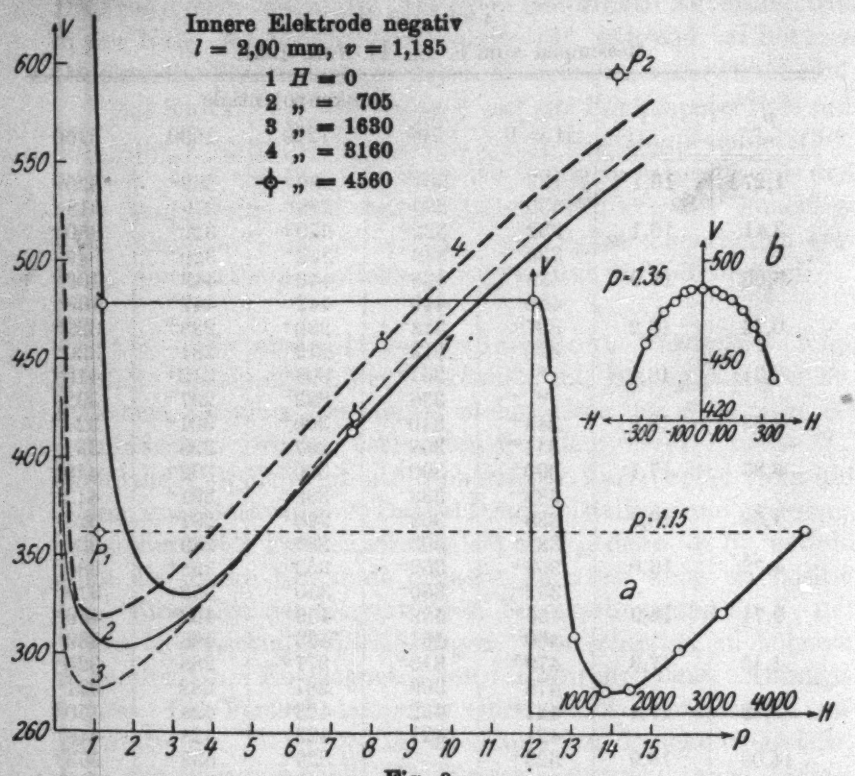


Fig. 3.

messen. Punkt P_1 und P_2 in Fig. 3 sind beim Felde $H = 4560$ Gauss aufgenommen. Die Kurve der Fig. 3a zeigt das V-H-Diagramm beim Drucke $p = 1{,}15$ mm. Da die Tangente bei $H = 0$ im V-H-Diagramm in der Theorie näher behandelt wird (s. § 15), wurde bei $p = 1{,}35$ mm das V-H-Diagramm bei schwachen Magnetfeldern aufgenommen, und zwar mit beiden Magnetfeldrichtungen, d. h. mit $+H$ und $-H$.[1]) Die innere Elektrode war dabei negativ. Die erhaltenen Resultate sind

1) Diese Versuche wurden gemeinsam mit Hrn. cand. phys. Zeilinger ausgeführt.

Tabelle 4.

	l	5,01		5,0		0,99			
	v	1,62		1,18		1,08			
p	H	$V+$	$V-$	$V+$	$V-$	$V+$	$V-$	$H = 4560$	
								$V+$	$V-$
0,25	0	660	620	790	770	*	*		
	705	317	296	339	309	—	—		
	1220	340	329	362	322	480	440	350	325
	1630	364	357	439	353	363	338		
	3160	457	467	—	465	343	363		
0,5	0	480	460	440	431	*	*		
	705	316	300	305	290	—	—		
	1220	341	331	331	316	400	389	322	305
	1630	365	361	361	348	321	311		
	3160	458	470	—	455	301	290		
1	0	387	364	329	323	*	*		
	705	341	329	312	302	—	—		
	1220	366	356	342	329	359	357	301	295
	1630	390	384	372	361	309	303		
	3160	487	493	466	464	285	280		
2	0	400	380	363	360	582	560		
	705	395	382	364	361	—	—		
	1220	420	404	493	386	342	343	299	298
	1630	443	429	418	410	307	305		
	3160	545	535	518	507	287	284		
4	0	470	468	465	466	380	378		
	705	477	474	474	475	—	—		
	1220	497	494	493	493	332	332	314	313
	1630	521	513	516	514	315	315		
	3160	622	608	616	605	303	303		
6	0	540	555	544	554	358	356		
	705	549	562	554	563	—	—		
	1220	566	579	573	581	340	340	333	333
	1630	586	595	594	600	331	331		
	3160	683	679	689	684	325	325		
8	0	612	638	622	634	361	361		
	705	621	645	631	644	—	—		
	1220	636	657	648	659	352	352	355	355
	1630	652	670	656	666	348	348		
	3160	747	748	747	753	347	347		
9,5	0	667	696	676	689	370	370		
	705	676	702	686	700	—	—		
	1220	688	715	700	714	366	366	371	371
	1630	702	727	718	731	362	362		
	3160	776	798	792	800	363	363		
20	0					460	466		
	705					—	—		
	1220					462	466	475	477
	1630					463	466		
	3160					469	471		

in Fig. 3b dargestellt. Wie man sieht, ist die Tangente für $H = 0$ parallel zur H-Achse.

Ganz analog wurde mit den anderen Funkenstrecken der

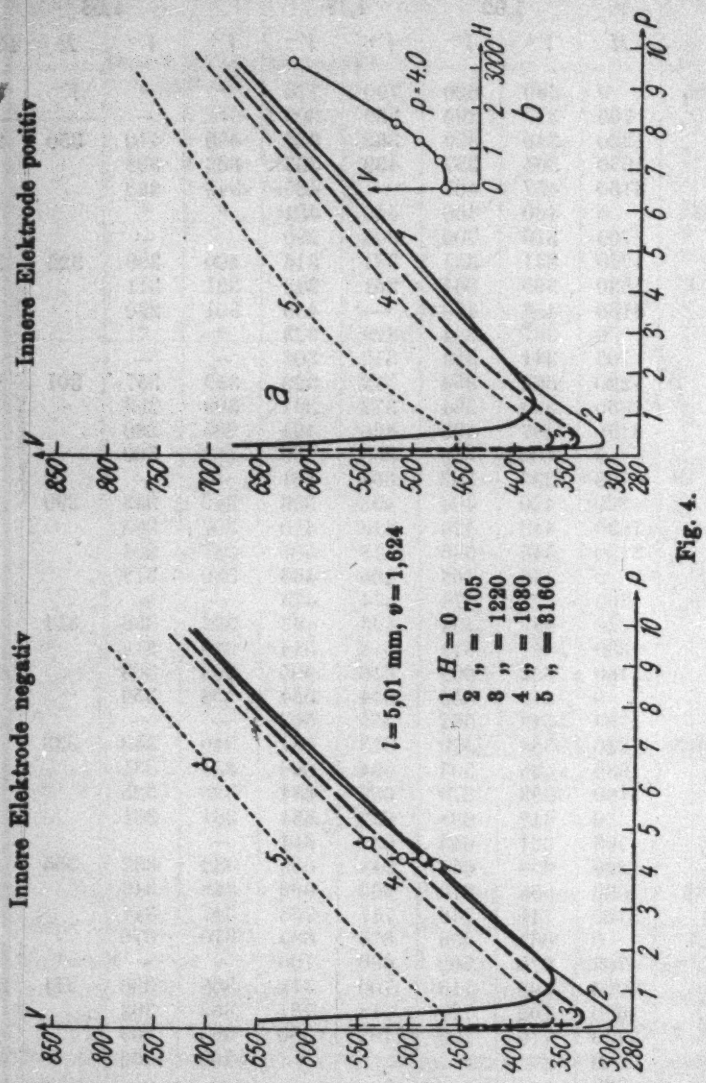


Fig. 4.

Tab. 1 verfahren, deren Resultate in den Figg. 4, 5 und 6 dargestellt sind. Fig. 4 zeigt die Messungen von Apparat Nr. 1 ($l = 5{,}01$ mm, $v = 1{,}62$), innere Elektrode negativ, Fig. 4a dasselbe, aber innere Elektrode positiv. Fig. 4b ist das V-H-Dia-

Innere Elektrode negativ — $l = 5{,}0$ mm, $v = 1{,}18$

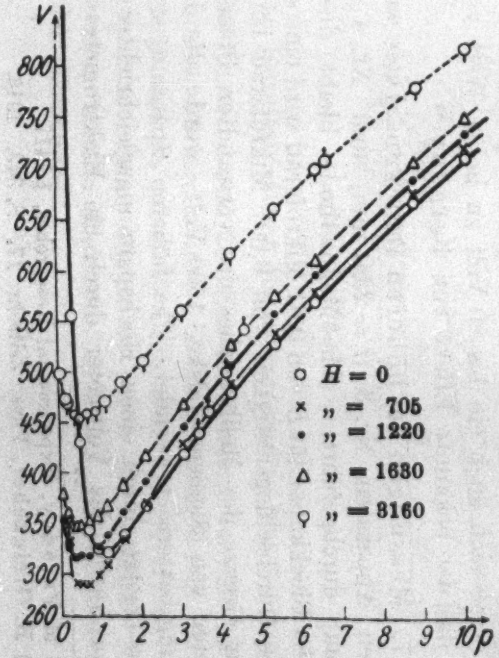


Fig. 5.

Innere Elektrode negativ — $l = 0{,}99$ mm, $v = 1{,}08$

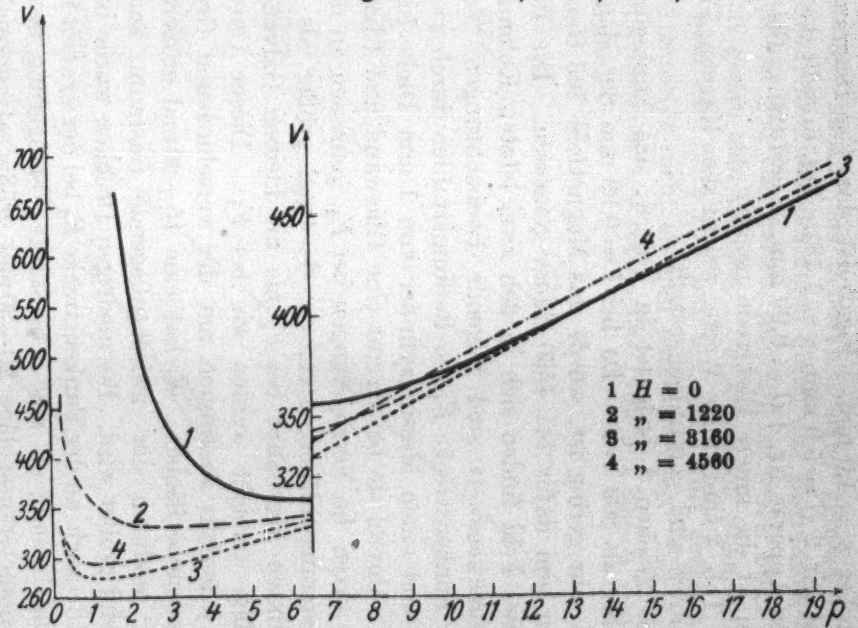


Fig. 6.

gramm bei $p = 4{,}0$ mm. Fig. 5 ist das V-p-Diagramm von Apparat Nr. 2 ($l = 5{,}0$ mm, $v = 1{,}18$). Fig. 6 stellt das gleiche dar von Apparat Nr. 4 ($l = 0{,}99$ mm, $v = 1{,}08$). Bei beiden Figuren ist die innere Elektrode negativ.

In Tab. 4 sind einige Werte, welche den Kurven, Fig. 4—6 entnommen sind, zusammengestellt.

Das Zeichen * bedeutet in Tab. 4: das Funkenpotential ist größer als 800 Volt. Da bei $l = 0{,}99$ mm der Magnetfeldeinfluß sehr gering ist, wurde das Magnetfeld 705 Gauss weggelassen und dafür bei 4560 Gauss gemessen. Die Resultate für dieses Feld finden sich in den zwei letzten Kolonnen.

Bemerkenswert sind folgende Beobachtungen: Trotzdem bei der Funkenstrecke F_1 die Radiumstrahlen durch zwei Glaswände und einen Messingzylinder von 1 mm Dicke hindurchgehen, während sie bei F_2 nur eine Glaswand und Ebonit passieren, waren die Verzögerungen bei F_2, gemessen an den Galvanometerausschlägen, stets ca. 3—4mal größer als bei F_1. Es konnten überhaupt bei F_2 nie die kleinen Galvanometerausschläge erreicht werden wie bei F_1. Dieser Unterschied hängt jedenfalls zusammen mit der verschiedenen Größe der Elektrodenoberflächen. F_1 hat eine 15—20mal größere Oberfläche, wodurch der zwischenliegende Gasraum auch entsprechend größer wird. Bei niedrigen Drucken wurde im Magnetfelde auch an der Funkenstrecke F_1 bei der ersten Funkenpotentialablesung oft eine sehr starke Verzögerung beobachtet (Galvanometerausschläge 20—30mal größer als normal). Zugleich ergab sich auch ein bis 80 Volt zu hoher Wert von V. Es ist das der bekannte Effekt von Faraday.[1])

§ 7. Messungen bei höheren Drucken. Diese wurden mit den Apparaten Nr. 3 ($l = 2{,}00$ mm) und Nr. 4 ($l = 0{,}99$ mm) durchgeführt. Die Meßmethode bleibt dieselbe. Statt der Blockkapazität L von 0,01 Mikrofarad wird eine solche höherer Durchschlagsfestigkeit von 0,007 Mikrofarad benützt. Bis zur Grenze des Meßbereiches des verwandten Präzisionsvoltmeter von Siemens-Halske, 1500 Volt, wurde die Hochspannungsbatterie verwendet. Bei höheren Spannungen wird letztere ersetzt durch einen Hochspannungsgleichrichter nach Greinacher[2]), das Voltmeter durch ein Elektrometer nach

1) M. Faraday, Experimental Researches, § 1417.
2) H. Greinacher, Phys. Zeitschr. 17. S. 343. 1916.

Braun. So konnte bis 3000 Volt sicher gemessen werden. Die Funkenpotentialänderungen durch das Magnetfeld sind bis 1500 Volt auf ±3 Volt genau, während sie weiter oben nur auf ±10 Volt genau sein dürften. Die absoluten Spannungswerte werden oberhalb 1500 Volt nur auf ±30 Volt genau sein, da das Elektrometer nicht speziell geeicht wurde. Zur Kontrolle sind die Messungen von 1000—1500 Volt mit beiden Voltmetern aufgenommen.

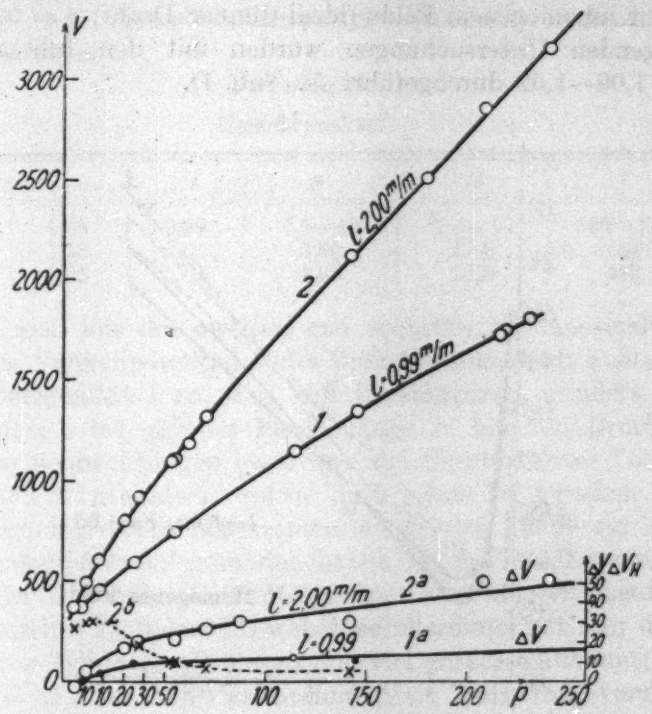


Fig. 7.

Die Resultate dieser Messungen sind in Fig. 7 dargestellt:

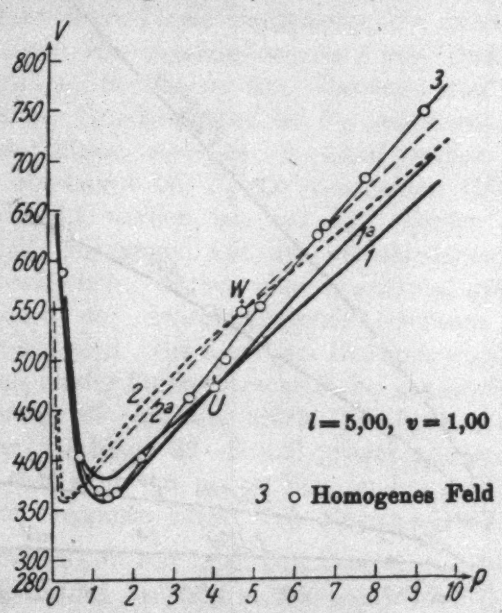
Die Kurven 1 und 2 stellen die Funkenpotentiale bei negativer innerer Elektrode und $l = 0{,}99$ bzw. 2,00 mm dar. Die Kurven 1a und 2a geben die Unterschiede der Kurven 1 und 2 mit negativer innerer Elektrode gegen die analogen Kurven mit positiver innerer Elektrode, d. h. das ΔV wurde erhalten nach der Gleichung:

$$\Delta V = V^- - V^+.$$

Für ΔV gilt der Maßstab rechts, ebenso für ΔV_H (Kurve 2b). Diese letztere Kurve stellt den Einfluß des Magnetfeldes $H = 3160$ Gauss bei $l = 2{,}00$ mm dar. Die innere Elektrode war dabei positiv.

§ 8. Besprechung der Resultate.

Das inhomogene elektrische Feld ohne Magnetfeld. Wie in § 2 erwähnt wurde, kann als Maß der Inhomogenität des radialen elektrischen Zylinderfeldes das Verhältnis $v = R/r$ aufgefaßt werden; dabei ist beim Grenzfalle des homogenen Feldes $v = 1$, bei sehr inhomogenem Felde (ideal dünner Draht) $v = \infty$. Die vorliegenden Untersuchungen wurden mit den Inhomogenitäten 1,08—1,62 durchgeführt (s. Tab. 1).



$l = 5{,}01$ mm; $v = 1{,}62$

1 Innere Elektrode positiv, 1a „ „ negativ $\}H = 0$ 2 Innere Elektrode positiv, 2a „ „ negativ $\}H = 1630$

Fig. 8.

Vergleichen wir die Funkenpotentiale ohne Magnetfeld, welche mit den beschriebenen Funkenstrecken bei einer elektrischen Feldrichtung erhalten wurden, mit denjenigen bei der entgegengesetzten Feldrichtung, so finden wir stets dasselbe Kurvenbild.

Fig. 8 zeigt diesen Verlauf für $v = 1{,}62$ und $l = 5{,}01$ mm.

Unterhalb eines gewissen Punktes U, den wir Umkehrpunkt nennen, ist das Funkenpotential bei negativer innerer Elektrode, d. h. bei Feldkonzentration an der Kathode kleiner als bei Feldkonzentration an der Anode. Dagegen oberhalb des Umkehrpunktes ist es umgekehrt. Hier ist das Funkenpotential bei Feldkonzentration an der Anode kleiner, und zwar ändert sich dieses Verhalten nicht bis zu Drucken von 250 mm, wie bei den Apparaten Nr. 3 und 4 gefunden wurde. Der Umkehrpunkt U liegt stets oberhalb des kritischen Druckes. Tab. 5 zeigt die Lage dieser Umkehrpunkte bei den verschiedenen Funkenstrecken.

Tabelle 5.

Umkehrpunkte

App. Nr.	v	l	p	pl	V
4	1,08	0,99	7,5—10	7,5—10	360—376[1]
2	1,18	5,0	3,50	17,8	440
1	1,62	5,01	4,35	21,8	483

Wie man aus der zweiten und sechsten Kolonne ersieht, nimmt das Funkenpotential V des Umkehrpunktes mit wachsender Inhomogenität v zu, d. h. der Umkehrpunkt wandert mit wachsendem v bei gleicher Funkenlänge zu höheren Drucken.

Diese Beobachtungen bestätigen die Resultate von Townsend[2]) und Edmunds[3]), welche auch schon bei Drucken von 4—100 mm Hg. bei Feldkonzentration an der Anode ein kleineres Funkenpotential gefunden haben als bei Feldkonzentration an der Kathode. Diese Beobachter verwendeten ebenfalls ein elektrisches Zylinderfeld, wobei sie allerdings mit sehr dünnen inneren Zylindern (Drähten) und viel größeren Inhomogenitäten ($v = 31{,}4$ bis 2480) arbeiteten. Der Ionisierungsvorgang spielt sich hier nur in der Nähe der inneren Elektrode ab (analog Spitzenentladung).[4]) Bei den Messungen von Meservey[5])

1) Da bei dem homogensten elektrischen Felde $v = 1{,}08$ die Kurven beider Feldrichtungen nahe zusammenfallen, so können die Werte von p und V nur als Intervalle angegeben werden.

2) J. Townsend and P. Edmunds, Phil. Mag. 27. S. 789. 1914.

3) P. Edmunds, Phil. Mag. 28. S. 234. 1914.

4) Das Verhältnis X_0/p ist bei diesen Versuchen an der äußeren Elektrode stets kleiner als 40 (s. l. c. S. 793).

5) A. Meservey, Phil. Mag. 21. S. 479. 1911.

lagen die Umkehrpunkte wahrscheinlich oberhalb seiner verwandten Drucke. Sein höchster Druck betrug 0,8 mm Hg.

Der Vergleich des inhomogenen Feldes (zylindrische Funkenstrecke F_1) mit dem homogenen Felde (Kontrollfunkenstrecke F_2) ist etwas unsicher, was davon herrührt, daß die Feuchtigkeit in F_1 nicht genau die gleiche sein muß wie in F_2. Die gegenseitige Lage der Kurven beider Funkenstrecken war daher nicht immer konstant. Die häufigst vorkommende Lage, welche auch mit den Messungen von Meservey übereinstimmt, ist in Fig. 8 dargestellt, wo die dünne Kurve 3 die des homogenen Feldes, gemessen an F_2, ist. Sie zeigt folgenden Verlauf: in der Nähe des Minimumpotentials liegt sie zwischen den beiden Kurven des inhomogenen Feldes, bei höheren Drucken oberhalb, d. h. bei hohen Drucken vermindert jede Feldkonzentration das Funkenpotential, aber an der Anode mehr als an der Kathode.

Der Magnetfeldeinfluß für die radialen elektrischen Felder verläuft folgendermaßen: oberhalb eines gewissen Punktes, der in der Nähe des Umkehrpunktes, also oberhalb des kritischen Druckes liegt, tritt nur eine Erhöhung des Funkenpotentiales ein (s. Fig. 4b). Unterhalb dieses Punktes findet man bei schwachen Magnetfeldern eine Erniedrigung, die bei Steigerung des Magnetfeldes in eine Erhöhung übergeht, d. h. das V-H-Diagramm zeigt ein Minimum (siehe Fig. 3a). Die Erniedrigung kann sehr groß sein, bis 500 Volt und mehr. Der Minimalwert, welcher bei einem gewissen Magnetfelde und einem gewissen Drucke erreicht wird, unterschreitet meist das Minimumpotential der Kurve ohne Magnetfeld. Der Einfluß des Magnetfeldes nimmt stark zu (mehr als linear) mit wachsender Funkenlänge (vgl. z. B. die Figg. 5 und 6). Bei hohen Drucken nimmt der Magnetfeldeinfluß ab (s. Fig. 7, Kurve 2b für ΔV_H). Z. B. ist die Erhöhung bei $l = 2{,}00$ mm und $p = 150$ kleiner als ein Sechstel der Erhöhung bei $p = 12{,}00$.

Der Magnetfeldeinfluß war bei beiden elektrischen Feldrichtungen in der Hauptsache derselbe, da nur schwach inhomogene Felder zur Verwendung gelangten. Eine geringe Verschiedenheit konnte nur bei höheren Drucken (oberhalb des Umkehrpunktes für $H = 0$) gefunden werden. Und zwar ist bei $v = 1{,}62$ der Magnetfeldeinfluß bei Feldkonzentration an der Anode (innere Elektrode positiv) bis 10% größer

als bei Feldkonzentration an der Kathode. Da der Unterschied nur gering ist, folgt für den Vergleich der Kurven bei gleichem Magnetfelde, aber verschiedener elektrischer Feldrichtung, daß die gegenseitige Lage der Kurven durch das Magnetfeld nicht wesentlich geändert wird. Die Umkehrpunkte bleiben erhalten, sie rücken mit steigendem Magnetfelde zu höheren Drucken. Das ersieht man aus dem Vergleiche der Fig. 4 mit 4a; in den übrigen Figuren sind die Umkehrpunkte mit dem Zeichen $\hat{\delta}$ angegeben. In Fig. 8 ist bei $v = 1{,}62$ die gegenseitige Lage der Kurven beider elektrischer Feldrichtungen beim Magnetfelde $H = 1630$ Gauss eingezeichnet mit dem Umkehrpunkte W.

§ 9. Zusammenfassend kann man die Beobachtungsresultate wie folgt formulieren:

a) Oberhalb eines gewissen Druckes, der höher als der kritische Druck liegt, ist das Funkenpotential für Feldkonzentration an der Anode kleiner als für Feldkonzentration an der Kathode; unterhalb ist es umgekehrt.

b) Die Umkehrpunkte, welche zwischen den beiden Gebieten liegen, verschieben sich mit wachsender Inhomogenität des elektrischen und mit Steigerung des magnetischen Feldes zu höheren Drucken.

c) Ein wachsendes transversales Magnetfeld bewirkt oberhalb eines Punktes, der nahe am Umkehrpunkte liegt, eine Erhöhung des Funkenpotentials, unterhalb eine Erniedrigung, die bei einem bestimmten Magnetfelde in eine Erhöhung übergeht.

d) Der Magnetfeldeinfluß ist geringer bei hohen Drucken und kleinen Funkenlängen.

e) Er ist größer bei Feldkonzentration an der Anode als bei Feldkonzentration an der Kathode.

Vergleicht man den Magnetfeldeinfluß bei gleicher Funkenlänge, aber verschiedener Inhomogenität des elektrischen Feldes (Apparat Nr. 1 und 2, Figg. 4 und 5), so findet man beim homogeneren Felde einen etwas größeren Einfluß. Der Unterschied ist aber so gering, daß beim vollständig homogenen Felde im wesentlichen dieselben Kurven zu erwarten sind. Die Sätze c) und d) werden daher auch beim vollständig homogenen Felde gelten; bei der geringsten Inhomogenität $v = 1{,}08$ (Apparat Nr. 4) sind sie jedenfalls noch erfüllt (s. Fig. 6).

§ 10. Vergleich mit anderen Autoren. E. Meyer (l. c.) findet im allgemeinen nur Erhöhung des Funkenpotentials durch das transversale Magnetfeld auch bei niedrigen Drucken. Nur bei der kleinsten verwendeten Funkenlänge $l = 0{,}96$ mm hat er wie in dieser Arbeit eine Erniedrigung beobachtet. Daß er bei den anderen Funkenlängen bei tiefen Drucken nur Erhöhung findet, wird an dem Einfluß der Wandung, welcher in § 1 besprochen worden ist, liegen, wie das Meyer (l. c., § 41) schon selbst bemerkt hat.

Willows[1]) hat ähnliche Kurven gefunden wie die hier vorliegenden. Er mißt allerdings die Spannung, die nötig ist eine Entladung dauernd zu erhalten, hat also eine Feldverzerrung, die er nicht genau kennt. Er arbeitet mit einer Entladungsröhre von etwa 10 cm Elektrodenabstand, als Kathode eine Platte, als Anode einen Stab.

Earhart[2]) untersuchte den Einfluß eines longitudinalen Magnetfeldes (das ist ein Magnetfeld, dessen Kraftlinien parallel zu den elektrischen verlaufen) auf eine homogene Funkenstrecke. Er findet einen wesentlich kleineren Einfluß, der aber ganz analog verläuft wie der transversale, welcher in der vorliegenden Arbeit gemessen wurde. Er beobachtet bei einem longitudinalen Magnetfelde von 10000 Gauss nur bei niedrigen Drucken eine Wirkung auf das Funkenpotential, und zwar eine Erniedrigung. So findet er z. B. bei $l = 5$ mm und $p = 0{,}5$ mm Hg nur eine Erniedrigung von 55 Volt, während bei einem transversalen Magnetfelde von nur 705 Gauss eine Erniedrigung von 141 Volt gefunden wird. Dadurch wird folgende schon von Earhart gegebene Bemerkung gestützt: Es wirkt das longitudinale Magnetfeld als transversales auf diejenigen geladenen Teilchen, welche durch elastischen Stoß oder beim Ionisierungsstoß aus der Richtung der elektrischen Kraftlinien abgelenkt werden. Der Magnetfeldeinfluß kann direkt als Maß dieser Ablenkung aufgefaßt werden.

§ 11. Theoretische Behandlung. Es existieren zwei Theorien über das Funkenpotential. Die eine stammt von J. J. Thomson[3]), ist aber bis jetzt noch nie experimentell

1) R. Willows, Phil. Mag. 1. S. 250. 1901.

2) R. Earhart, The Phys. Rev. 3. S. 103. 1914; 4. S. 135. 1914.

3) J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases, 2. ed. S. 490, Cambridge at the University press. 1906.

genau geprüft worden. Die andere ist von Townsend.[1]) Es können zwar gegen diese zweite Theorie folgende Einwände gemacht werden: Sie geht auf den genauen Vorgang der Stoßionisation nicht ein, läßt mehrere heute bekannte Tatsachen unberücksichtigt, z. B. das Resonanzpotential, den lichtelektrischen Effekt, die Primärionisation. Da diese Komplikationen im wesentlichen in die experimentelle Bestimmung von α und β (s. u.) mit einbezogen sind, hat die Theorie in der Hauptsache ein gutes Bild des Vorganges gegeben, und es soll deshalb für diese Theorie der Magnetfeldeinfluß durchgeführt werden.

Es werden dabei folgende Annahmen gemacht:

a) Homogenes elektrisches Feld $\mathfrak{E}$, homogenes transversales Magnetfeld H.

b) Vollständig unelastischer Stoß der geladenen Teilchen, d. h. nach jedem Zusammenstoß, ob ionisierend oder nicht, sei die Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens $v = 0$.

Das Magnetfeld bewirkt nun folgendes: Statt daß die geladenen Teilchen (Elektronen bzw. positive Ionen) in Richtung der elektrischen Kraftlinien laufen, werden sie durch das Magnetfeld H in Zykloidenbahnen[2]) abgelenkt, bis sie mit einem Moleküle zusammenstoßen, wo ein neuer Zykloidenbogen beginnt.

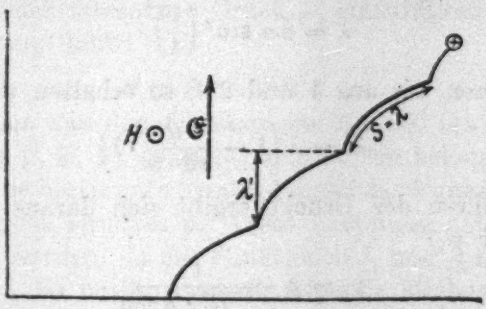


Fig. 9.

Die Bahn eines Teilchens ist in Fig. 9 schematisch dargestellt. Für die Stoßionisation kommt nur die Wegkomponente in Richtung $\mathfrak{E}$, λ', in Betracht, da die kinetische Energie eines

1) J. Townsend, The Theory of Ionisation of Gases by Collision London, Constable u. Co. 1910. — J. Townsend, Phil. Mag. **6**. S. 598. 1903.

2) J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen. Übersetzt von Marx, S. 86. Teubner, Leipzig 1906.

Teilchens diesem Stück proportional ist. Es ist offenbar dasselbe, ob wir das Gas beim Magnetfelde $H = 0$ und der freien Weglänge λ' der Teilchen betrachten oder bei demjenigen Felde H, wo die Projektion des Zykloidenbogens in Richtung $\mathfrak{E}$ gleich λ' ist, d. h. wir können den Magnetfeldeinfluß auffassen als analog wirkend einer Druckerhöhung von dem wirklich herrschenden Drucke p auf einen scheinbaren p_s. Ferner wird die idealisierte

Annahme c) gemacht, daß die Längen der Zykloidenbogen im Mittel gleich der wirklichen mittleren freien Weglänge λ der Teilchen bei $H = 0$ sind. Dann kann dieser scheinbare Druck p_s bestimmt werden als Funktion von p, $\mathfrak{E}$ und H.

Die Projektion des Zykloidenbogens in Richtung $\mathfrak{E}$ ist:

$$\lambda' = a\,(1 - \cos t)\,. \tag{1}$$

Die Bogenlänge s desselben ist:

$$s = 8a \sin^2\left(\frac{t}{4}\right).$$

Dabei bedeutet $a = \frac{\mathfrak{E} \cdot m}{e H^2}$, wo m die Masse und e die Ladung des Teilchens ist. Der Parameter t wird dargestellt durch $t = \frac{e \cdot H}{m} \cdot \tau$, wo τ die Zeit ist. Die zweite Gleichung lautet nach Annahme c):

$$\lambda = 8a \sin^2\left(\frac{t}{4}\right). \tag{2}$$

Eliminieren wir aus 1 und 2 t, so erhalten wir:

$$\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{e H^2}{8\mathfrak{E} \cdot m} \cdot \lambda\right).$$

Durch Einführen der Drucke ergibt sich daraus die gesuchte Funktion für p_s:

$$p_s = p \frac{1}{1 - \frac{H^2 \cdot \lambda\, e/m}{8\mathfrak{E}}}.$$

λ, die mittlere freie Weglänge beim Drucke p ergibt sich aus der bekannten freien Weglänge λ_{at} bei $p_{at} = 760$ mm Hg zu $\lambda = \frac{p_{at}}{p} \lambda_{at}$, so daß die endgültige Formel lautet:

$$p_s = p \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda_{at}\, p_{at}\, e/m}{8}\right) \frac{H^2}{\mathfrak{E} \cdot p}}. \tag{3}$$

Die Klammer besitzt für jedes Gas bzw. stoßendes Teil-

chen eine konstante charakteristische Größe. Rechnen wir die Druckerhöhung $p_s - p$ für die positiven Ionen aus, so wird sie sehr klein, d. h. etwa 14000mal kleiner als für die Elektronen. Sie wird deshalb im folgenden vernachlässigt.

Die Theorie von Townsend ergibt als Bedingung für das Funkenpotential die Gleichung:

$$\alpha = \beta e^{(\alpha - \beta) l} . \tag{4}$$

Darin ist l die Funkenlänge, α bedeutet die Zahl der ionisierenden Stöße eines Elektrons auf 1 cm Weg in Richtung des elektrischen Feldes, β dieselbe Zahl für die positiven Ionen. Das Gesetz von Paschen[1]) fordert folgende Funktionsform für α und β:

$$\alpha = p \cdot f_1 (\mathfrak{E}/p) , \tag{5}$$

$$\beta = p \cdot f_2 (\mathfrak{E}/p) . \tag{6}$$

Die analytische Form der Funktionen f_1 und f_2 ist nicht genau bekannt. Dagegen sind die Funktionen von Townsend für mehrere Gase graphisch zusammengestellt worden. Es gilt ferner die Gleichung für das Funkenpotential:

$$V = \mathfrak{E} \cdot l . \tag{7}$$

Gleichung (4) bis (7) müssen gleichzeitig erfüllt sein. Da in Gleichung (5), falls ein transversales Magnetfeld einwirkt, für den Druck p der scheinbare Druck p_s einzuführen ist, so lautet diese Gleichung dann:

$$\alpha = p_s \cdot f_1 (\mathfrak{E}/p_s) . \tag{5a}$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (3), (4), (5a), (6) und (7) die Größen α, β, $\mathfrak{E}$, p_s, so erhält man für ein bekanntes Magnetfeld H und eine bestimmte Funkenlänge l das Funkenpotential V als Funktion des Druckes p. Diese Rechnung kann aber nicht durchgeführt werden, da die Funktionen f_1 und f_2 nur graphisch gegeben sind. Es mußte deshalb folgende Methode verwendet werden:

Gegeben ist das Magnetfeld H. Man nimmt ein bestimmtes $\mathfrak{E}/p$ an, sucht aus der Kurve Townsends das zugehörige β/p, wählt jetzt ein p, rechnet damit $\mathfrak{E}$, p_s und $\mathfrak{E}/p_s$ aus, sucht aus der graphischen Kurve α/p_s und ermittelt α und β. Mit der Gleichung (4) in der Form:

$$l = \frac{\lg \alpha/\beta}{\alpha - \beta}$$

1) F. Paschen, Wied. Ann. 37. S. 69. 1889.

ergibt sich aus α und β das zugehörige l. Daraus das Funkenpotential V nach $V = \mathfrak{E} \cdot l$.

So ist ein möglicher Fall bestimmt. Da l gegeben ist, muß man p solange variieren, bis man das gegebene l in der gewünschten Annäherung erhält.

§ 12. Beispiele. Es wurde die Rechnung möglichst vollständig durchgeführt für die Funkenlänge $l = 2$ mm, wobei die folgenden Konstanten zugrunde gelegt sind:

$p_{at} = 760$ mm. Für die Elektronen wurde angenommen

$$\lambda_{at} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda_{\text{Molekül}} = 4 \cdot \sqrt{2}\, 0{,}963 \cdot 10^{-5}\,\text{cm},^{1})$$

$$e/m = 1{,}769 \cdot 10^{7}\ \text{E.M.E.}^{2})$$

Die Klammer der Gleichung (3) wird:

$$\frac{e/m \cdot \lambda_{at} \cdot p_{at}}{8} = 9{,}155 \cdot 10^{4}.$$

Die Rechnungsresultate sind in Tabb. 6 und 7 zusammengestellt. Tab. 6 zeigt für die beiden $\mathfrak{E}/p$-Werte 300 und 1000 die ausführlichen Ergebnisse, während Tab. 7 nur die Endresultate enthält.

Tabelle 6.

$\mathfrak{E}/p$	β/p	$\mathfrak{E}$	p	p_s	α	β	H	V	$\mathfrak{E}/p_s$	ΔV
300	0,0090	2120	7,06	—	31,08	0,0636	0	423	300	0
		2140	7,13	7,43	31,07	0,0642	705	428	291	5
		2148	7,16	7,85	31,00	0,0644	1220	429	274	6
		2178	7,26	8,59	30,78	0,065	1630	435	253	12
		2515	8,38	14,79	30,00	0,0754	3160	503	170	80
1000	0,265	1800	1,80	—	18,90	0,477	0	359	1000	0
		1630	1,68	2,00	19,28	0,445	705	336	839	−23
		1400	1,40	4,57	20,43	0,372	1220	280	306	−79
		1697	1,70	10,82	19,08	0,450	1630	338	156	−21

Um die Theorie mit den Beobachtungen vergleichen zu können, wurde mit den Magnetfeldern, welche bei den Messungen verwandt worden waren, gerechnet. ΔV bezeichnet in Tabb. 6, 7 und 8 nicht den Magnetfeldeinfluß bei konstantem Drucke p, sondern bei konstantem $\mathfrak{E}/p$, da er aus der Kolonne für V erhalten wird als Differenz von V bei einem Magnetfelde gegen V bei $H = 0$. Wie wir später sehen werden, hat der

1) Landolt u. Börnstein, Tabellenwerk S. 143. 1912.
2) Landolt und Börnstein, Tabellenwerk S. 1232. 1912.

Tabelle 7.

$\mathfrak{E}/p$	β/p	$\mathfrak{E}$	p	H	V	ΔV
175	0,00186	2960	16,95	0	594	0
		3020	17,23	1630	604	10
		3260	18,61	3160	652	58
200	0,0020	2750	13,76	0	549	0
		2770	13,85	705	554	5
		2832	14,16	1220	566	7
		2856	14,28	1630	571	22
		3045	15,23	3160	609	60
		3430	17,15	4560	686	137
500	0,053	1770	3,55	0	354	0
		1750	3,50	705	350	−4
		1665	3,33	1220	333	−21
		1705	3,41	1630	341	−13
700	0,142	1690	2,42	0	338	0
		1617	2,31	705	323	−15
		1491	2,13	1220	298	−40
		1555	2,25	1630	311	−27
2000	0,678	2520	1,26	0	502	0
		2200	1,10	705	428	−74

Magnetfeldeinfluß bei $\mathfrak{E}/p$ und p konstant stets das gleiche Vorzeichen, d. h. es tritt in beiden Fällen zugleich entweder Erhöhung oder Erniedrigung ein.

Für die Funkenlängen 1 und 5 mm wurden auch einige Punkte ausgerechnet. Drei davon mögen in Tab. 8 angegeben werden.

Tabelle 8.

l	$\mathfrak{E}/p$	p	H	V	ΔV
1	1000	3,59	0	359	0
		3,40	1220	340	−19
		3,28	1630	328	−31
1	700	4,83	0	338	0
		4,14	2560	290	−48
		4,43	3160	310	−28
5	175	6,78	0	594	0
		7,31	1220	640	46
		7,86	1630	687	93

Die Durchrechnung der Theorie ist vorläufig beschränkt wegen der unzureichenden Kenntnis der Funktionen f_1 und f_2 in Gleichung (5) und (6). $a/p = f_1$ wurde aus neueren Angaben

von Townsend[1]) graphisch zusammengestellt von $\mathfrak{E}/p = 100$ bis 1000. Oberhalb 1000 wurde bis 2000 extrapoliert.

In Fig. 10 ist die ausgezogene Kurve die verwendete Funktion f_1. Da die Form dieser Funktion für $\mathfrak{E}/p < 100$ nicht bekannt ist, wird die Theorie nur für den ersten ganzen Zykloidenbogen durchgeführt und gerechnet bis $\mathfrak{E}/p_s = 100$. $\beta/p = f_2$ ist leider noch unvollständiger vorhanden als α/p. In Tabb. 6

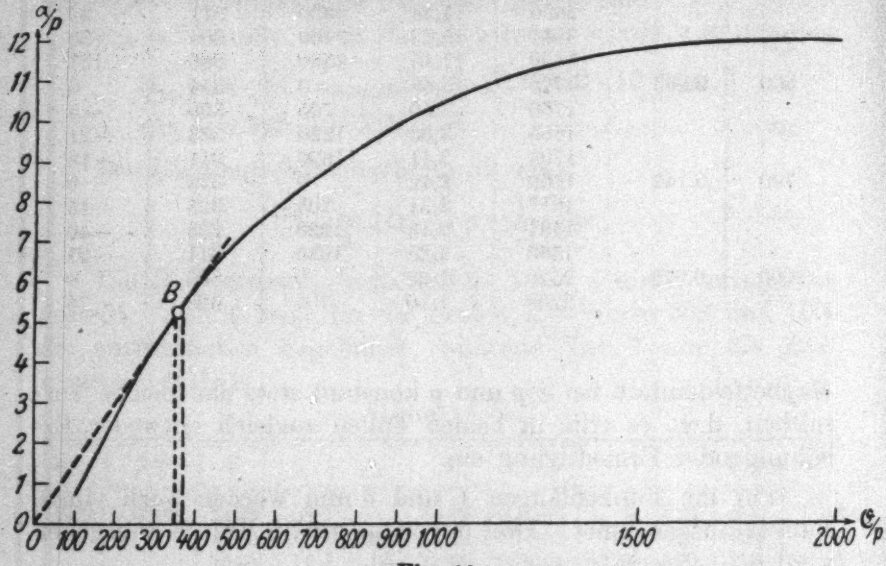


Fig. 10.

und 7 sind alle verwendeten Werte von β/p angegeben, die auch einer graphischen Darstellung entnommen sind. Die Werte der Tabb. 6 und 7 sind in Fig. 11 dargestellt.

Zur Kontrolle müssen in dieser Figur die Punkte mit gleichem $\mathfrak{E}/p$ auf einer Geraden[2]) liegen, die durch den Punkt $V = p = 0$ geht, was aus der Gleichung $V = C \cdot l \cdot p$, wo das konstante $\mathfrak{E}/p = C$ bedeutet, folgt. Man erkennt aus der Lage dieser Geraden zu den Funkenpotentialkurven folgendes: Man wähle auf einer beliebigen Geraden (z. B. $\mathfrak{E}/p = 200$) den

1) J. Townsend, The Theory of Ionisation of Gases by Collision S. 19 u. 20. 1910. — J. Townsend, Electricity of Gases S. 317, Oxford, Clarendon Press. 1915.

2) Die Geraden sind in Fig. 11 eingezeichnet, die Zahl bedeutet dabei das zugehörige $\mathfrak{E}/p$.

Schnittpunkt mit einer Funkenpotentialkurve K_1 (für irgendein Magnetfeld z. B. $H = 1630$ Gauss). Das zugehörige Funkenpotential sei V_1. Dann schreite man auf der Geraden zu einem höheren Funkenpotentialwerte V_2 und gelange auf die Funkenpotentialkurve K_2. Es ist also $V_2 > V_1$. Andererseits schreiten

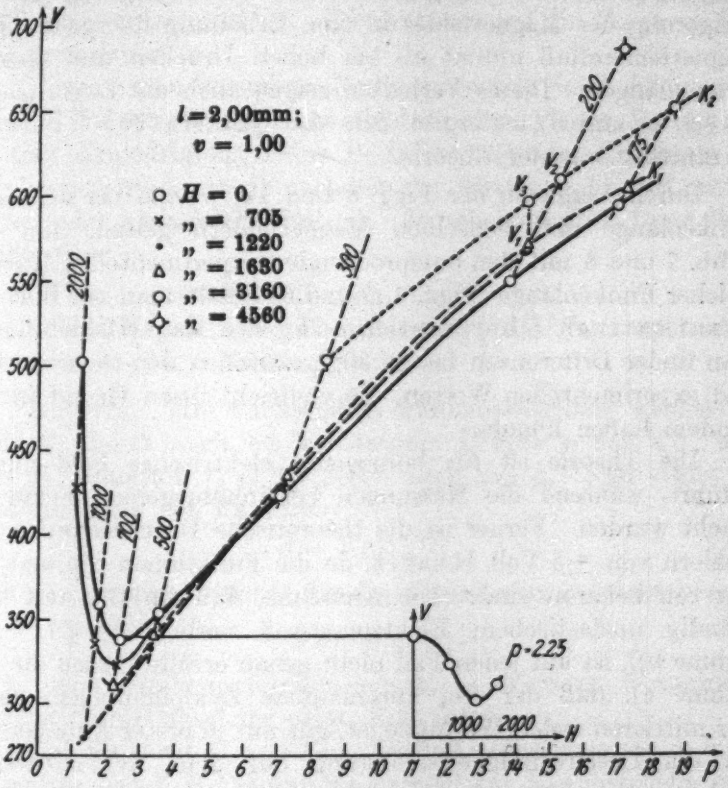


Fig. 11.

wir von V_1 aus bei konstantem Drucke p nach K_2, d. h. parallel zur V-Achse. Der Schnittpunkt mit K_2 sei V_3. Es ist zu sehen, daß bei allen vorliegenden Funkenpotentialkurven in jedem Falle V_2 stets oberhalb der Ausgangskurve K_1 liegt. Daraus folgt $V_3 > V_1$. Die ganz analoge Überlegung gilt für $V_2 < V_1$. Der Magnetfeldeinfluß $V_2 - V_1$ (bei konstantem $\mathfrak{E}/p$) hat also stets dasselbe Vorzeichen wie der Magnetfeldeinfluß $V_3 - V_1$ (bei konstantem Drucke p), d. h. wenn im ersten Falle Erhöhung eintritt, so tritt auch im zweiten stets Erhöhung ein.

§ 13. Der Vergleich der Theorie mit den Messungen. Betrachtet man die theoretischen Kurven in Fig. 11, für $l = 2$ mm, ferner Tabb. 6 und 7, so findet man folgendes: Oberhalb eines Druckes, welcher größer ist als der kritische, bewirkt das transversale Magnetfeld nur eine Funkenpotentialerhöhung, unterhalb geben schwache Magnetfelder eine Erniedrigung, die bei Steigerung des Magnetfeldes in eine Erhöhung übergeht. Der Magnetfeldeinfluß nimmt ab bei hohen Drucken und kleinen Funkenlängen. Dieses Verhalten zeigen auch die Experimente (s. § 9, c) und d), es ergibt sich also qualitative Übereinstimmung mit der Theorie.

Durch Vergleich der Figg. 3 und 11, welche bei derselben Funkenlänge und denselben Magnetfeldern gelten, und der Tabb. 7 und 8 mit den entsprechenden experimentellen Kurven gleicher Funkenlänge (Figg. 4, 5 und 6) erhält man ein Bild der quantitativen Übereinstimmung der Magnetfeldeinflüsse. Man findet Differenzen bis zu 30% zwischen den theoretischen und experimentellen Werten, die vielleicht ihren Grund in folgendem haben können:

Die Theorie ist für homogenes elektrisches Feld durchgeführt, während die Messungen bei inhomogenem Felde gemacht wurden. Ferner ist die theoretische Durchrechnung mit Fehlern von ± 5 Volt behaftet, da die Funktionen α/p und β/p nur roh bekannt sind. Die Annahme, daß ein Gas mit vollständig unelastischem Elektronenstoß vorliege [s. § 11, Annahme b)], ist auf jeden Fall nicht genau erfüllt. Auch die Annahme c), daß der frei durchlaufene Zykloidenbogen gleich der mittleren freien Weglänge ist, gilt nur in erster Annäherung, da die Geschwindigkeitsänderung auf dem Zykloidenbogen nicht in Betracht gezogen wird.

Systematische Abweichungen ergeben sich folgende: Im allgemeinen ist der theoretisch erhaltene Magnetfeldeinfluß zu groß, und zwar um so mehr, je größer das Magnetfeld ist. Nur bei Erniedrigung und ganz schwachen Magnetfeldern scheint der theoretische Einfluß zu klein.

Das Resultat, daß durch das Magnetfeld in der Hauptsache eine Einwirkung auf die Elektronenbahnen stattfindet, wird gestützt durch die Beobachtung, daß der Magnetfeldeinfluß bei elektrischer Feldkonzentration an der Anode größer ist als bei Feldkonzentration an der Kathode (s. § 9, e).

Denn im ersten Falle gehen mehr Elektronen durch das stärkere Feld als im letzten Falle.

§ 14. Weitere Schlüsse aus der Theorie. Es soll noch untersucht werden, worauf es zurückzuführen ist, daß durch das Magnetfeld bald Erhöhung, bald Erniedrigung des Funkenpotentials eintritt. Die Antwort auf die Frage sei vorweg genommen:

Nimmt man irgendein Funkenpotential bei beliebigem p, l und H und steigert das Magnetfeld um einen kleinen Betrag $d H$, so tritt Erniedrigung, keine Beeinflussung oder Erhöhung des Funkenpotentials ein, je nachdem der Wert von $\partial \alpha/\partial H$ größer, gleich oder kleiner als Null ist. In schematischer Darstellung heißt das:

Satz I.[1])
$$\partial \alpha/\partial H \begin{cases} > 0 \text{ Erniedrigung} \\ = 0 \text{ keine Beeinflussung} \\ < 0 \text{ Erhöhung} \end{cases} \Big\} \text{ des Funkenpotentials}$$

Beweis. Mit wachsendem Funkenpotentiale wächst das Feld $\mathfrak{E}$, damit auch bei konstantem Drucke p das $\mathfrak{E}/p$, und, wie die Funktion $f_2 = \beta/p$ zeigt, auch das β. Nun ergibt die Untersuchung der Funktion:

$$\alpha = \beta\, e^{(\alpha - \beta) l},$$

daß im Bereiche, welcher für die Versuche in Betracht kommt,

$$\partial \alpha/\partial \beta < 0,$$

d. h. beim Funkenpotentiale nimmt α ab, wenn β zunimmt, woraus unmittelbar der obige Satz folgt.

Daß für $\partial \alpha/\partial H = 0$ kein Einfluß vorhanden ist, d. h. die Tangente des V-H-Diagramms parallel zur H-Achse geht, sieht man ohne weiteres so ein. Das Magnetfeld wirkt nur auf das α; ist hier der Einfluß des Magnetfeldes gleich Null, so ist überhaupt kein Einfluß möglich.

Die Funktion für α lautet nach Gleichung (5a):

$$\alpha = p_s f_1 (\mathfrak{E}/p_s),$$

da das H nur in p_s vorkommt, kann man für $\partial \alpha/\partial H$ schreiben:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial H} = \frac{\partial \alpha}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial H}.$$

1) Diesen Satz hat Townsend schon ausgesprochen, ohne näher darauf einzutreten, s. J. Townsend, Phil. Mag. 26. S. 730. 1913.

Der zweite Faktor mittels Gleichung (3) ausgerechnet, ergibt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial H} = \frac{\partial \alpha}{\partial p_s} \cdot \left\{ 2 p a' \frac{1}{1 - a' H^2} \cdot H \right\} \cdot \tag{8}$$

Dabei ist a' eine Konstante und bedeutet

$$a' = \frac{\lambda_{a\,l}\, p_{a\,l}\, e/m}{8 \mathfrak{E} \cdot p} .$$

Die geschweifte Klammer der Gleichung (8) ist stets positiv; damit spezialisiert sich der Satz I wie folgt:

Satz II. $\partial \alpha / \partial p_s \begin{cases} > 0 \text{ Erniedrigung} \\ = 0 \text{ keine Beeinflussung} \\ < 0 \text{ Erhöhung} \end{cases}$ des Funkenpotentials.

§ 15. Aus der Gleichung (8) für $\partial \alpha / \partial H$ ergibt sich ferner: Für $H = 0$ ist $\partial \alpha / \partial H$ stets auch gleich Null, d. h. die Anfangstangente im V-H-Diagramm ist parallel zur H-Achse. Dieses Ergebnis stimmt mit dem Experimente überein (s. Fig. 3b und Fig. 4b).

§ 16. Die Untersuchung der Funktion α ist von Townsend[1]) durchgeführt worden. Sie zeigt folgendes: Ob das $\partial \alpha / \partial p$ positiv oder negativ ist, hängt nur ab von $\mathfrak{E}/p$. Überschreitet $\mathfrak{E}/p$ einen gewissen Wert, dann ist $\partial \alpha / \partial p > 0$; unterschreitet $\mathfrak{E}/p$ diesen Wert, so ist $\partial \alpha / \partial p < 0$. Die Bedingung dafür, daß $\partial \alpha / \partial p = 0$, lautet: $\partial \alpha / \partial p = f_1(\mathfrak{E}/p) - f_1'(\mathfrak{E}/p)\, \mathfrak{E}/p = 0$, wobei f_1' die Ableitung nach $\mathfrak{E}/p$ bedeutet. Es ergibt sich nur ein bestimmtes $\mathfrak{E}/p$, bei dem diese Bedingung erfüllt ist.

Graphisch findet man diesen Punkt wie folgt: Man zieht im Diagramm $\alpha/p - \mathfrak{E}/p$ durch den Nullpunkt eine Tangente an die Kurve. Der Berührungspunkt derselben gibt den gesuchten Wert (s. Punkt B in Fig. 10). Bei der verwendeten Kurve liegt B bei $\mathfrak{E}/p = 350$ bis 370 $\quad \alpha/p = 5{,}15$ bis $5{,}40$.

Bezeichnen wir dies kritische $\mathfrak{E}/p$ mit $(\mathfrak{E}/p)_k$, so ergibt sich der

Satz III. $\mathfrak{E}/p_s \begin{cases} > (\mathfrak{E}/p)_k \text{ Erniedrigung} \\ = (\mathfrak{E}/p)_k \text{ keine Beeinflussung} \\ < (\mathfrak{E}/p)_k \text{ Erhöhung} \end{cases}$ des Funkenpotentials.

§ 17. Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen: Überall dort, wo das Magnetfeld in der Hauptsache die Elektronenbahnen beeinflußt, hängt die Erhöhung bzw. Er-

1) J. Townsend, Phil. Mag. 1. S. 214. 1901.

niedrigung des Funkenpotentials lediglich ab von der durch das Magnetfeld hervorgerufenen Ab- bzw. Zunahme der ionisierenden Zusammenstöße der Elektronen pro 1 cm ihres Weges in Richtung des elektrischen Feldes. Der dazwischenliegende Grenzfall ist vorhanden, wenn bei einer kleinen Steigerung von H das α, d. h. die Anzahl der Ionisationsstöße des Elektrons konstant bleibt. Physikalisch bedeutet das: die Elektronen werden durch das Magnetfeld aus der elektrischen Feldrichtung abgelenkt und erlangen deshalb auf ihrer freien Weglänge eine geringere Energie, welche eine Abnahme der ionisierenden Stoßzahl bedingt. Diese Abnahme wird gerade kompensiert durch die Zunahme der Stoßzahl der Elektronen gezählt auf 1 cm in Richtung des elektrischen Feldes.[1])

Kann der Magnetfeldeinfluß als scheinbare Druckerhöhung für den Elektronenstoß aufgefaßt werden, so tritt dieser Grenzfall bei einem bestimmten kritischen Verhältnis der elektrischen Feldstärke zum scheinbaren Drucke $(\mathfrak{E}/p)_k$ ein. Ist aber das Verhältnis $\mathfrak{E}/p_s$ kleiner, so tritt Erhöhung, ist es größer, so tritt Erniedrigung des Funkenpotentials ein.

§ 18. Das letzte Ergebnis läßt sich an der Erfahrung, wie folgt prüfen: Für das Magnetfeld $H = 0$ geht p_s über in p, damit $\mathfrak{E}/p_s$ in $\mathfrak{E}/p$. Für den Grenzfall, daß das Funkenpotential durch ein kleines Magnetfeld dH nicht beeinflußt wird, sollte deshalb gelten: $\mathfrak{E}/p = (\mathfrak{E}/p)_k = 350$ bis 370.

Aus den experimentellen Kurven lassen sich die p und V-Werte für diese Grenzfälle entnehmen. Dabei sei bemerkt, daß es sich hier nur um eine untere Grenze handeln kann, da die kleinsten verwendeten Magnetfelder noch von beträchtlicher Größe waren. Tab. 9 enthält die Resultate:

---

1) H. Greinacher, Verh. d. phys. Ges. 17. S. 131, 1015; J. Kohn, Verh. d. phys. Ges. 21. S. 390, 1919.

Greinacher und Kohn haben den Einfluß eines transversalen Magnetfeldes auf den Strom einer Ionisierungskammer untersucht, wobei allerdings, wie bei Meyer die Elektronen an die Wandung geschleudert wurden, und deshalb die Stromwerte beeinflußt sein können. Sie finden bei niedrigen Drucken eine Stromerhöhung, die bei steigendem Magnetfelde in eine Stromerniedrigung übergeht, bei hohen Drucken nur eine Stromerniedrigung. Dieses Ergebnis ist analog zu den Resultaten der vorliegenden Arbeit und kann wahrscheinlich auch ähnlich gedeutet werden.

Tabelle 9.

App. Nr.	l mm	p	V	pl	$\mathfrak{E}/p$	$(\mathfrak{E}/p)\,k$
1	5,01	2,0	380	1,002	373	theoretisch
2	5,00	1,9	356	0,95	375	350—370
3	2,00	5,5	369	1,1	336	
4	0,99	14,19	412	1,402	375	

Dabei wird als elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ der inhomogenen Zylinderfunkenstrecke das mittlere elektrische Feld genommen nach der Gleichung: $\mathfrak{E} = V/l$, so daß $\mathfrak{E}/p = V/p \cdot l$ gilt. Wie man erkennt, stimmen die $\mathfrak{E}/p$ befriedigend mit dem theoretischen Werte 350—370 überein.

§ 18. Die theoretische Behandlung des Funkenpotentials für ein Zylinderfeld ist recht schwierig. Townsend[1]) hat für eine ganz kleine Feldkonzentration eine theoretische Betrachtung durchgeführt. Die vorliegenden Beobachtungen kommen den Annahmen Townsends nahe, und sie sollen deshalb mit der Theorie verglichen werden. Townsend findet den Satz:

$\frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\mathfrak{E}} > \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathfrak{E}}$ Funkenpotential kleiner bei Feldkonzentration an der Kathode.

$\frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\mathfrak{E}} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathfrak{E}}$ Umkehrpunkt (s. § 9a und b).

$\frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\mathfrak{E}} < \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\alpha\mathfrak{E}}$ Funkenpotential kleiner bei Feldkonzentration an der Anode.

Wie schon Townsend erwähnt, ist für eine sichere Entscheidung die Funktion $\beta/p = f_2(\mathfrak{E}/p)$ für $\mathfrak{E}/p < 200$ zu wenig genau bekannt. Man ist auf graphische Extrapolation angewiesen. Diese wurde ausgeführt für einen Umkehrpunkt bei $\mathfrak{E}/p = 250$ (s. Tab. 5, § 8), und es ergab sich, daß der obige Satz sehr wohl erfüllt sein kann. Da diese Extrapolation das Resultat unsicher macht, so wird darauf verzichtet, die Zahlenwerte hier anzugeben.

Zum Schlusse ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Edgar Meyer zu danken für die Anregung, sein Entgegenkommen und das stetige Interesse an meiner Arbeit.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

1) J. Townsend u. P. Edmunds, Phil. Mag. 27. S. 796. 1914.

(Eingegangen 1. Juni 1922.)

5. *Eine Differentialform der Zustandsgleichung bei hohem Druck;* *von Victor Fischer.*

1. Ableitung der Gleichung.

Die Zustandsdiagramme für Kohlensäure zeigen, daß mit wachsendem Druck p bei abnehmender Temperatur T die Abhängigkeit der spezifischen Wärme c_p vom Druck geringer wird, so daß wir bei hohen Drucken und niederen Temperaturen angenähert setzen können:

(1) $$c_p = F(T),$$

womit

(2) $$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = 0$$

wird. Nach einer bekannten Beziehung ist

(3) $$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -AT\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p.$$

Es ergibt sich daher aus (2) und (3)

(4) $$T\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T}\left(T^2\frac{\partial\left(\frac{v}{T}\right)}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right]_p = 0.$$

Aus Gleichung (4) folgt

(5) $$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = f(p)$$

und

(6) $$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = f_1(p)$$

bzw.

(7) $$Tf(p) - v = f_1(p).$$

Setzen wir

(8) $$f_1(p) = -b,$$

so können wir die Gleichungen (6) und (7) auch schreiben:

(9) $$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = Tf(p) = v - b.$$

2. Verwendung der Amagatschen Versuchswerte.

Zur zahlenmäßigen Prüfung der Gleichung (9) dienen uns die Amagatschen Versuchswerte. In der untenstehenden Tabelle I ist aus diesen für Wasser $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ für verschiedene Drucke berechnet und ebenso der Wert b.[1]) Wenn wir von einigen Unregelmäßigkeiten zwischen den Drucken von 3000 bis 1500 Atm. bei den Temperaturen von 1,05° und 3,225° C. absehen, so gilt Gleichung (9) nach Tabelle I für den Bereich links von der strichpunktierten Linie.

Wir können in einem Diagramm die Werte von $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ als Ordinaten und diejenigen von t als Abszissen auftragen, doch müßten, um einen genügenden Überblick über den Verlauf der sich aus Tabelle I ergebenden Isobaren, sowie über den Geltungsbereich von Gleichung (9) zu erhalten, die Versuche über einen größeren Druck- und Temperaturbereich ausgedehnt werden. Durch Ergänzung der Tabelle I mit Hilfe der Tabelle (62) von Amagat, die sich über einen Bereich von 1 bis 1000 Atm. und 0° bis 198° C. erstreckt, sehen wir, daß sich diese Isobaren bei ungefähr 50° C. schneiden. Dies stimmt damit überein, daß sich in Tabelle I bei 44,65° C. der Wert von $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ mit dem Druck sehr wenig ändert.

Des weiteren erkennen wir aus Tabelle I, daß der Wert b mit abnehmendem Druck wächst. In der untenstehenden Tabelle II sind die aus dem Bereiche links von der strichpunktierten Linie der Tabelle I als Mittelwerte bestimmten Werte von b für die verschiedenen Drucke eingetragen. Die Angaben der Rauminhalte in der Tabelle 63 von Amagat, welche zur Berechnung von Tabelle I diente, sind Verhältniswerte, die sich auf den Rauminhalt 1 bei dem Druck von 1 Atm. und der Temperatur von 0° C. beziehen. Berücksichtigen wir, daß bei 1 Atm. und 0° C. der Rauminhalt von 1 kg Wasser 1,00013 l beträgt, so ergeben sich aus den berechneten Verhältniswerten von b die in der letzten Reihe von Tabelle II eingetragenen Werte von b in m^3/kg.

1) Vgl. E. H. Amagat, Memoires sur l'élasticité et la dilatation des fluides jusqu'aux très hautes pressions, Ann. chim. phys. 29. S. 545. 1893. Tabelle 63.

Tabelle I.

$p =$	3000		2500		2000		1500		1000		500		1 Atm.	
	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b
$t = 1{,}05°$	0,00033	0,80821	0,00033	0,82011	0,00031	0,83907	0,00024	0,87338	0,00024	0,89048	0,00014	0,93808	−0,000057	1,01556
3,225°	0,00031	0,8372	0,00038	0,80636	0,00033	0,83357	0,00029	0,85962	0,00022	0,89598	0,00013	0,94084	−0,0000044	1,00109
5,6°	0,00038	0,79431	0,00034	0,81745	0,00036	0,82525	0,00032	0,85130	0,00032	0,86825	0,00014	0,93807	0,000024	0,99321
8,475°	0,00037	0,79710	0,00034	0,81745	0,00034	0,83085	0,00031	0,85409	0,000215	0,89763	0,00017	0,92967	0,000068	0,98090
12,175°	0,00037	0,79711	0,00040	0,80045	0,00031	0,83985	0,00030	0,85692	0,000265	0,88348	0,00023	0,91268	0,000115	0,96759
17,325°	0,00038	0,79425	0,00036	0,81193	0,00034	0,83074	0,000325	0,84975	0,00029	0,87681	0,00021	0,91843	0,00018	0,94892
24,925°	0,00039	0,79133	0,00040	0,800205	0,00039	0,81606	0,00035	0,84240	0,00035	0,85870	0,00030	0,89205	0,00026	0,92542
34,95°	0,00040	0,78832	0,00039	0,80322	0,00039	0,81607	0,00042	0,82124	0,000395	0,84508	0,00036	0,87391	0,00034	0,90119
44,65°	0,00043	0,77891	0,00043	0,790685	0,00044	0,80043	0,00042	0,82124	0,00039	0,84667	0,00042	0,85511	0,00042	0,87610

Tabelle III.

$p =$	3000		2500		2000		1500		1000		500		1 Atm.	
	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b
$t = 5{,}4°$	0,00048	0,7077	0,00054	0,7048	0,00061	0,7019	0,00066	0,7083	0,00082	0,6892	0,00102	0,6680	0,00154	0,5796
15,5°	0,00049	0,7048	0,00054	0,7048	0,000585	0,7090	0,00068	0,7026	0,00081	0,6920	0,00105	0,6595	0,00164	0,5512
25,275°	0,00044	0,7195	0,00054	0,7048	0,00064	0,69285	0,00068	0,7026	0,00084	0,6832	0,00106	0,6566	0,00172	0,5277
35,4°	0,000475	0,7089	0,00053	0,7078	0,00057	0,7141	0,00070	0,6966	0,00084	0,6832	0,00106	0,65665	0,00183	0,4944
35,2°	0,00054	0,6885	0,00053	0,7079	0,00063	0,6953	0,00075	0,6809	0,00084	0,6832	0,001115	0,6394		

Tabelle II.

$p =$	3000	2500	2000
$b =$	0,79943	0,810565	0,83314
$b =$	0,00079953	0,00081067	0,00083325 m³/kg
$p =$	1500	1000	500 Atm.
$b =$	0,85906	0,888085	0,93900
$b =$	0,00085917	0,00088820	0,00093912 m³/kg

Wir wollen die Werte von b aus Tabelle II mit der unveränderlichen Größe b der Zustandsgleichung von Van der Waals vergleichen, die gegeben ist durch

$$\frac{v_k}{b} = 3, \tag{10}$$

wobei v_k den kritischen Rauminhalt bedeutet. Bei Wasser ist

$$v_k = 0{,}0029 \text{ m}^3/\text{kg},$$

somit wird die Van der Waalssche Größe hierfür

$$b = \frac{0{,}0029}{3} = 0{,}00097 \text{ m}^3/\text{kg}.$$

Aus der Tabelle II ergibt sich bei einem Druck von 3000 Atm. das Verhältnis

$$\frac{v_k}{b} = 3{,}6$$

und bei einem Drucke von 500 Atm.

$$\frac{v_k}{b} = 3{,}1\,.$$

Wir sehen mithin, daß nach den Amagatschen Versuchswerten die Abweichungen des Verhältnisses $\frac{v_k}{b}$ von dem aus der Van der Waalsschen Größe b folgenden Wert bei dem kleinsten Druck der Tabelle II geringer sind, als bei dem höchsten.

In Tabelle III sind nun die Werte von $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ und diejenigen von b für Äther eingetragen.[1]) Betrachten wir die Werte der Tabelle III links von der strichpunktierten Linie, so erkennen wir, daß die Werte von b in diesem Temperatur- und

1) Vgl. E. H. Amagat, Ann. chim. phys. 29. S. 506. 1893. Tabelle 29.

Druckbereich nahezu unverändert bleiben und daß die von Gleichung (9) geforderte gleichzeitige Unabhängigkeit des Wertes $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ von der Temperatur ungefähr besteht. Aus Tabelle III ersehen wir eigentlich, daß sich die Werte von b und $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ im Druckbereich von 3000 bis 500 Atm. bei gleichbleibendem Druck mit der Temperatur wenig ändern, jedoch zeigen die Werte von b bei 1000 und 500 Atm. eine Abnahme mit dem Druck, was für b nicht wahrscheinlich erscheint, weshalb das Gebiet von 1000 bis 500 Atm. zunächst nicht in den Geltungsbereich der Gleichung (9) einbezogen wurde. Wir sehen ferner, daß die Isobaren, die sich aus Tabelle III in einem $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$, t-Diagramm ergeben, sich mit abnehmendem Druck von der t-Achse entfernen. Schließen wir in Analogie zu Tabelle I für Wasser darauf, daß sich auch für Äther, die Isobaren schneiden, so müssen diese bei entsprechend tieferen Temperaturen das umgekehrte Verhalten zeigen und ist für die tieferen Temperaturen ein Anwachsen des Wertes von b mit abnehmendem Druck zu erwarten.

Wir wollen nun den für 3000 Atm. aus der Tabelle III sich ergebenden Mittelwert von b bestimmen. Dieser wie bei Wasser auf den Rauminhalt eins bei 0° C. und einer Atm. bezogene Verhältniswert ergibt sich zu

$$b = 0{,}7059\,,$$

da der spezifische Rauminhalt des Äthers bei 0° C. und einer Atm. gleich 1,35135 l/kg ist, so folgt aus dem obigen Verhältniswert

$$b = 0{,}0009539\ \mathrm{m^3/kg}.$$

Tabelle IV bezieht sich auf Stickstoff. Hierfür stehen nur zwei Temperaturreihen aus dem Amagatschen Versuchswerten zur Verfügung.[1]) Für jene kann die Gleichung (9) als erfüllt betrachtet werden. Wenn wir von einer Unregelmäßigkeit bei 2900 Atm. absehen, wächst der Wert von b zwischen 3000 und 2700 Atm. mit abnehmendem Druck.

---

1) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. 29. S. 101. 1893. Tabelle 5.

Tabelle IV.

$p =$	3000		2900		2800	
	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b
$t = 8°$	0,00000147	0,0010977	0,000002125	0,0009219	0,00000153	0,0011073
29,8°	0,00000147	0,0010976	0,000001485	0,0011068	0,00000154	0,0011044

$p =$	2700		2600		2500	
	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b
$t = 8°$	0,00000156	0,0011131	0,000001625	0,0011094	0,00000175	0,0010903
29,8°	0,00000159	0,0011046	0,00000170	0,0010877	0,00000174	0,0010931

Es ist nun der sich aus Tab. IV ergebende Mittelwert von b bei 3000 Atm.

$$b = 0{,}00109765$$

und bei 2700 Atm.

$$b = 0{,}00110885.$$

Der spezifische Rauminhalt des Stickstoffes bei 0° C. und einer alten Atmosphäre, gleich 760 mm Hg, beträgt 0,799 m³/kg. Es folgt daher aus den obigen Verhältniszahlen für 3000 Atm.

$$b = 0{,}00087702 \text{ m}^3/\text{kg}$$

und für 2700 Atm.

$$b = 0{,}00088597 \text{ m}^3/\text{kg}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{v_k}{b} = \frac{3{,}1}{0{,}87702} = 3{,}53$$

bzw.

$$\frac{v_k}{b} = \frac{3{,}1}{0{,}88597} = 3{,}5.$$

Tab. V bezieht sich auf Wasserstoff.[1]) Der Wert von b wächst mit abnehmenden Druck im Bereich dieser Tabelle. Es ist der sich aus derselben ergebende Mittelwert von b bei 2800 Atm.

$$b = 0{,}0006585$$

und bei 2500 Atm.

$$b = 0{,}0006742.$$

1) Vgl. E. H. Amagat, Ann. chim. phys. 29. S. 99. 1893. Tabelle 4.

Tabelle V.

$p =$	2800		2700	
	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b
$t = 7{,}7°$	0,00000133	0,0006614	0,00000136	0,0006707
$31{,}35°$	0,00000135	0,0006556	0,00000138	0,0006650

$p =$	2600		2500	
	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b	$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$	b
$t = 7{,}7°$	0,00000149	0,0006528	0,00000149	0,0006713
$31{,}35°$	0,00000138	0,0006845	0,00000147	0,0006771

Der spezifische Rauminhalt des Wasserstoffes bei 0° C. und einer alten Atmosphäre beträgt 11,123 m³/kg. Es folgt daher aus den obigen Verhältniszahlen für 2800 Atm.

$$b = 0{,}0073245 \text{ m}^3/\text{kg}$$

und für 2500 Atm.

$$b = 0{,}0074991 \text{ m}^3/\text{kg}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{v_k}{b} = \frac{30}{7{,}3245} = 4{,}1$$

bzw.

$$\frac{v_k}{b} = \frac{30}{7{,}4991} = 4.$$

3. Anwendung des Nernstschen Wärmetheorems.

Im Gebiet unendlich kleiner Temperatur können wir

$$T = dT \tag{11}$$

schreiben und es wird nach dem Nernstschen Wärmetheorem

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = 0. \tag{12}$$

Wir können nun zwei Fälle voraussetzen:

1. Der Körper geht stetig aus dem flüssigen in den glasartigen Zustand über und die Isobaren eines $c_p\,T$-Diagramms verlaufen stetig gegen die absolute Temperatur Null ohne sich vorher zu schneiden, wobei sie nach dem Nernstschen

Wärmetheorem im Gebiet unendlich kleiner Temperatur Null werden und die T-Achse tangieren. Wir können dann Gleichung (2) bis zur Erreichung unendlich kleiner Temperatur als angenähert geltend ansehen, und es folgt nach (11) und (12) aus Gleichung (9)

$$v_T = d\,T \cong b. \tag{13}$$

b stellt uns daher nach (13) angenähert den spezifischen Rauminhalt des Körpers bei der absoluten Temperatur Null dar.

2. Der Körper geht vom flüssigen in den kristallinischen Zustand über, dann bestehen bei der Kristallisationstemperatur für $v, \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ und c_p Unstetigkeiten. Nehmen wir an, daß für die spezifischen Wärmen c_p auch im kristallinischen Zustand die Gleichungen (1) und (2) angenähert gelten, so können wir folgende Betrachtung anstellen, für welche wir die Bezeichnungen benutzen:

T_k Kristallisationstemperatur.

s_k bzw. s_f spezifischer Rauminhalt im kristallinischen bzw. flüssigen Grenzzustand.

dv_k bzw. dv_f Änderung des spezifischen Rauminhaltes im kristallinischen bzw. flüssigen Grenzzustand.

i_k bzw. i_f Wärmeinhalt bei unverändertem Druck im kristallinischen bzw. flüssigen Grenzzustand.

r_s Schmelzwärme.

c_{pk} bzw. c_{pf} wahre spezifische Wärme bei unverändertem Druck im kristallinischen bzw. flüssigen Grenzzustand.

$A = \frac{1}{427}$ mechanisches Wärmeäquivalent.

Wo die Isobare des Flüssigkeitsgebietes den Zustand erreicht, in dem die Kristallisation beginnt, gilt nach Gleichung (6)

$$T_k \left(\frac{\partial v_f}{\partial T}\right)_p - s_f = f_1(p). \tag{14}$$

Wo die Isobare des Kristallgebietes den Zustand erreicht, in dem das Schmelzen beginnt, gilt nach (9) und (13)

$$T_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial T}\right)_p - s_k = -b. \tag{15}$$

Aus Gleichung (14) und (15) folgt

$$T_k \left[\left(\frac{\partial v_f}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial v_k}{\partial T}\right)_p\right] + s_k - s_f = f_1(p) + b. \tag{16}$$

Wenn

$$f_1(p) = -b \cong -v_{T=dT}$$

ist, muß also die Beziehung gelten:

$$T_k\left[\left(\frac{\partial v_f}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial v_k}{\partial T}\right)_p\right] = s_f - s_k. \tag{17}$$

Gleichung (17) ist bekannt. Sie wurde für eine Reihe von Stoffen als näherungsweise geltend nachgewiesen.[1]) Das Bestehen von Gleichung (17) vorausgesetzt, können wir (13) auch für den Fall gelten lassen, wo durch Übergang des Stoffes vom flüssigen in den kristallinischen Zustand eine Unstetigkeit in Gleichung (9) auftritt.

Bei Umwandlungen des Stoffes aus der einen in die andere kristallinische Form gelten die gleichen Überlegungen.

Ergänzend ist zu bemerken, daß Gleichung (17) eine weitere Beziehung bedingt.

Aus der allgemeinen Gleichung

$$dJ = c_p\,dT - A\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right]dp \tag{18}$$

folgt:

$$di_f = c_{pf}\,dT_k - A\left[T_k\left(\frac{\partial v_f}{\partial T}\right)_p - s_f\right]dp_k \tag{19}$$

und

$$di_k = c_{pk}\,dT_k - A\left[T_k\left(\frac{\partial v_k}{\partial T}\right)_p - s_k\right]dp_k. \tag{20}$$

Beachten wir, daß

$$i_f - i_k = r_s \tag{21}$$

ist, so erhalten wir aus (19) und (20)

$$\begin{cases} di_f - di_k = dr_s = (c_{pf} - c_{pk})\,dT_k - AT_k\left[\left(\frac{\partial v_f}{\partial T}\right)_p \right. \\ \qquad\qquad \left. - \left(\frac{\partial v_k}{\partial T}\right)_p\right]dp_k + A(s_f - s_k)\,dp_k. \end{cases} \tag{22}$$

Gleichung (22) ist bekannt. Sie geht nämlich mit Hilfe der Clapeyron-Clausiusschen Beziehung

$$A(s_f - s_k)\frac{dp_k}{dT} = \frac{r_s}{T_k} \tag{23}$$

1) Vgl. G. Tammann, Aggregatzustände, S. 72. Leipzig 1922.

in die Plancksche Gleichung

$$(24)^{1)} \quad \frac{dr_s}{dT} = c_{pf} - c_{kp} - \frac{r_s}{s_f - s_k}\left[\left(\frac{\partial v_f}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial v_k}{\partial T}\right)_p^{\frac{k}{p}}\right]' + \frac{r_s}{T_k}$$

über. Aus Gleichung (22) folgt, wenn (17) gilt,

$$(25) \qquad c_{pf} - c_{pk} = \frac{dr_s}{dT}.$$

Eine Näherungsgleichung dieser Form besteht für siedende Flüssigkeiten und ihren Dampf bei niedrigen Drucken. Es ist mir jedoch nicht bekannt, ob die analoge Gleichung (25) für schmelzende Kristalle auf ihren möglichen Geltungsbereich bereits untersucht wurde.

Zusammenfassend können wir sagen: durch die Amagatschen Versuchsreihen ist Gleichung (9) zwar bestätigt, doch sind ausgedehntere Versuchsreihen nötig, um den Umfang ihrer Geltung zu erkennen.

Es besteht die Möglichkeit, den spezifischen Rauminhalt eines Stoffes im Gebiet unendlich kleiner Temperatur mit Hilfe von Gleichung (9) angenähert zu bestimmen.

---

1) Vgl. M. Planck, Thermodynamik, 5. Aufl., S. 155, Leipzig 1917.

(Eingegangen 8. Juli 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur [illegible]

Fabrik für physikalische, chemische und technische Apparate

Gegründet 1890 — Gegründet 1890

Gaede

Hoch-Vakuum-Pumpen

für Wissenschaft und Technik

für Saugleistungen bis 30 cbm stündlich und Vakua bis $^1/_{1000000}$ mm Hg

Neuheit! **Quecksilber-Dampfstrahlpumpe** *Neuheit!*

nach System Pfeiffer (D. R. P. angem.) ganz aus Stahl

Rotierende Kapsel-Öl-Luftpumpe D. R. P.
mit Elektromotor direkt gekuppelt

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4—1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung. Alle Nebenapparate

Listen auf Verlangen!

1922. № 21

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 69.

1. *Über eine Methode zur Trennung der Bogen- und Funkenlinien der Emissionsspektra;*

von W. Wien.

(Hierzu Tafel IV.)

In der neueren Literatur hat sich die Gewohnheit eingebürgert, die von ungeladenen Atomen ausgesandten Spektrallinien mit dem Namen Bogenlinien zu benennen, die von geladenen Atomen herrührenden als Funkenlinien zu bezeichnen. Folgerichtig sind dann Funkenbanden und Bogenbanden zu unterscheiden, obwohl hier die Entstehung im Funken oder Bogen nicht in gleicher Weise die Unterscheidung ermöglicht hat.

Der erste, der bestimmte Versuche angestellt hat, um die Zusammenhänge der leuchtenden Träger der Spektrallinien mit dem Ladungszustand aufzudecken, war Lenard.[1]) Er beobachtete, daß ein elektrisches Feld den leuchtenden Dampf einer Salzflamme nach dem negativen Pol hin ablenkt, so daß er auf positive Bildung der leuchtenden Metallatome schloß. Weiter schließt[2]) er, daß die Metallatome während dieser Vorgänge in der Flamme nicht dauernd geladen sind, sondern Umladungen erfahren, wie sie später auch bei den Kanalstrahlen festgestellt sind. Unter diesen Umständen bleibt es auch bei einer beobachteten Ablenkung zweifelhaft, ob die Lichtaussendung von einem geladenen oder von einem ungeladenen Atom ausgeht. Dieselbe Schwierigkeit ist auch bei den von Kanalstrahlen ausgesandten Spektrallinien aufgetreten und es sind mannigfache Erörterungen und Meinungsverschiedenheiten über die Frage, ob die geladenen oder die ungeladenen Atome leuchten, in der Literatur der letzten Jahre aufgetreten.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 9. S. 642. 1902.
2) Ebenda, S. 649.

Nachdem ich nun eine Methode gefunden hatte, um leuchtende Kanalstrahlen auch im höchsten Vakuum zu beobachten[1], wo die Umladungsvorgänge praktisch in Fortfall kommen, war es auch möglich, die Unterscheidung zwischen geladenen und ungeladenen leuchtenden Atomen vorzunehmen.

Die Anordnung zeigt Fig. 1. Die aus dem Spalt S von 0,2 mm Breite, 3 mm Länge und 1 mm Tiefe austretenden

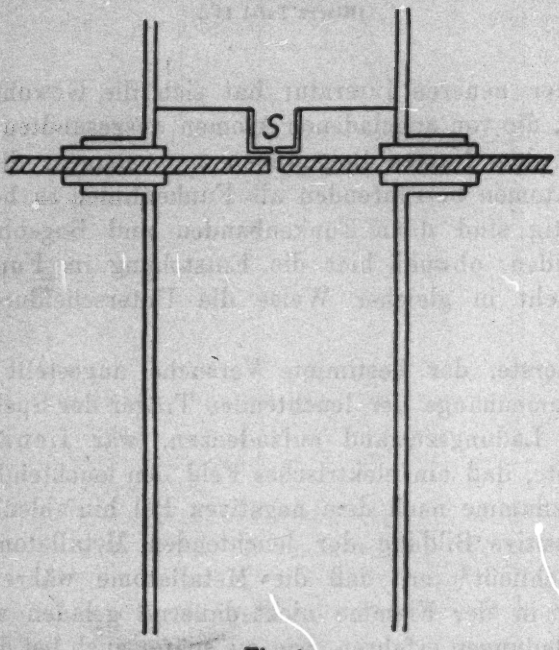


Fig. 1.

Kanalstrahlen gehen in das hohe Vakuum über, das, wie von mir früher beschrieben ist, dauernd aufrecht erhalten wird. Die Beseitigung der Dämpfe geschah durch Kühlung mit fester Kohlensäure oder mit flüssiger Luft.

In einer Entfernung von $^1/_2$ mm vom Spalt befindet sich ein quadratischer Kondensator aus Messing von 2 mm Kantenlänge oder bei den ersten Aufnahmen im kreisförmigen Kondensator von 3 mm Durchmesser und 1 mm Plattenabstand. Die kurze Länge des Kondensators ist dadurch bedingt, daß

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 60. S. 597. 1919.

die leuchtenden Atome schnell abklingen und dann nicht mehr als bewegte Atome leuchten.

Nimmt man an Stelle des kurzen Kondensators einen solchen von 3 cm Länge, so bemerkt man keine Einwirkung auf den Strahl, der den Kondensator verläßt, gleichgültig, ob man Wasserstoff, Sauerstoff oder Stickstoffkanalstrahlen beobachtet. Läßt man den Kanalstrahl auf einen Willemitschirm fallen, so bemerkt man ein helles abgelenktes Bündel, welches anzeigt, daß positive Atome im Strahl vorhanden sind, die aber kein Leuchten im Gasraum erregen.

Wenn jedoch der Kondensator so kurz ist, daß die durch ihn hindurchgegangenen Atome noch nicht ihr Leuchten verloren haben, so wird das Leuchten der Funkenlinien durch den Kondensator in beobachtbarer Weise abgelenkt, während Bogenlinien nicht abgelenkt werden.

Um die Ablenkung für die verschiedenen Spektrallinien zu erhalten, wurde der Kanalstrahl, wie früher, durch die Linsen und Prismen eines Spektrographen auf die photographische Platte abgebildet.

Es wurden zwei Apparate verwendet.

Erstens ein Spektrograph der Firma Steinheil & Söhne in München mit drei großen Prismen aus schwerem Flint und einem Öffnungsverhältnis von 1 : 2,8 für das Kameraobjektiv. Bei dem großen Öffnungsverhältnis der Linse war es sehr schwierig, noch vollkommen scharfe Abbildungen des Spalts im ganzen Spektralgebiet zu erhalten. Die Firma Steinheil & Söhne hat aber keine Mühe und keine Opfer gescheut, um eine befriedigende Abbildung mit der großen Lichtstärke des Apparats zu verbinden. Es sei ihr hier der wärmste Dank ausgesprochen.

Da der Kollimator etwas längere Brennweite hat wie das Kameraobjektiv, so sind Bild und Gegenstand nicht gleich groß. Durch Abbildung eines Streifens von 5 mm Breite wurde bestimmt, daß für die He-Linie 5016, die Bildgröße 4,90, für die He-Linie 3889 : 4,71 beträgt.

Für das Ultraviolett wurde der Quarzspektrograph verwendet, der schon in der früheren Abhandlung beschrieben ist. Er war etwas günstiger für das Ultraviolett eingestellt.

Die Aufladung des ablenkenden Kondensators geschah

mit Hilfe von zwei kleinen Gleichstromdynamos mit eingeschalteten Selitwiderständen. Die Spannung wurde unmittelbar am Kondensator mit einem Braunschen Elektrometer gemessen.

Die Entladungsröhre wurde mit einer 60plattigen Influenzmaschine von Leuner betrieben, die einen Strom von 2 bis 3 MA. je nach der Spannung lieferte.

1. Wasserstoff.

Man sieht keine Spur eines Unterschieds zwischen den beiden Aufnahmen ohne Spannung oder mit einer Spannung von 2000 Volt am Kondensator (Taf. IV). Die Entladungsspannung betrug 4500 Volt. Der Druck betrug im Beobachtungsraum 0,0015 mm Hg. Man bemerkt fast ausschließlich die Linien der Balmerserie, am oberen Ende sieht man bei jeder Linie den Kondensator durch Sekundärstrahlen abgebildet, die an dem Kondensator durch zerstreute Kanalstrahlen erregt werden und das Gas zum Leuchten bringen.

Andere Spannungen von 500 Volt und 250 Volt gaben dasselbe negative Ergebnis.

Die Linien der Balmerserie werden also nur vom ungeladenen Atom ausgesandt.

2. Sauerstoff.

Ganz anders als die Wasserstofflinien verhalten sich die Sauerstofflinien. Der Druck betrug bei der Aufnahme 0,0002 mm Hg.

Man sieht sowohl die Wasserstofflinien wie die Linien des Sauerstoffs. Die ersteren zeigen auch hier keine Spur einer Ablenkung, während ein großer Teil der Sauerstofflinien kräftig nach dem negativen Pol des Kondensators abgelenkt wird.

Von den Sauerstofflinien werden folgende Linien deutlich erkennbar abgelenkt:

464 $\mu\mu$
459 „
446 „
441 „
435 „
419 „
407 „
373 „ (schwach erkennbar).

Nicht abgelenkt werden:

487 $\mu\mu$
394 „

Die abgelenkten Linien gehören dem Funkenspektrum des Sauerstoffs, die nicht abgelenkten dem Serienspektrum an. Es unterliegt also keinem Zweifel, daß die ersteren von geladenen, die zweiten von ungeladenen Atomen ausgesandt werden. Ob die Ladung einfach oder mehrfach ist, kann durch diese Ablenkungen nicht entschieden werden, denn diese sind dieselben, wenn die Geschwindigkeit durch die gleiche beschleunigende Spannung hervorgerufen war, unabhängig von der spezifischen Ladung. Ein Unterschied wäre erst möglich, wenn die Atome auf ihrem Wege hinter der Kathode ihre Ladung verändert hätten. Verschiedene Größe der Ablenkung für einzelne Linien hat sich aber nicht erkennen lassen.

Bei jeder abgelenkten Linie bleibt noch ein Teil unabgelenkt übrig, bei dem aber kein wesentliches Abklingen mehr eintritt. Es handelt sich offenbar um das Leuchten, das von den neutralen Atomen im ruhenden Gas erregt wird.

Bei den Sauerstoff- und Stickstoffaufnahmen treten ebenso wie früher[1]) Metallinien auf, die hier durch die auf den Kondensator auftreffenden zerstreuten Kanalstrahlen hervorgerufen werden. Wir haben oben gesehen, daß Wasserstoffkanalstrahlen an dem Kondensator Sekundärelektronen auslösen, durch welche der Wasserstoffrest zum Leuchten gebracht wird.

Bei Sauerstoff und Stickstoff lösen die auftreffenden Kanalstrahlen Metalldämpfe aus dem Messing des Kondensators und bringen dann diese zum Leuchten. Es treten hier die Cu-Linien 327,4 und 324,7 $\mu\mu$ auf, außerdem am Kondensator dieselben Linien und noch dazu die Linien des Zinks 334,5 $\mu\mu$, 330 $\mu\mu$.

Außerdem tritt noch die Cu-Linie 336,5 auf, aber nur in einer Vergleichsaufnahme ohne ablenkende Spannung. Diese Linie wird daher als eine Funkenlinie angesehen werden müssen.

Die durch die Metalldämpfe des Kondensators entstehenden Linien befinden sich nicht genau am Ort des Spalts,

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 60. S. 617. 1919.

sondern sind etwas gegen diesen verschoben, so daß eine gewisse Unsicherheit in der Bestimmung der Wellenlänge eintritt. Während die Linie 336,5 durch das elektrische Feld beseitigt wird, treten im Felde neue Linien auf, die nicht auf die unmittelbare Nachbarschaft von Spalt und Kondensator beschränkt sind, wie die bisher betrachteten Metallinien. Es sind das Linien, die offenbar durch bewegte Atome ausgesandt werden, und ebenso abklingen wie die anderen von Kanalstrahlen ausgesandten Linien. Sie haben die Wellenlängen 353 $\mu\mu$, 359 $\mu\mu$. Über ihre Zugehörigkeit läßt sich nichts bestimmtes aussagen.

3. Stickstoff.

Beim Stickstoff liegen die Verhältnisse verwickelter: Hier ist noch keine eigentliche Trennung in Serienlinien und Funkenlinien vorgenommen. Eine Gruppierung der Linien ist von Stark und Künzer[1]) versucht. Außerdem kommen noch die lichtstarken negativen und positiven Bandenspektren vor. Der Druck bei den Stickstoffaufnahmen betrug im Beobachtungsraum 0,0002 mm H_γ.

Es zeigen sich folgende Linien:

abgelenkt	nicht abgelenkt
500,5 $\mu\mu$	413 $\mu\mu$
463 „	411,4 „
460 „	410,5 „
453 „	
443 „	
419 „	
403 „	
399 „	

Stark rechnet 500,5, 463, 460, 399 zu den scharfen Funkenlinien; 453, 443, 419, 403 zu den unscharfen Funkenlinien; 411, 410 zu den Bogenlinien.

Stickstoffbanden.

Neben den Stickstofflinien treten auf den Aufnahmen auch die Stickstoffbanden hervor, deren Abklingung auch schon gemessen wurde.

---

1) J. Stark u. Künzer, Ann. d. Phys. 45. S. 68. 1914.

Vergleicht man die Aufnahmen mit und ohne ablenkende Spannung miteinander, so sieht man, daß die Banden 470, 427, 423 und 391 abgelenkt werden. Gegenüber der Ablenkung der Linien ist ein wesentlicher und auffallender Unterschied erkennbar, nämlich der, daß die nicht abgelenkte Fortsetzung viel schwächer ist, so daß die Banden nur im obersten Teil erkennbar, während sie in dem weiteren abgelenkten Strahl ganz verschwunden sind.

Abgelenkt werden folgende Banden:

470,5 $\mu\mu$
427,8 „
423,6 „
391,4 „

die als negative Banden bekannt sind. Sie werden nach diesen Beobachtungen von positiv geladenen Molekülen ausgesandt.

Auf den Aufnahmen mit dem Quarzspektrographen erscheinen eine große Anzahl von Banden, die zur zweiten positiven Gruppe zu rechnen sind. Sie bleiben alle durch das elektrische Feld unbeeinflußt. Auch auf den Aufnahmen mit dem Glasspektrographen sind solche zu bemerken, so daß folgende nicht ablenkbare positive Banden zu beobachten sind.

467 $\mu\mu$
449 „
421 „
385,6 „ (schwach)
371 „ (schwach)
357,6 „ (stärker)
353,6 „ (stärker)
337,1 „ (stärker)
316 „ (stärker)
298 „ (schwach)
296,5 „ (schwach)

Bei meiner Messung der Abklingung der Stickstofflinien[1]) waren 384 $\mu\mu$, 338 als Stickstofflinien, 358 und 356 als negative Stickstoffbanden angesehen. Die letzteren fielen mit den Werten der Abklingungskonstanten aus der Reihe der negativen Banden heraus. Es scheint mir jetzt sehr wahrschein-

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 66. S. 229. 1921.

lich, daß alle zu den positiven Banden gehören, die, wenn nur der Bandenkopf genügend intensiv ist, bei der benutzten Methode sich unter Umständen von Linien nicht unterscheiden lassen. Nach den Messungen der Abklingungskonstanten haben die positiven Banden eine größere Abklingungskonstante, obwohl sich etwas Sicheres noch nicht sagen läßt, da die Dopplerverschiebung bei ihnen noch nicht gemessen ist.

Gegen die Folgerung, daß die positiven Banden dem ungeladenen Molekül angehören, könnte eingewendet werden, daß die beobachteten Banden vom ruhenden Gas herrühren und daß die gemessene Abklingung von Linien herrührt, die sich an gleicher Stelle befinden wie die beobachteten Banden. Der gleiche Einwand könnte auch gegen den Schluß erhoben werden, daß die negativen Banden abgelenkt werden. Daß die negativen Stickstoffbanden von geladenen Molekülen herrühren hat schon Hr. H. Rau vermutet.

Es muß tatsächlich zugegeben werden, daß bei dem großen Linienreichtum des Stickstoffspektrums fast überall neben den Banden auch Linien vorhanden sind. Die negativen Banden verhalten sich indessen, wie schon bemerkt, bei der Ablenkung anders wie die Linien, indem kaum bemerkbares Leuchten nach der Ablenkung im Kanalstrahl übrig bleibt, während dieses bei den Linien noch sehr merklich ist. Was die positiven Banden anlangt, so sind bei einzelnen von ihnen nur so schwache Linien des Stickstoffs beobachtet, daß diese kaum die Intensität der Banden beeinflussen können.

Quecksilber.

Schließlich sind noch Versuche mit Quecksilber gemacht. Der Quecksilberdampf wurde der Entladungsröhre in der Weise zugeführt, daß an dem Rohr, das den Gaszufluß ermittelt, seitlich ein kleines, mit Quecksilber gefülltes Ansatzrohr angesetzt wurde. Um dieses Ansatzrohr wurde ein Kupferdraht gelegt und mit der Erde verbunden, so daß ein Teil der Entladung zu dem Quecksilber seinen Weg nahm. Hierdurch verdampfte dauernd etwas Quecksilber, daß sich dem zuströmenden Wasserstoff beimischte. Neben den Wasserstofflinien treten dann im Kanalstrahl deutlich die Quecksilberlinien auf, von denen keine abgelenkt wird. Da nun

der Beobachtungsraum mit einer Röhre verbunden war, die dauernd durch flüssige Luft gekühlt wurde, so war der Dampfdruck des Quecksilbers im Beobachtungsraum verschwindend klein.

An den Quecksilberlinien sieht man deutlich ein stärkeres Abklingen der Intensität als bei den Wasserstofflinien. Da indessen die Geschwindigkeit der Quecksilberatome viel kleiner ist, so kann sehr wohl die zeitliche Abklingungskonstante auch beim Quecksilber wieder genau so groß herauskommen wie beim Wasserstoff.

Für Messungen der Abklingung war die Versuchsanordnung nicht geeignet, weil, wie schon erwähnt, am Kondensator durch Erregung von Sekundärelektronen ein gewisses, wenn auch geringes Leuchten hervorgerufen wurde. Die Abklingungskonstante der Quecksilberlinien soll daher noch besonders gemessen werden.

Von Quecksilberlinien mit starker Abklingung wurden die folgenden beobachtet:

II N III 1	404,7 $\mu\mu$
	398,4 „
I N 3	391 „
I N I 4	365 „
	356 „
	339 „
II N I 2	334 „
I N II 1	313 „
I N I 2	302 „
I N III 1	297 „
	285 „

II N II 1 435,8 fällt zu nahe an H_γ, um noch getrennt zu werden. Es zeigt sich aber auch hier keine Ablenkung.

Die bisher in Serien geordneten Linien sind bezeichnet. Die erste römische Zahl bedeutet die Nummer der Serie; N ist Nebenserie, die zweite römische Zahl bezeichnet die erste, zweite und dritte Linie des Triplets, die arabische Ziffer die Gliednummer. Die Linien ohne zweite römische Zahl sind die der einfachen Serien.

Sie werden sämtlich nicht abgelenkt, gehören also dem ungeladenen Atom an.

Von den Quecksilberkanalstrahlen werden auch wie von Sauerstoff und Stickstoff die starken Kupfer- und Zinklinien in der Nähe des Kondensators erregt. Außerdem ist die Aluminiumlinie 394 sichtbar.

Bei der Ausführung dieser Arbeit bin ich durch Hrn. Oberwerkführer Knöllinger, der die schwierigen glastechnischen Arbeiten ausführte und die langen Belichtungen überwachte, in besonders dankenswerter Weise unterstützt worden.

München, März 1922.

(Eingegangen 12. April 1922.)

2. *Zur Theorie der Streuung von β-Strahlen;* *von Gregor Wentzel.*

(Münchner Habilitationsschrift.)

Einleitung.

Übersicht über die bisherige Theorie und ihre Mängel.

Die Bedeutung der Streuungserscheinungen bei α- und β-Strahlen für die Geschichte der Atomphysik ist bekannt. Durch ihr Studium wurde Rutherford im Gegensatz zu J. J. Thomson zu der Vorstellung geführt, daß die positive Ladung des Atoms in einem nahezu punktförmigen Kern konzentriert sei, und auf diese Vorstellung gründete Bohr seine geniale Theorie des Atombaus und der Spektren. Die in den letzten Jahren durchgeführten verfeinerten Messungen der α-Strahlstreuung lieferten immer neue Stützen für das Rutherford-Bohrsche Modell; so konnte Chadwick[1]) die Gleichheit von Kernladungszahl und Ordnungsnummer im periodischen System nachweisen.

Dagegen haben die bisherigen Messungen der β-Streuung nur sehr mangelhafte Übereinstimmung mit der Rutherfordschen Theorie ergeben. Die älteren Versuche von J. A. Crowther[2]) schienen sogar zugunsten der Thomsonschen Theorie zu sprechen. Vor kurzem noch haben Crowther und Schonland[3]) neue sorgfältige Messungen der Streuung von β-Strahlen veröffentlicht, die ebenfalls der Theorie Rutherfords zu widersprechen scheinen. Der Streuungseffekt zeigt hiernach zwar qualitativ die erwartete Intensitätsverteilung, speziell auch, was die Abhängigkeit von der Strahlgeschwindigkeit und der Dicke der streuenden Schicht anlangt, ist aber numerisch namhaft größer als die Theorie angibt. Crowther und Schonland glauben hierdurch zu der Annahme genötigt zu sein, daß

1) J. Chadwick, Phil. Mag. 40. S. 734. 1920.
2) J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. 84. S. 226. 1911.
3) Ebenda 100. S. 526. 1922.

das Coulombsche Gesetz in äußerster Nähe der Atomkerne seine Gültigkeit verliere, oder daß die Elektronen dank magnetischen Eigenmomenten auch magnetischen Einflüssen unterstünden. Wir bestreiten die Zuverlässigkeit solcher Hypothesen. Damit erwächst aber der Theorie die Aufgabe, den Crowtherschen Messungsergebnissen auf Grund des Rutherford-Bohrschen Modelles quantitativ gerecht zu werden. Dieser Aufgabe ist vorliegende Arbeit gewidmet.

Die bisher an der Theorie vorgenommenen Korrekturen beziehen sich in der Hauptsache auf diejenigen Sekundäreinflüsse, welche die Absorption und den Geschwindigkeitsverlust der Strahlen bedingen. So berücksichtigen Rutherford[1]), C. G. Darwin[2]) und N. Bohr[3]) die Übertragung von Impuls auf die Atomkerne und Atomelektronen; Darwin[4]) setzt außerdem die Massenveränderlichkeit und die Verluste durch Strahlung in Rechnung. Doch reichen derartige Korrekturen nicht aus, die theoretischen Kurven den experimentell ermittelten wesentlich zu nähern.

Ungenügend scheint bisher der Einfluß der Atomelektronen berücksichtigt worden zu sein. Allerdings haben diese *einzeln* dank ihrer gegenüber den Atomkernen kleinen Ladung nur geringe ablenkende Wirkung (vgl. 3. Abschnitt, § 2); aber in ihrer Gesamtheit machen sie sich noch in anderer Weise geltend; sie schirmen nämlich die positive Kernladung nach außen ab. Rutherford hat diesen Effekt für α-Strahlen zu schätzen versucht unter der Annahme, daß die negative Elektrizität gleichmäßig eine Kugel von etwa 10^{-8} cm Radius ausfülle. Dabei zeigt sich, daß die α-Partikeln, um eine merkliche Ablenkung zu erleiden, dem Kern so nahe kommen müssen, daß die Abschirmung durch die negative Elektrizität belanglos wird. Dieser Schluß überträgt sich aber, wie Rutherford an anderer Stelle[5]) selbst bemerkt, durchaus nicht auf β-Strahlen, da diese wegen ihrer kleineren kinetischen Energie schon in größeren

1) E. Rutherford, Phil. Mag. 21. S. 669. 1911.
2) C. G. Darwin, Phil. Mag. 23. S. 901. 1912 und 27. S. 499. 1914.
3) N. Bohr, Phil. Mag. 25. S. 10. 1913.
4) C. G. Darwin, 25. S. 201. 1913; vgl. auch bei Crowther und Schonland a. a. O. S. 540.
5) E. Rutherford, 27. S. 488. 1914.

Kernabständen merklich abgelenkt werden. Heute gestattet uns unsere Kenntnis von der Anordnung der Elektronenbahnen im Atom eine leidlich angemessene Behandlung dieses Problems; wir werden uns im 3. Abschnitt eingehend mit demselben zu befassen haben.

Die Schirmwirkung der Elektronen kann aber nur eine *Verringerung* der Streuung zur Folge haben; ihre Berücksichtigung wird also, da ja die primitive Theorie an und für sich schon zu kleine Werte für die Streuung liefert, die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment nur noch vergrößern. In der Tat liegt die tiefere Ursache derselben an anderer Stelle.

Wir gehen hier auf die Fragestellung zurück, die gerade bei den anfänglichen Untersuchungen über die Streuung der α- und β-Strahlen im Mittelpunkt des Interesses stand: *ist die Streuung eine einfache oder mehrfache?* Damit kommen wir zum eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit. J. J. Thomson, dessen Atommodell bekanntlich an Stelle des Rutherfordschen Atomkernes eine über das ganze Atom verteilte positive Ladung enthielt, welche den hindurchgehenden Partikeln nur sehr geringe Richtungsänderungen erteilen konnte, nahm an, daß die einzelnen α- oder β-Partikeln bei der Durchquerung der streuenden Schicht nacheinander *sehr viele* solcher kleiner Ablenkungen erführen („compound scattering"). Ein solcher Mehrfachstreuungseffekt ist aber, wie Rutherford auf Grund seines Atommodells zeigen konnte, immer schwächer als der Effekt der Einfachstreuung („single scattering"); d. h. anschaulich gesprochen: die endliche Gesamtablenkung einer Partikel kommt leichter in *einem großen* Schritt als in *sehr vielen kleinen* Schritten zustande. Wir betonen aber, daß die Rutherfordsche Überlegung sich *nicht* auf Kombinationen von *wenigen mittelgroßen* Schritten erstreckt. In der Tat werden wir im folgenden nachweisen, daß man zwar die in den Versuchen von Chadwick vorliegende Streuung als Einfachstreuung auffassen kann, keineswegs aber die bei Crowther vorliegende. Hiernach versteht man, warum letzterer eine größere Streuung fand, als Rutherfords Einfachstreuungstheorie erwarten ließ.

Wir müssen hier einem Mißverständnis vorbeugen. Crowther schließt aus der qualitativ guten Übereinstimmung seiner Kurven mit der Rutherfordschen Theorie, daß die Streuung

„single", nicht „compound" sei. Gemäß der von Rutherford eingeführten und seitdem in der englischen Literatur gebräuchlichen Terminologie bedeutet dies aber nur, daß die empirischen Tatsachen zugunsten großer (zu ungunsten kleiner) Elementarablenkungen sprechen, d. h. zugunsten des Rutherfordschen (zu ungunsten des Thomsonschen) *Atommodells*. Diesem Schluß stimmen wir selbstverständlich ohne Einschränkung bei. Zwischen Rutherfords Atommodell und seiner Streuungstheorie ist aber wohl zu unterscheiden; ersteres machen wir zur Grundlage unserer Untersuchungen, die gerade eine Korrektur der letzteren zum Ziel haben, weil diese in ihrer ursprünglichen Form den Tatsachen nicht gerecht wurde.

Wir werden im folgenden allgemeine Formeln für die Berechnung der Mehrfachstreuung aufstellen, insbesondere für den Fall, daß die Anzahl der Schritte, in denen die Ablenkungen im Mittel erfolgen, zwar nicht kleiner als 1, aber doch auch nicht sehr groß gegen 1 ist. Die Auswertung dieser Formeln für den Fall der Streuung in einer Goldfolie wird eine sehr befriedigende Übereinstimmung mit den Crowtherschen Messungen ergeben.

Im Falle ausgesprochener Mehrfachstreuung (große Schrittzahl) sind unsere Ansätze zur numerischen Auswertung ungeeignet. Hier tritt die Thomsonsche Theorie in Kraft, soweit die in ihr steckenden vereinfachenden Voraussetzungen zutreffen. Für den Fall sehr diffuser Streuung, wie er bei den Kathodenstrahlen auftritt, sind bisher keine brauchbaren Ansätze vorhanden. Auf diesen in mancher Hinsicht sehr interessanten Gegenstand hofft der Verfasser später zurückkommen zu können.

I. Abschnitt.

Begriffliche Scheidung zwischen Einfach- und Mehrfachstreuung.

§ 1. Vorbereitendes.

Wir betrachten eine Partikel auf ihrem Wege durch die streuende Schicht. Die Bahn wird über weite Strecken fast geradlinig verlaufen, in einzelnen Punkten aber mehr oder weniger scharfe Knickpunkte aufweisen. Die kleinen Ablenkungswinkel werden vor den großen stark bevorzugt sein, und nicht selten werden auch Fälle eintreten, wo man im Zweifel sein wird, ob

überhaupt von einer Ablenkung gesprochen werden kann oder nicht. Wir müssen also zunächst definieren, was wir unter einer Ablenkung verstehen wollen.

Prinzipiell steht die Partikel, solange sie sich in einem festen Medium (Kristall) befindet, in jedem Augenblick unter dem Einfluß elektrischer Felder, der Kristallfelder nämlich. Die durch diese verursachten schwachen Richtungsänderungen müssen natürlich außer Betracht bleiben. Da die Kristallfelder aber kontinuierlich in die inneratomaren Felder übergehen, ist die Begrenzung dessen, was wir als Atominneres und als Ablenkung in diesem ansprechen wollen, einigermaßen willkürlich. Beispielsweise kann man eine Kugel von beliebigem Radium R um das Atom beschrieben denken, diese als begrenzende Atomoberfläche ansehen und alle außerhalb der Kugel vorübergehenden Partikeln als nicht abgelenkt betrachten; die Ablenkung einer Partikel, die gerade noch streifend in die Kugel eindringt, stellt dann die Minimalablenkung ω dar, die noch berücksichtigt wird. Oder man gibt umgekehrt einen Fehlerwinkel ω vor und läßt alle Ablenkungen $< \omega$ außer Betracht; um als abgelenkt angesprochen zu werden, müssen sich dann die Partikeln dem Atomkern bis zu einem gewissen Grade nähern, und dadurch ist wiederum ein Atomradius definiert. Je nach Art des Problems wird man also eine der beiden Größen R, ω wählen können; die andere ist dann jeweils bestimmt. Je größer R, desto kleiner ω, und umgekehrt. Über den quantitativen Charakter der Abhängigkeit werden wir später (3. Abschnitt) zu sprechen haben.

Die Zahl der Ablenkungen, die eine Partikel bei Durchquerung einer bestimmten Schicht erleidet, d. h. nach obiger Definition die Anzahl der Fälle, in denen sie einem Atomkern bis zu einem Abstand $< R$ nahe kommt, hängt natürlich wesentlich von R und damit auch von ω ab. Ohne nähere Angabe hierüber hat es also gar keinen Sinn, von Einfach- und Mehrfachstreuung zu reden. Hat man z. B. bei einer bestimmten Wahl von R und ω Einfachstreuung, so braucht man nur die Atomradien R genügend zu vergrößern, um denselben Vorgang als Mehrfachstreuung ansprechen zu können. Wir werden aber gleich sehen, daß sich dies nicht immer umkehren läßt.

Der Fehlerwinkel ω ist nämlich doch nicht ganz willkür-

lich, sondern nach oben begrenzt. Soll beispielsweise die Zahl der Partikeln bestimmt werden, die eine Gesamtablenkung $> \varphi$ erhalten, so muß unter allen Umständen $\omega < \varphi$ gewählt werden. Andernfalls würde man nämlich mit der Möglichkeit rechnen müssen, daß die Mehrzahl der Gesamtablenkungen $> \varphi$ durch Kombination mehrerer Einzelablenkungen $< \omega$ zustande kommt; durch die Vernachlässigung der letzteren würde das Resultat vollständig gefälscht werden. Wie klein man auch ω wählt, man wird sich immer im einzelnen überzeugen müssen, daß eine solche Fehlerquelle nicht vorhanden ist, mit anderen Worten, daß eine Vergrößerung von R das erhaltene Resultat nicht merklich ändert (vgl. § 2).

Ist aber ω nach oben, so ist R nach unten begrenzt. Die Ausdehnung der Atome kann also über einen gewissen Grad hinaus nicht verkleinert werden, und damit ist auch der wahrscheinlichsten Ablenkungszahl eine untere Grenze gesetzt. Auf diese untere Grenze müssen wir unser Augenmerk richten. Nur wenn sie unter 1 bleibt, ist es möglich, die wahrscheinlichste Ablenkungszahl durch geeignete Wahl von R und $\omega < 1$ zu machen, so daß von Einfachstreuung gesprochen werden kann.

§ 2. Hinreichendes Kriterium für Einfachstreuung.

Ist d die Dicke der streuenden Schicht und n die Anzahl der in ihr pro cm³ enthaltenen Atome, so ist die Zahl derjenigen Atome, welche von einer α- oder β-Partikel bei Durchquerung der Schicht im Mittel durchsetzt werden, bekanntlich gleich $\pi R^2 n d$. Wir werden diese Aussage später [2. Abschnitt, § 6, Gl. (27)] dahin verschärfen, daß die wahrscheinlichste Zahl durchsetzter Atome, wenn nicht sehr groß gegen 1, gleich derjenigen ganzen Zahl ist, die zwischen $\pi R^2 nd$ und $\pi R^2 n d - 1$ liegt. Die einfach abgelenkten Partikeln liefern also einen überwiegenden Beitrag zur gestreuten Intensität, solange:

$$\pi R^2 n d < 2.$$

Der größte Atomradius R, der dieser Bedingung noch genügt, ist:

$$R_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\pi n d}}. \tag{1}$$

Die Ablenkung, die eine im Abstande R_{max} am Kern vorbeigehende Partikel erleidet, ist die kleinste, die noch berücksichtigt werden darf, damit von Einfachstreuung die Rede sein kann; sie möge ω_{min} heißen. Es muß verlangt werden, daß die Ablenkungen $< \omega_{min}$ so selten vorkommen, daß der Fehler, der bei ihrer Vernachlässigung begangen wird, unmerklich ist.

Wir betrachten den Fall, daß eine Partikel in einem Abstande $> R_{max}$ aber $< R_{max} + \Delta R$ am Atomkern vorübergeht, wo $\Delta R \ll R_{max}$ [1]); die von ihr erlittene Ablenkung ist nur wenig kleiner als ω_{min}. Die mittlere Häufigkeit, mit der dieser Fall bei einer die Schicht durchquerenden Partikel eintritt, ist, wie man sich leicht überlegt, gleich:

$$[\pi(R_{max} + \Delta R)^2 - \pi R^2_{max}] \cdot n d \cong 2\pi R_{max} \cdot \Delta R \cdot n d = \frac{4 \cdot \Delta R}{R_{max}}$$

Die wahrscheinlichste Gesamtablenkung, die eine Partikel infolge dieser (nach verschiedenen Richtungen erfolgenden) Einzelablenkungen (von den übrigen größeren Ablenkungen abgesehen) erleidet, ist kleiner als $4\omega_{min} \cdot \Delta R/R_{max}$. Solange diese obere Grenze für die wahrscheinlichste Gesamtablenkung kleiner bleibt als der gemessene Streuwinkel φ, also:

$$4\omega_{min} \cdot \frac{\Delta R}{R_{max}} \ll \varphi,$$

sind diese Einzelablenkungen $< \omega_{min}$ nicht imstande, einen merklichen Beitrag zur gemessenen Gesamtstreuung zu liefern, und ist also ein beträchtlicher Fehler durch Vergrößerung von R um ΔR nicht zu befürchten. Obige Bedingung ist aber immer erfüllbar, auch durch nicht zu kleines ΔR, solange:

$$4\omega_{min} \ll \varphi. \quad (2)$$ [1])

Diese Ungleichung stellt somit ein *hinreichendes Kriterium für das Vorhandensein einfacher Streuung* dar. Allgemein kann man sagen, daß das Verhältnis $\varphi/4\omega_{min}$, das gemäß Definition von ω_{min} für jede Versuchsanordnung einen bestimmten Wert hat, für den Einfach- oder Mehrfachcharakter der Streuung entscheidend ist.

---

1) $x \gg y$ soll hier nicht bedeuten: x ist sehr groß gegen y, sondern nur: x ist ein Mehrfaches von y.

§ 8. Anwendung auf die Versuche von Chadwick und Crowther.

Die Messungen Chadwicks wurden ausgeführt mit Folien von Pt, Ag und Cu. Die Anzahlen streuender Atome pro cm^2 waren bei den verschiedenen Elementen:

$$n\,d = 1{,}520 \cdot 10^{19};\quad 2{,}50 \cdot 10^{19};\quad 4{,}64 \cdot 10^{19}.$$

Als obere Grenze für die zu wählenden Atomradien ergibt sich daraus nach (1) bzw.:

$$R_{max} = 2{,}05 \cdot 10^{-10};\quad 1{,}60 \cdot 10^{-10};\quad 1{,}17 \cdot 10^{-10}.$$

Diese Radien sind, wie man nach der Bohrschen Theorie leicht abschätzt, von der Größenordnung der K- und L-Schalenradien der betreffenden Atome. Dies scheint zunächst absurd, doch kommt es, wie aus den Überlegungen von § 1 folgt, auf eine Übereinstimmung von R mit den wirklichen Atomradien zunächst nicht an. Wesentlich ist die Größe der Ablenkung ω_{min}, die eine im Abstand R_{max} vom Atomkern passierende Partikel erfährt. Diese läßt sich auf Grund des Rutherfordschen Modells mit Hilfe bekannter Formeln [vgl. (29)] berechnen. Unter Benutzung der von Chadwick angegebenen Werte für die Strahlgeschwindigkeit kommt man bei den verschiedenen Elementen bzw. auf:

$$\omega_{min} = 50';\qquad 40';\qquad 35'.$$

Chadwick ließ aber nur solche α-Partikeln zur Zählung gelangen, die in der Folie eine Gesamtablenkung φ von mindestens 21,8° erlitten hatten. Selbst im ungünstigsten Falle, bei Pt, ist also das Verhältnis $\varphi/4\,\omega_{min}$ immer noch etwa gleich 7, so daß man die Bedingung (2) als erfüllt ansehen und von Einfachstreuung sprechen kann. Zieht man außerdem den Umstand in Erwägung, daß die α-Partikeln, wie aus der Kleinheit der Radien R_{max} zu schließen, schon mindestens bis in den Bereich der K-Schale eines Atoms eindringen müssen, um nur eine Ablenkung von 1—2° zu erleiden, und daß in diesen innersten Atombereichen nur geringe oder gar keine Abschirmung der Kernladung durch zwischengelagerte Elektronenschalen vorhanden ist, so versteht man, wie Chadwick zu so vollkommener Übereinstimmung mit der Rutherfordschen Theorie gelangen konnte.

Aus den neuen Crowtherschen Messungen greifen wir die an einem leichten und an einem schweren Metall, an Aluminium und Gold, heraus, und aus diesen wiederum diejenigen an den dünnsten Schichten, welche für die Einfachstreuung am günstigten sind. Die kleinsten verwendeten Schichtdicken waren bei Al $8{,}45 \cdot 10^{-5}$ cm, bei Au $8{,}48 \cdot 10^{-6}$ cm. Für diese ergibt sich nach (1):

$$R_{max} = 3{,}53 \cdot 10^{-10};\quad 1{,}13 \cdot 10^{-9}.$$

R_{max} bleibt bei Al noch kleiner als der Radius der K-Schale, fällt aber bei Au, wo die Atomschalen im Gegensatz zu Al sehr dicht übereinander gelagert sind, schätzungsweise bereits zwischen M- und N-Schalenradius. Setzt man dementsprechend bei Al die unabgeschirmte Kernladung 13 und bei Au eine durch 2 K-, 8 L- und 18 M-Elektronen[1]) abgeschirmte Kernladung $79 - 28 = 51$ in Rechnung, so kommt man auf kleinstzulässige Fehlerwinkel ω_{min} von ungefähr 40′ bei Al und 50′ bei Au. Die Winkel ω_{min} sind also hier von der gleichen Größenordnung wie im Falle der Versuche Chadwicks. Dafür arbeitet Crowther aber mit namhaft kleineren Streuwinkeln φ. In den verschiedenen Serien seiner Versuche mißt er denjenigen Bruchteil der Primärintensität, der insgesamt um weniger als $\varphi = 8{,}3°$ bzw. $6{,}3°$ und $4{,}6°$ gestreut wird. Das Verhältnis $\varphi/4\,\omega_{min}$ schwankt hier je nach dem Element und dem verwendeten Streuwinkel zwischen 3,1 und 1,7, ist also wesentlich ungünstiger als bei Chadwick, und das wohlbemerkt schon bei den kleinsten verwendeten Foliendicken! Wird aber die Dicke d gesteigert, so nimmt R_{max} nach (1) mit $d^{-1/2}$ ab und daher ω_{min} angenähert mit $d^{+1/2}$ zu. Bei den mittleren von Crowther verwendeten Schichtdicken (Halbwertdicken, vgl. 4. Abschnitt) geht $\varphi/4\,\omega_{min}$ infolgedessen auf 1,2 bis 0,8 herunter. Wenn die Nichterfüllung der Bedingung (2) auch nicht notwendig auf das Vorhandensein mehrfacher Streuung schließen läßt, so ist der Unterschied gegenüber den Chadwickschen Versuchen doch in die Augen fallend, und es leuchtet hiernach ein, warum Rutherfords Einfachstreuungstheorie außer Stande war, den Versuchsergebnissen Crowthers gerecht zu werden.

1) Vgl. N. Bohr, Nature, März 1921 u. Zeitsch. f. Phys. 9. S. 1. 1922.

Bei seinen älteren Versuchen hatte Crowther zwar mit größeren Streuwinkeln, dafür aber mit erheblich größeren Schichtdicken gearbeitet. Insgesamt waren hier die Versuchsbedingungen für das Zustandekommen einer einfachen Streuung noch ungünstiger als bei den neuen Messungen. Daraus erklärt sich die merkwürdig gute Übereinstimmung, die Crowther seinerzeit mit der Thomsonschen Mehrfachstreuungstheorie erhielt.

Obwohl die mittlere Ablenkungszahl an sich von der Strahlenergie unabhängig ist, kann doch eine Einfachstreuung bei α-Strahlen unter sonst gleichen Versuchsbedingungen leichter zustande kommen als bei β-Strahlen. Werden nämlich die Radien R_{max} gemäß (1) bei beiden Strahlarten gleich gewählt, so würden doch die im Kernabstande R_{max} vorübergehenden α-Partikeln wegen ihrer größeren Trägheit eine kleinere Ablenkung ω_{min} erfahren als die entsprechenden β-Partikeln; das Verhältnis $\varphi/4\omega_{min}$ ist bei α-Strahlen ceteris paribus immer größer als bei β-Strahlen. Außerdem hat man bei α-Strahlen den bekannten Vorteil, daß die ankommenden Partikeln auf dem Zinksulfidschirm einzeln abgezählt werden können, so daß man (mittels der von Rutherford und Chadwick ausgebildeten Methode) imstande ist, große und kleine Intensitäten sehr exakt miteinander zu vergleichen. Es wäre sehr interessant, wenn es trotz der größeren experimentellen Schwierigkeiten auch bei β-Strahlen gelingen sollte, Einfachstreuung in Übereinstimmung mit der Rutherfordschen Theorie zu erhalten. Dies muß unserer Auffassung nach durch Vergrößerung der Streuwinkel und Verkleinerung der Schichtdicken erreichbar sein.

2. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Mehrfachstreuung.

§ 1. Formulierung des mathematischen Problems.

Nach dem Vorangehenden werden wir, um den Messungen Crowthers theoretisch gerecht werden zu können, eine Statistik der Mehrfachstreuung durchzuführen haben. Wir stellen uns also folgende Aufgabe:

α- oder β-Partikeln von der kinetischen Energie T fallen in einem Bündel vom Querschnitt Q senkrecht auf

eine planparallele Schicht streuender Materie, beispielsweise eine Metallfolie, von der Dicke d. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $J(\varphi)\,d\varphi$, daß der Austritt einer Partikel aus der Schicht in dem Winkelbereich φ bis $\varphi + d\varphi$ von der Primärstrahlrichtung aus erfolgt?

Wir behandeln diese Aufgabe in diesem Abschnitt ohne spezielle Annahme über die Natur des ablenkenden Kernfeldes. Im 3. Abschnitt werden wir für dieses auf Grund des Rutherford-Bohrschen Modells einen bestimmten Ansatz machen und nachweisen, daß man auf diese Weise zu einem befriedigenden Anschluß an die Crowtherschen Zahlenangaben kommt.

Die einzige für die zunächst folgenden Überlegungen geltende Voraussetzung besteht darin, daß man die Verteilung der streuenden Atome als ungeordnet ansehen dürfe. Bei Gasen ist diese Annahme sicher gerechtfertigt, wahrscheinlich aber auch bei Metallfolien; in diesen haben nämlich die Kristallite vermutlich so geringe Ausdehnung, daß auch in den dünnsten herstellbaren Schichten immer noch viele hintereinander zu liegen kommen.

§ 2. Die Wahrscheinlichkeit der Elementarablenkung.

Da unser Problem Zylindersymmetrie besitzt, genügt es, die jeweilige Richtung einer Partikel durch den Winkel zu kennzeichnen, den sie mit der Primärstrahlrichtung bildet. Wir nehmen die Richtungsverteilung, welche die Strahlen nach Durchquerung der unendlich dünnen Schicht δ infolge *einfacher* Streuung einnehmen würden, als beliebig gegeben an und setzen sie gleich $\delta \cdot F(o, \varphi)$. Genauer gesagt soll $\delta \cdot d\varphi \cdot F(o, \varphi)$ die Wahrscheinlichkeit bedeuten, daß eine senkrecht in die Folie δ eintretende Partikel in derselben eine (und auch nur eine) Ablenkung erleidet und infolge dieser im Winkelbereich φ bis $\varphi + d\varphi$ austrittt. $\delta \cdot \int_0^\pi d\varphi\, F(o, \varphi)$ ist demnach die Anzahl der abgelenkten, $1 - \delta \cdot \int_0^\pi d\varphi\, F(o, \varphi)$ die Anzahl der nicht abgelenkten Partikeln.

Die gegebene streuende Folie von der endlichen Dicke d

denken wir uns nunmehr in unendlich dünne Schichten dz aufgelöst. Es soll dann die Wahrscheinlichkeit

$$dz \cdot d\psi \cdot F(\varphi, \psi)$$

ermittelt werden, daß eine Partikel, die schon eine Ablenkung um den Winkel φ erfahren hat und nun mit dieser Richtung φ in die Schicht dz eintritt, in derselben abermals abgelenkt und dabei in den Richtungsbereich ψ bis $\psi + d\psi$ geworfen wird.

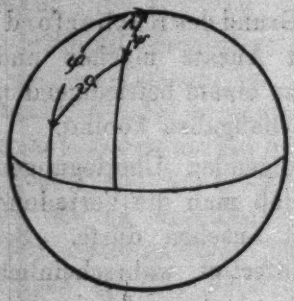


Fig. 1.

In einem Polarkoordinatensystem, dessen Äquatorebene der Schicht parallel ist (Fig. 1), geben wir der Eintrittsrichtung die Koordinaten $(\varphi, 0)$, der Austrittsrichtung die Koordinaten (ψ, λ). Die Wahrscheinlichkeit, daß die Partikel in den infinitesimalen Richtungskegel $d\lambda \cdot d\psi \cdot \sin\psi$ abgelenkt wird, ist:

$$dz \cdot (d\lambda \cdot d\psi \cdot \sin\psi) \cdot \frac{F(o, \vartheta)}{2\pi \sin\vartheta},$$

wo ϑ bestimmt ist durch:

$$\cos\vartheta = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cdot \cos\lambda. \tag{3}$$

Integration über λ ergibt:

$$dz \cdot d\psi \cdot F(\varphi, \psi) = dz \cdot d\psi \cdot \frac{\sin\psi}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \, \frac{F(o, \vartheta)}{\sin\vartheta}. \tag{4}$$

Aus (3) erhält man:

$$d\lambda = \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sin\varphi \cdot \sin\psi \cdot \sin\lambda} = \frac{\sin\vartheta \cdot d\vartheta}{\pm \sqrt{[\cos(\varphi - \psi) - \cos\vartheta][\cos\vartheta - \cos(\varphi + \psi)]}}.$$

Die Quadratwurzel ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem $\lambda \lessgtr \frac{\pi}{2}$. Aus (4) folgt also:

$$F(\varphi, \psi) = \frac{\sin\psi}{2\pi} \cdot \oint d\vartheta \, \frac{F(o, \vartheta)}{\sqrt{[\cos(\varphi - \psi) - \cos\vartheta][\cos\vartheta - \cos(\varphi + \psi)]}}. \tag{5}$$

Hier ist die Integration in der komplexen ϑ-Ebene um den Verzweigungsschnitt des Integranden herum auszuführen, welcher sich längs der reellen Achse von $|\varphi - \psi|$ bis $(\varphi + \psi)$ erstreckt.

§ 3. **Die Wahrscheinlichkeit des unabgelenkten Durchgangs.**

Wie im 1. Abschnitt denken wir uns die Atome der streuenden Schicht in Kugeln von geeignetem Radius R eingeschlossen. Wir projizieren diese Kugeln auf eine zur Folie parallele Ebene E. Da die Atome in der Folie als ungeordnet verteilt angenommen wurden, gilt dasselbe auch von ihren Projektionen in der Ebene. Der das α- oder β-Strahlenbündel begrenzende Zylinder schneidet aus der Ebene E ein Flächenstück heraus, dessen Flächeninhalt gleich dem Bündelquerschnitt Q ist.

Damit nun eine Partikel unabgelenkt durch die Schicht hindurchgeht, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß der Punkt, in dem sie (d. h. ihre Primärrichtung) die Ebene E durchstößt, innerhalb *keiner* der kreisförmigen Projektionen liegt. Die Wahrscheinlichkeit, daß er außerhalb eines *bestimmten* dieser Kreise liegt, ist gleich $1 - \pi R^2/Q$. Ist die Gesamtzahl der Kreisflächen gleich N, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß er innerhalb *keiner* derselben liegt, gleich $(1 - \pi R^2/Q)^N$. Die Gesamtzahl N der vom Strahlenbündel erreichbaren Atome ist aber gleich $Q \cdot n \cdot d$, wenn n wie oben die Anzahl der Atome pro Volumeinheit bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit des unabgelenkten Durchgangs ist also gleich:

$$(1 - \pi R^2/Q)^{Qn \cdot d} = e^{-\mu d}, \tag{6}$$

wo

$$\mu = - Q n \log \text{nat}(1 - \pi R^2/Q). \tag{7}$$

In praxi ist aber πR^2 immer so klein gegen Q, daß man in der Potenzentwicklung des Logarithmus bereits nach dem ersten Glied abbrechen kann, so daß man statt (7) erhält:

$$\mu = n \cdot \pi R^2. \tag{8}$$

Der Streuungskoeffizient μ ist also von Q unabhängig, wie ja physikalisch plausibel ist.

Die betrachtete Durchgangswahrscheinlichkeit $e^{-\mu d}$ ist natürlich nichts anderes als die von den projizierten Kreisen pro cm² freigelassene Fläche. Für sehr kleines R geht sie über in

$$1 - \mu d = 1 - \pi R^2 \cdot n d,$$

wie geometrisch ohne weiteres klar ist. Läßt man die Kreisradien von Null an wachsen, so werden die näher beieinander

liegenden Kreisflächen einmal anfangen, sich zu überdecken. Daran liegt es, daß der von den Kreisflächen beanspruchte Flächeninhalt nicht proportional R^2, sondern langsamer anwächst.

§ 4. Wahrscheinlichkeit einer beliebigen Bahn.

Die Lage der streuenden Atome brauchen wir lediglich durch ihre Tiefe in der Schicht, d. h. durch ihren Abstand z von der Eintrittsebene zu charakterisieren (Fig. 2). Die Bahn, die eine Partikel in der Folie beschreibt, ist dann für unsere Zwecke genügend bestimmt durch Angabe der Koordinaten:

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$$

derjenigen Atome, an denen sie abgelenkt wird, und der Richtungen:

$$0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \varphi\,.$$

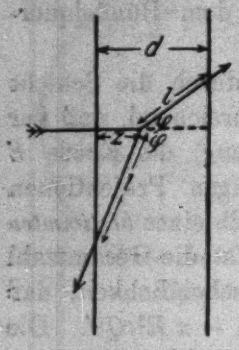


Fig. 2.

die sie zwischen den einzelnen Ablenkungen innehat; φ bedeutet die Austrittsrichtung.

Wir behandeln zunächst den einfachsten Fall, den der Einfachstreuung. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Partikel unabgelenkt bis zur Tiefe z eindringt, in der Schicht z bis $z + dz$ in den Winkelbereich φ bis $\varphi + d\varphi$ geworfen wird und in diesem ohne weitere Ablenkung austritt, ist [vgl. (6)]:

$$e^{-\mu z} \cdot dz\, d\varphi\, F(0, \varphi) \cdot e^{-\mu l}, \tag{9}$$

wo l die Länge des von der Stelle z bis an die Austrittsstelle zurückgelegten Weges ist. Nach Fig. 2 ist aber

$$l = \frac{d - z}{\cos\varphi}, \text{ wenn } \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$= \frac{-z}{\cos\varphi}, \text{ wenn } \varphi > \frac{\pi}{2}.$$

Zur Abkürzung führen wir eine Größe d^* ein, die im Falle einer „emergenten" Partikel $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ gleich d, im Falle einer „rückdiffundierten" Partikel $\left(\varphi > \frac{\pi}{2}\right)$ gleich Null sein soll:

$$d^* = \begin{cases} d \text{ für } \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ für } \varphi > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

Damit wird allgemein:

$$l = \frac{d^* - z}{\cos \varphi}.$$

Durch Integration von (9) über z erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß eine Partikel nach einmaliger Ablenkung an *beliebiger* Stelle in der Richtung φ aus der Folie austritt:

$$J_1(\varphi)\, d\varphi = \int_0^d dz\, e^{-\mu z} \cdot d\varphi\, F(0, \varphi) \cdot e^{-\mu \frac{d^* - z}{\cos \varphi}}. \tag{11}$$

Wir schreiben nun gleich die Wahrscheinlichkeit hin, daß die Partikel n-mal abgelenkt wird, und zwar an den Stellen:

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1},$$

und dazwischen die Richtungen:

$$0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ \varphi$$

innehat:

$$e^{-\mu z_0} \cdot dz_0\, F(0, \varphi_1)\, d\varphi_1 \cdot e^{-\mu \frac{z_1 - z_0}{\cos \varphi_1}} \cdot \frac{dz_1}{\cos \varphi_1} F(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_2 \cdot e^{-\mu \frac{z_2 - z_1}{\cos \varphi_2}}$$

$$\ldots\ e^{-\mu \frac{z_{n-1} - z_{n-2}}{\cos \varphi_{n-1}}} \cdot \frac{dz_{n-1}}{\cos \varphi_{n-1}} F(\varphi_{n-1}, \varphi)\, d\varphi \cdot e^{-\mu \frac{d^* - z_{n-1}}{\cos \varphi}}.$$

Um die gesamte n-fache Streuung zu erhalten, haben wir über die z_i und φ_i zu integrieren. Hierbei ist folgendes zu beachten. Hat die Partikel im Punkte z_{n-1} ihre Ablenkung in die Richtung φ_n erfahren, so ist die Lage des nächsten Ablenkungspunktes z_n sehr wesentlich von φ_n abhängig; es ist nämlich:

$$z_n \gtrless z_{n-1}, \text{ je nachdem } \varphi_n \lessgtr \frac{\pi}{2}.$$

Solange $\varphi_n < \frac{\pi}{2}$, hat man also über z_n von z_{n-1} bis d zu integrieren, solange aber $\varphi_n > \frac{\pi}{2}$, von z_{n-1} bis 0.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Partikel nach n-maliger Ablenkung an *beliebigen* Stellen in dem Richtungsbereich φ bis $\varphi + d\varphi$ austritt, ist demnach (in leicht verständlicher Schreibweise):

$$
(12)\quad
\begin{cases}
J_n(\varphi)\,d\varphi = \int\limits_0^d dz_0\, e^{-\mu z_0} \\
\cdot \left[\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_{z_0}^{d} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\int\limits_{z_0}^{0}\right] d\varphi_1 \quad \frac{dz_1}{\cos\varphi_1} \cdot F(0,\ \varphi_1) \quad \cdot e^{-\mu\frac{z_1 - z_0}{\cos\varphi_1}} \\
\cdot \left[\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_{z_1}^{d} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\int\limits_{z_1}^{0}\right] d\varphi_2 \quad \frac{dz_2}{\cos\varphi_2} \cdot F(\varphi_1, \varphi_2) \quad \cdot e^{-\mu\frac{z_2 - z_1}{\cos\varphi_2}} \\
\cdot\ .\ .\ .

Bemerkenswert ist, daß sämtliche Intensitäten J_n den Faktor $e^{-\frac{\mu d^*}{\cos\varphi}}$ enthalten. Nach (10) bedeutet dies, daß die gesamte *emergente* Strahlung ($\varphi < \frac{\pi}{2}$, $d^* = d$) mit einem schwächenden Faktor versehen ist, der mit steigender Dicke d abnimmt, die *rückdiffundierte* Strahlung ($\varphi > \frac{\pi}{2}$, $d^* = 0$) aber nicht. Steigert man die Schichtdicke d, so muß demnach die Intensität der rückdiffundierten auf Kosten der emergenten Strahlung zunehmen.

§ 5. Die Gesamtintensität.

Durch Addition der verschiedenen $J_n d\varphi$ erhält man schließlich die Wahrscheinlichkeit $J d\varphi$ dafür, daß die Partikel nach Zurücklegung einer *ganz beliebigen* Bahn im Innern der Schicht im Winkelbereich φ bis $\varphi + d\varphi$ aus derselben austritt. Die Gesamtintensität der zerstreuten Strahlung in ihrer Abhängigkeit von der Austrittsrichtung φ ist also:

$$J(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\varphi), \tag{14}$$

wo die einzelnen J_n bei gegebener Funktion $F(0, \varphi)$ nach (5), (11), (12) berechnet werden können.

Schließen wir die Möglichkeit einer wirklichen Absorption der Strahlen, d. h. einer völligen Bremsung von Partikeln, aus, so muß sich die gesamte gestreute Strahlung mit der unabgelenkt durchgegangenen zu 1 ergänzen:

$$\int_0^{\pi} J(\varphi)\, d\varphi = 1 - e^{-\mu d}. \tag{15}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Gesamtablenkung $> \varphi$ ist:

$$W(\varphi) = \int_{\varphi}^{\pi} J(\varphi)\, d\varphi. \tag{16}$$

Aus (12) sieht man leicht ein, daß

$$\left(\frac{\partial J_n}{\partial d}\right)_{d=0} = 0,$$

wenn

$$n \geqq 2.$$

Es ist demnach:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial d}\right)_{d=0} = \left(\frac{\partial J_1}{\partial d}\right)_{d=0} = F(0, \varphi). \tag{17}$$

Wir sind damit zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen zurückgekehrt, indem wir verifiziert haben, daß unsere Endformel im Grenzfall unendlich kleiner Schichtdicke wieder zu unserem ursprünglichen Ansatz für die Einfachstreuung führt.

§ 6. Vereinfachung der Intensitätsformel für kleine Streuwinkel im Falle nicht zu großer Schichtdicke.

Der Umstand, daß die Wegstrecke einer Partikel in der Folie durch die Ablenkungen vergrößert wird, äußert sich in Formel (12) durch das Auftreten der Nenner $\cos \varphi_i$. Würde man diese durch 1 ersetzen, d. h. die Verlängerung des Weges vernachlässigen können, so würde sich die Formel (12) ersichtlich sehr vereinfachen. Eine solche Vernachlässigung ist in der Tat bei nicht zu großer Dicke d und kleinen Streuwinkeln möglich. Da nämlich große Ablenkungen an und für sich schon sehr selten vorkommen, ist der Fall, daß eine Partikel auf dem Umweg über einen großen Winkel φ_i zu kleinen Winkeln φ zurückkehrt, von äußerster Seltenheit; wir können ihn also vernachlässigen und brauchen die Integration über die φ_i in (12) nur bis zu einem gewissen, nicht sehr großen Grenzwinkel $\gamma\left(\varphi < \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ auszuführen [(vgl. auch (10)]:

$$J_n(\varphi) = \int_0^{\gamma}\int_0^{\gamma}\cdots\int_0^{\gamma} d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1}\, \frac{F(0,\varphi_1)\cdot F(\varphi_1,\varphi_2)\ldots F(\varphi_{n-1},\varphi)}{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-1}}\cdot D_n,$$

wo

$$D_n = \int_0^{d} dz_0\, e^{-\mu z_0\left(1-\frac{1}{\cos\varphi_1}\right)}\cdot\int_{z_0}^{d} dz_1\, e^{-\mu z_1\left(\frac{1}{\cos\varphi_1}-\frac{1}{\cos\varphi_2}\right)}\cdot\int_{z_1}^{d} dz_2\ldots$$

$$\ldots\int_{z_{n-2}}^{d} dz_{n-1}\, e^{-\mu z_{n-1}\left(\frac{1}{\cos\varphi_{n-1}}-\frac{1}{\cos\varphi}\right)}\cdot e^{-\mu d\frac{1}{\cos\varphi}}.$$

Unter der Voraussetzung:

$$\mu d\left(\frac{1}{\cos\gamma}-1\right) \ll 1 \tag{18}$$

erhält man hieraus in ausreichender Näherung:

$$J_n(\varphi) = D_n\cdot\Phi_n(\varphi), \tag{19}$$

$$D_n = \frac{d^n}{n!}\cdot e^{-\mu d}, \tag{20}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \Phi_1(\varphi) = F(0,\varphi) \\ \Phi_n(\varphi) = \int_0^\gamma\int_0^\gamma \cdots \int_0^\gamma d\varphi_1\, d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1}\; F(0,\varphi_1) \\ \qquad\qquad \cdot F(\varphi_1,\varphi_2)\cdots F(\varphi_{n-1},\varphi). \end{cases}$$

D_n ist von φ, Φ_n von d unabhängig. Für Φ_n hat man folgende Rekursionsformel:

$$(22)\quad \Phi_n(\varphi) = \int_0^\gamma d\psi \cdot \Phi_{n-1}(\psi)\cdot F(\psi,\varphi).$$

Die gesamte gestreute Intensität ist:

$$(23)\quad J(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\, \Phi_n(\varphi) = e^{-\mu d}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(\varphi)\, d^n}{n!}$$

Damit ist J, (18) vorausgesetzt, in eine für die Berechnung sehr bequeme Form gebracht: $J\cdot e^{\mu d}$ ist in eine Potenzreihe nach d entwickelt, deren Koeffizienten $\Phi_n/n!$ als Funktion von φ mit Hilfe der Rekursionsformel (22) durch graphische Integration zu ermitteln sind.

Es soll noch unter der Voraussetzung (18) die gesamte n-fach gestreute Intensität $\int_0^\pi J_n(\varphi)\, d\varphi$ berechnet werden. Hierzu bemerken wir, daß

$$(24)\quad \int_0^\pi F(\psi,\varphi)\, d\varphi = \mu$$

(von ψ unabhängig) ist. $\delta\cdot\int_0^\pi F\, d\varphi$ ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß eine in der Richtung ψ befindliche Partikel auf der unendlich kleinen Wegstrecke δ eine beliebige Ablenkung erfährt, also gleich 1, vermindert um die Durchgangswahrscheinlichkeit $e^{-\mu\delta}$, oder schließlich gleich $\mu\delta$. — Aus (21) oder (22) ersieht man aber mit Hilfe von (24) leicht, daß:

$$(25)\quad \int_0^\pi \Phi_n(\varphi)\, d\varphi = \mu^n$$

ist. Nach (19), (20) hat man also:

$$(26)\quad \int_0^\pi J_n(\varphi)\, d\varphi = e^{-\mu d}\cdot\frac{(\mu d)^n}{n!}.$$

Durch Summation über n von 1 bis ∞ kommt man auf (15) zurück.

$\int_0^\pi J_n d\varphi$ ist, um zu dem Bilde des § 3 zurückzukehren, nichts anderes als die von den kreisförmigen Atomprojektionen in der Ebene E pro Flächeneinheit n-mal überdeckte Fläche. Läßt man n von Null an wachsen, so nimmt $\int_0^\pi J_n d\varphi$, wie man aus (26) abliest, solange zu, bis n den kleinsten ganzzahligen Wert erreicht hat, der noch kleiner als μd ist, um dann wieder abzunehmen. Die wahrscheinlichste Anzahl n_{max} von Ablenkungen ist also, (18) vorausgesetzt, durch die Ungleichungen bestimmt:

$$\mu d > n_{max} > \mu d - 1. \tag{27}$$

Dieses Ergebnis hatten wir im ersten Abschnitt schon vorweg genommen.

Läßt man d zunehmen, bis (18) nicht mehr erfüllbar ist, so wird die mittlere Zahl von Ablenkungen proportional mit der mittleren in der Folie zurückgelegten Bahnstrecke anwachsen, d. h. wenn man die rückdiffundierten Partikeln von der Betrachtung ausschließt, in stärkerem Maße als d. Von den beiden Ungleichungen (27) kann dann nur eine aufrecht erhalten werden:

$$n_{max} > \mu d - 1. \tag{28}$$

3. Abschnitt.

Ansätze für die Wahrscheinlichkeit der Elementarablenkungen.

§ 1. Die Rutherfordsche Theorie.

Die bisherigen Ergebnisse sind, wie bereits betont wurde, völlig unabhängig von der Natur des ablenkenden Atomfeldes. Um die erhaltenen Formeln numerisch diskutieren und mit der Erfahrung vergleichen zu können, benötigen wir noch bestimmte Ansätze für die Funktion $F(\varphi, \psi)$. Die Spezialisierung derselben soll jetzt auf der Grundlage des Rutherford-Bohrschen Modelles durchgeführt werden.

Für das reine Kernfeld werden wir die Ansätze der ursprünglichen Rutherfordschen Streuungstheorie verwenden

können. Nach dieser beschreiben bekanntlich die in Kernnähe geratenden Partikeln im Coulombschen Zentralfelde hyperbolische Bahnen, deren Asymptotenwinkel φ, d. i. gerade der gesuchte Ablenkungswinkel, jeweils gegeben ist durch:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{p}{b}, \qquad b = \frac{eZ \cdot E}{2T}, \tag{29}$$

wo eZ die Kernladung, E und T die Ladung und kinetische Energie der Partikeln und p den senkrechten Abstand des Kernes von der Anfangsbahn (Bahnasymptote) bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Partikel bei Durchquerung der unendlich dünnen Schichtdicke δ in einem Abstand $< p$ an einem Atomkern vorbeigeht, ist $\pi p^2 \cdot n\,\delta$. Ebenso groß ist aber, wenn p mit φ durch Gl. (29) verknüpft wird, die Wahrscheinlichkeit W, daß die Partikel eine Ablenkung $> \varphi$ erfährt:

$$W(\varphi) = \alpha \cdot \delta \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}, \tag{30}$$

wo

$$\alpha = \pi n b^2 = \pi n \left(\frac{eZ \cdot E}{2T}\right)^2. \tag{31}$$

Nach (16) und (17) ergibt sich demnach:

$$J(\varphi) = -\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} = -\alpha \cdot \delta \cdot \frac{d \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{d\varphi}, \tag{32}$$

$$F(0, \varphi) = -\alpha \cdot \frac{d \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{d\varphi}. \tag{33}$$

Diese Formeln gelten aber, wie bemerkt, nur im reinen Kernfeld, d. h. im wesentlichen für nicht zu große p oder nicht zu kleine φ. Bei kleinen Streuwinkeln muß der Einfluß der Atomelektronen in Rechnung gezogen werden; dieser soll im folgenden Paragraphen diskutiert werden.

§ 2. Idealisierung des Atommodells.

Eine strenge Berücksichtigung der Elektronenhülle ist selbstverständlich undurchführbar; es handelt sich vielmehr darum, deren Wirkung in möglichst zutreffender und einfacher Weise zu idealisieren. Wir vernachlässigen zunächst prinzipiell jene in der Einleitung angegebenen Effekte, die einen Geschwindigkeitsverlust oder gar eine Absorption der Partikeln

zur Folge haben (Strahlung, unelastischer Stoß u. a.); dies ist zulässig, da der Geschwindigkeitsverlust, wie empirisch bekannt, prozentual gering ist. Ferner soll die unmittelbar ablenkende Wirkung der Atomelektronen außer Betracht bleiben; denn auch diese ist, wie Rutherford theoretisch gezeigt hat, gering im Verhältnis zur Kernablenkung. In der Formel (31) für die Streuungskonstante α ist nämlich die Kernladung Ze durch e, die Zahl der Beugungszentren pro cm^3 n durch Zn zu ersetzen; dabei dividiert sich α durch Z.

Als einzige wesentliche Wirkung der Elektronenhülle bleibt demnach die Abschirmung der Kernladung übrig. In der Theorie der Röntgenspektren berücksichtigt man diese bekanntlich in der Weise, daß man die Gesamtladung der Elektronen einer Atomschale gleichförmig über eine Kugeloberfläche von entsprechendem Radius ausgebreitet denkt, so daß das Atomfeld in diesen Oberflächen Diskontinuitäten aufweist. Die Schalenradien sind dabei natürlich sehr schlecht definiert, da der größere Teil der Atomelektronen elliptische Bahnen beschreibt, und überdies bei den komplizierten Atomen nur eine sehr rohe Schätzung der Bahnabmessungen möglich ist. Es ist daher zwecklos, bei dem Ansatz für die Abschirmung auf Einzelheiten einzugehen, und wir idealisieren aus diesem Grunde das Atommodell noch weiter. Durch die neuen Bohrschen Arbeiten sind wir über die Verteilung der Elektronen auf die einzelnen Atomschalen weitgehend unterrichtet, und wir wissen speziell bei jedem Atom, welche Schale die *meisten* Elektronen enthält. Diese höchstbesetzte Schale greifen wir heraus und denken auf ihr die Ladung sämtlicher Elektronen des Atoms gleichförmig ausgebreitet. Das Atommodell besteht dann aus dem Kern mit der Ladung Ze und einer gleichförmig mit der Ladung $-Ze$ belegten Kugeloberfläche von einem Radius R, der gleich dem geschätzten Radius der höchstbesetzten Atomschale zu setzen ist. Die außerhalb dieser Schale vorbeigehenden Partikeln erfahren also nach unserer Annahme überhaupt keine Ablenkung, während die wirkliche Ablenkung infolge starker, aber doch nicht vollständiger Abschirmung zwar schwach, aber nicht Null ist. Die in die Schale eindringenden Partikeln werden im wesentlichen die von Rutherford berechnete hyperbolische Bahn beschreiben und demnach die

durch Gl. (29) bestimmte Ablenkung erleiden; eine kleine Vernachlässigung begehen wir, indem wir außer Acht lassen, daß die Bahn nur *teilweise* im unabgeschirmten Kernfeld verläuft. Die kleinstmögliche Ablenkung ω erfährt eine Partikel, wenn sie eben noch am Rande streifend in die Kugel eindringt; indem wir auch für diesen Fall Gl. (29) als gültig ansehen — was eine abermalige, letzte Idealisierung des Problems bedeutet —, erhalten wir:

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2} = \frac{R}{b} = R\,\frac{2T}{eZ\cdot E}. \tag{34}$$

Aus (8), (31) und (34) folgt die Beziehung:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2} = \frac{\mu}{\alpha}. \tag{35}$$

Der hier definierte Radius R hat natürlich mit dem im 1. Abschnitt § 2 definierten R_{max} nichts zu tun, da bei seiner Wahl auf den Einfach- oder Mehrfachcharakter der Streuung keine Rücksicht genommen wird. Wesentlich ist hier, daß wir zwar, ebenso wie im 1. Abschnitt, die Ablenkungen der in Kernabständen $> R$ passierenden Partikeln vernachlässigen, den hiermit begangenen Fehler aber dadurch annähernd kompensieren, daß wir die abschirmende Wirkung der innersten Atomschalen auf die in das „Atom" eindringenden Partikeln gleich Null setzen und diesen infolgedessen eine stärkere Ablenkung zuschreiben als sie in Wirklichkeit erleiden. Wir nehmen an, daß die Kompensation der beiden Fehler eine genügend vollständige ist und verzichten auf eine Diskussion etwa dadurch verursachter Ungenauigkeiten.

Unter Umständen kann es natürlich vorteilhaft sein, den Atomradius R auf einen bestimmten Wert R' zu verkleinern, dann nämlich, wenn sich herausstellt, daß die Ablenkungen der zwischen R und R' hindurchgehenden Partikeln ohne merklichen Einfluß auf die Gesamtstreuung sind. Um dies zu prüfen, wird man jeweils in ähnlicher Weise wie im 1. Abschnitt §§ 2 und 3 vorgehen können.

§ 3. Die Funktionen $F(0, \varphi)$, $F(\varphi, \psi)$.

Betrachten wir nun die Einfachstreuung, die ein α- oder β-Strahlbündel in einer unendlich dünnen Folie unserer Atommodelle erleiden wird, so ist klar, daß sie für diejenigen Par-

tikeln, die in die Atomkugeln eindringen, d. h. eine Ablenkung $\geqq \omega$ erfahren, mit dem Rutherfordschen Ansatz (33) übereinstimmen wird; Ablenkungen zwischen 0 und ω aber werden überhaupt nicht vorkommen. Man hat demnach:

$$F(0,\varphi) = \begin{cases} 0 \text{ . . . für } 0 \leqq \varphi < \omega, \\ -\alpha \dfrac{d \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}{d\varphi} \text{ für } \omega \leqq \varphi \leqq \pi, \end{cases} \tag{36}$$

wo α durch (31) definiert ist. Aus (35) und (36) folgt:

$$\int_0^\pi F(0,\varphi)\, d\varphi = \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\omega}{2} = \mu, \tag{37}$$

wie nach (24) verlangt werden muß.

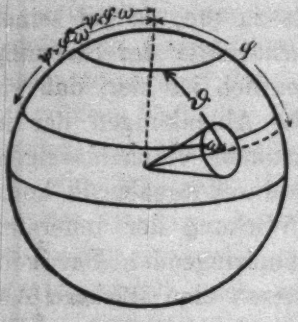


Fig. 3.

Die Berechnung der Funktion $F(\varphi, \psi)$ nach (5) ist einfach, solange $|\varphi - \psi| \geqq \omega$. Die Integrationsvariable ϑ bleibt dann nämlich stets $\geqq \omega$ und gelangt also nicht in den Bereich, wo $F(0, \vartheta) = 0$ wird (vgl. Fig. 3); in diesem Falle ist $F(0, \vartheta)$ nach (36) in der Umgebung des ganzen Integrationsweges eine analytische Funktion von ϑ und die Integration kann leicht auf komplexem Wege durchgeführt werden. Indem $\cos\vartheta = x$ gesetzt wird, erhält man:

$$\begin{cases} F(\varphi,\psi) = \dfrac{\alpha \sin\psi}{\pi} \\ \qquad \cdot \oint \dfrac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{[\cos(\varphi-\psi)-x]\,[x-\cos(\varphi+\psi)]}}. \end{cases} \tag{38}$$

Wie Fig. 4 andeutet, erstreckt sich der Verzweigungsschnitt des Integranden, um den herum der Integrationsweg verläuft, längs

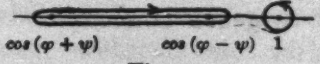


Fig. 4.

der reellen Achse von $\cos(\varphi + \psi)$ bis $\cos(\varphi - \psi)$. Der einzige Pol des Integranden ist ein Pol 2. Ordnung bei $x = 1$. Der Integrationsweg werde deformiert und in bekannter Weise

um den Pol $x = 1$ zusammengezogen. Entwickelt man noch Potenzen von $(x - 1)$, so ergibt sich als Residuum:

$$\pm \frac{i}{2} \cdot \frac{\frac{1}{1-\cos(\varphi-\psi)} + \frac{1}{1-\cos(\varphi+\psi)}}{\sqrt{[1-\cos(\varphi-\psi)]\,[1-\cos(\varphi+\psi)]}} = \pm i \frac{1-\cos\varphi\cos\psi}{|\cos\varphi - \cos\psi|^3}.$$

Nach (38) kommt also:

$$(39)\quad \left\{ F(\varphi,\psi) = \alpha \cdot \frac{2\sin\psi\,(1-\cos\varphi\cos\psi)}{|\cos\varphi-\cos\psi|^3} = \alpha \left| \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\sin\psi}{\cos\varphi-\cos\psi}\right)^2 \right| \right.$$
$$\left. \text{für } |\varphi-\psi| \geqq \omega. \right.$$

Ist andererseits $|\varphi - \psi| < \omega$, so hat man wiederum zwei Fälle zu unterscheiden: $\varphi + \psi > \omega$ und $\varphi + \psi \leqq \omega$. Letzterer Fall kann nur eintreten, wenn sowohl $\varphi \leqq \omega$ als $\psi \leqq \omega$. Der Richtungskegel $\vartheta \leqq \omega$, innerhalb dessen $F(0, \vartheta) = 0$ ist, enthält dann sowohl die Primärrichtung $(\varphi = 0)$ als auch den ganzen Kegel der Richtungen ψ. Eine Ablenkung von φ nach ψ ist also überhaupt nicht möglich:

$$(40)\qquad F(\varphi,\psi) = 0 \qquad \text{für } \varphi + \psi \leqq \omega.$$

Aus (39) und (40) ersieht man bereits, daß $F(\varphi, \psi)$ in $F(0, \psi)$ (37) übergeht, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird.

Es bleibt noch der Fall $|\varphi - \psi| < \omega$, $\varphi + \psi > \omega$ zu erledigen, in welchem der Richtungskegel ψ teilweise innerhalb, teilweise außerhalb des Kegels $\vartheta \leqq \omega$ liegt (Fig. 3). An Stelle von (5) schreiben wir:

$$(41)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\varphi,\psi) &= \frac{\sin\psi}{\pi} \\ &\quad \cdot \int_{\varphi+\psi}^{\varphi-\psi} d\vartheta \, \frac{F(0,\vartheta)}{\sqrt{[\cos(\varphi-\psi)-\cos\vartheta]\,[\cos\vartheta-\cos(\varphi+\psi)]}} \\ &= -\alpha \frac{\sin\psi}{\pi} \cdot \int_{\omega}^{\varphi+\psi} d\vartheta \, \frac{d\,\mathrm{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}}{d\vartheta} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{[\cos(\varphi-\psi)-\cos\vartheta]\,[\cos\vartheta-\cos(\varphi+\psi)]}}. \end{aligned} \right.$$

Durch Anwendung elementarer Integrationsmethoden erhält man:

$$(42)\quad \begin{cases} F(\varphi,\psi) = \dfrac{a\sin\psi}{\pi|\cos\varphi-\cos\psi|}\cdot\left[\dfrac{2(1-\cos\varphi\cos\psi)}{(\cos\varphi-\cos\psi)^2}\right. \\ \quad\cdot\left\{\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\left(-1+2\dfrac{\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi+\psi}{2}}{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi-\psi}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi+\psi}{2}}\right)\right\} \\ \left.-\sqrt{\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi-\psi}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}\right] \\ \text{für } \begin{cases} |\varphi-\psi|\leqq\omega \\ \varphi+\psi\geqq\omega \end{cases}. \end{cases}$$

Hier ist der arc sin kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und größer als $-\frac{\pi}{2}$ zu wählen. Im Grenzfall $|\varphi-\psi|=\omega$ $\left(\text{arc sin}=\frac{\pi}{2}\right)$ geht (42) in (39) über, im Grenzfall $\varphi+\psi=\omega$ $\left(\text{arc sin}=-\frac{\pi}{2}\right)$ in (40). $F(\varphi,\psi)$ ist demnach für $\varphi>0$, $\psi>0$ eine stetige Funktion der beiden Variabeln.

Für $\varphi=\psi$ wird die Darstellung (42) unbestimmt. Durch Grenzübergang oder einfacher unmittelbar aus (41) erhält man:

$$(43)\quad \begin{cases} F(\varphi,\varphi) = \dfrac{\alpha}{3\pi}\left[3+\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}+2\operatorname{ctg}^2\varphi\right]\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\omega}{2}-\operatorname{ctg}^2\varphi} \\ \text{für } \varphi\geqq\frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

§ 4. Modifizierter Ansatz für $F(0,\varphi)$, $F(\varphi,\psi)$.

Wenngleich wir in den folgenden numerischen Rechnungen nur die bisherigen Formeln für die Funktion $F(\varphi,\psi)$ verwenden werden, möchten wir doch noch einen anderen Ansatz für dieselbe vorschlagen, der den wirklichen Verhältnissen wohl ein wenig näher kommt und überdies den Vorzug größerer mathematischer Eleganz hat (die Fallunterscheidung $|\varphi-\psi|\gtrless\omega$, $\varphi+\psi\gtrless\omega$ wird überflüssig), dafür allerdings numerisch etwas unbequemer zu handhaben ist.

Kurve I in Fig. 5 stellt die Funktion $F(0,\varphi)$ nach (36) für $\alpha=1$, $\omega=1^0$ dar. Die schroffe Unstetigkeit an der Stelle $\varphi=\omega$ rührt von der gewaltsamen Idealisierung des Problems

her. Der Kurvenverlauf wird in Wirklichkeit viel flacher sein, namentlich wegen der komplizierten Abschirmungsverhältnisse, die durch die räumliche Verteilung der Elektronen bedingt sind. Die einfachste Funktion, die diesem Umstande Rechnung trägt, zugleich für $\varphi \gg \omega$ in (36) übergeht und überdies die Bedingung (37) erfüllt, ist:

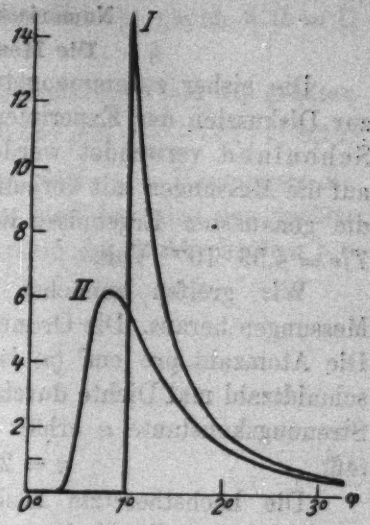


Fig. 5.

$$(44)\quad \begin{cases} F(0,\varphi) = -\alpha \dfrac{d\,\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{d\varphi} \\ \qquad \cdot e^{-\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}. \end{cases}$$

In Fig. 5 ist sie für $\alpha = 1$, $\omega = 1^0$ als Kurve II wiedergegeben. Für kleine ω und φ kann man statt (44) schreiben:

$$F(0,\varphi) = \frac{8\alpha}{\varphi^3}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{\varphi^2}},$$

woraus man findet, daß das Maximum der Funktion (44) an der Stelle

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\omega = 0{,}816\,\omega$$

liegt.

Aus (5) enthält man mit Hilfe bekannter Integralformeln für die Besselschen Funktionen J_0 und J_1:

$$(45)\quad \begin{cases} F(\varphi,\psi) = \alpha\cdot\dfrac{2\sin\psi(1-\cos\varphi\cos\psi)}{|\cos\varphi-\cos\psi|^3}\cdot e^{-\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}\cdot u(\varphi,\psi)} \\ \qquad \cdot\left\{J_0\left(i\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\omega}{2}\cdot v(\varphi,\psi)\right) + i\cdot\dfrac{\sin\varphi\sin\psi}{1-\cos\varphi\cos\psi}\right. \\ \qquad\quad \left.\cdot J_1\left(i\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\omega}{2}\cdot v(\varphi,\psi)\right)\right\}, \end{cases}$$

wo

$$u(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi-\psi}{2} + \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi+\psi}{2}\right) = \frac{\sin^2\varphi+\sin^2\psi}{(\cos\varphi-\cos\psi)^2},$$

$$v(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi-\psi}{2} - \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi+\psi}{2}\right) = \frac{2\sin\varphi\sin\psi}{(\cos\varphi-\cos\psi)^2}.$$

Für $|\varphi-\psi| \gg \omega$ geht (45) in (39) über.

4. Abschnitt.
Numerische Diskussion.

§ 1. Die Messungen an Gold.

Die bisher zusammengetragenen Formeln sollen nunmehr zur Diskussion der Experimentalergebnisse von Crowther und Schonland verwendet werden. Wir beschränken uns dabei auf die Messungen mit derjenigen Strahlgeschwindigkeit, welche die genauesten Ergebnisse lieferte; sie entsprach dem Werte $T/e = 4{,}59 \cdot 10^{-5}$ Volt.

Wir greifen zunächst die an Goldfolien ausgeführten Messungen heraus. Die Ordnungszahl des Goldatoms ist $Z = 79$. Die Atomzahl pro cm^3 (n) ist in bekannter Weise gleich Loschmidtzahl mal Dichte durch Atomgewicht zu setzen. Für die Streuungskonstante α erhält man dann nach (31):

$$\alpha = 28{,}17 \text{ cm}^{-1}. \tag{46}$$

Die höchstbesetzte Elektronenschale des Goldatoms ist die N-Schale. Ihr Radius, der uns gemäß den Festsetzungen des 3. Abschnittes als Radius R des idealisierten Atoms dienen soll, läßt sich nach der Bohrschen Gleichung

$$R = \frac{a \cdot n^2}{Z'} \tag{47}$$

abschätzen. In dieser bedeutet a den Radius des Wasserstoffatoms $= 5{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm, n die Quantenzahl der betreffenden Elektronengruppe, hier also 4, und Z' die wirksame Kernladung, die in diesem Falle gleich $79 - 2 - 8 - 18 = 51$ ist. Man erhält so:

$$R \cong 1{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ cm} \tag{48}$$

und nach (8) und (34) oder (35):

$$\mu = 4{,}8 \cdot 10^{+5} \text{cm}^{-1}; \quad \omega = 0{,}9^0.$$

Da R nur ungenau definiert ist, ziehen wir der bequemeren Rechnung wegen vor, ω auf 1^0 abzurunden und μ dementsprechend zu korrigieren:

$$\omega = 1^0, \quad \mu = 3{,}699 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}. \tag{49}$$

Die streuenden Goldfolien hatten je die Dicke

$$d = 8{,}48 \cdot 10^{-6} \text{ cm}.$$

Vergrößerung der Schichtdecke wurde dadurch erzielt, daß mehrere (bis zu 5) solcher Folien hintereinander angebracht wurden. Für k hintereinander geschaltete Folien ergibt sich:

$$\mu d = k \cdot 3{,}14. \tag{50}$$

Die wahrscheinlichste Ablenkungszahl war also gemäß (27) im Falle der dünnsten bzw. dicksten Schicht gleich 3 ($k = 1$) bzw. 15 ($k = 5$).

Selbst im Falle der größten Schichtdicke und des größten Streuwinkels ($\varphi = 8{,}3^0$) bleibt die Größe $\mu d\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) < 0{,}17$. Man kann deshalb bei der ganzen Serie von Messungen die Bedingung (18) als erfüllt ansehen und hat also den großen Vorteil, von den vereinfachten Formeln des 2. Abschnittes § 6 ausgehen zu können.

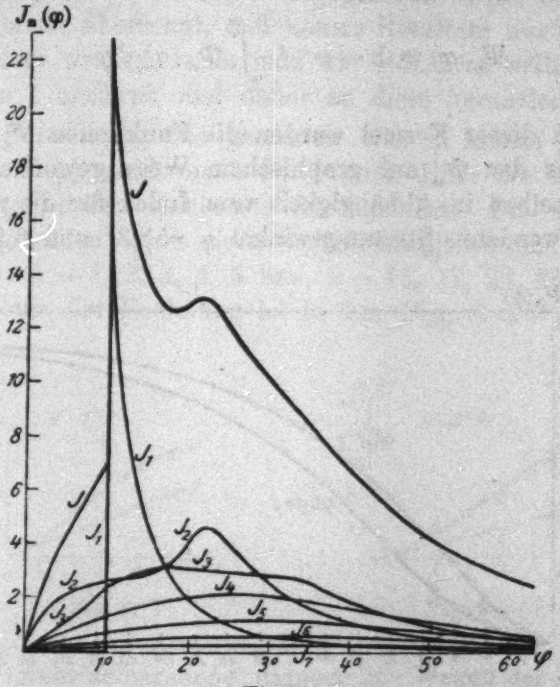


Fig. 6.

Die Funktionen $\Phi_n(\varphi)$ wurden nach Anweisung der Formeln (22), (39), (40), (42) und (43) mittels graphischer Integration ausgewertet, und zwar bis zum Index $n = 7$ einschließlich. Durch Multiplikation mit den Koeffizienten D_n (20) erhält man nach (19) die n-fach abgelenkten Intensitäten J_n. Für den Fall der dünnsten Schichtdicke sind die Funktionen J_n ($n = 1, 2, \ldots 7$), sowie die daraus berechnete Gesamtintensität $J = \Sigma J_n$ in Fig. 6 graphisch dargestellt.

Um einen direkten Vergleich mit experimentellen Daten anstellen zu können, schreiben wir im Anschluß an (16) und (23):

$$W(\varphi) = \int_{\varphi}^{\pi} J(\varphi)\, d\varphi = e^{-\mu d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu d)^n}{n!} \cdot \Psi_n(\varphi), \tag{51}$$

wo

$$\Psi_n(\varphi) = \mu^{-n} \int_{\varphi}^{\pi} \Phi_n(\varphi)\, d\varphi \tag{52}$$

ist. Da nach (25) $\Psi_n(0) = 1$, kann man auch schreiben:

$$\Psi_n(\varphi) = 1 - \mu^{-n} \cdot \int_{0}^{\varphi} \Phi_n(\varphi)\, d\varphi. \tag{53}$$

Nach dieser Formel wurden die Funktionen $\Psi_n(\varphi)$ ($n = 1$ bis 7) aus den Φ_n auf graphischem Wege gewonnen. Fig. 7 zeigt dieselben in Abhängigkeit vom Index für die von Crowther verwendeten Streuungswinkel $\varphi = 8{,}3°$ und $6{,}3°$.

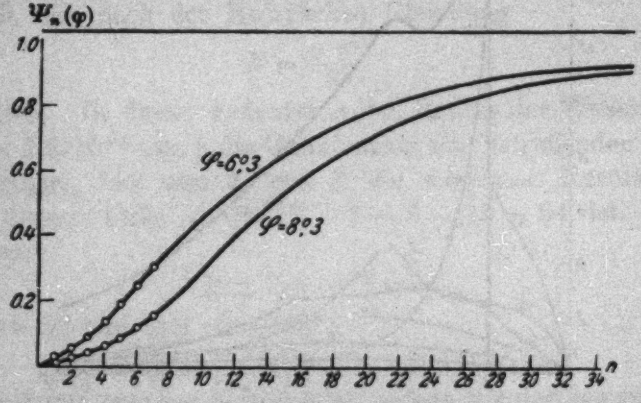


Fig. 7.

8-fache, 9-fache usw. Ablenkung kommt zwar im Falle der dünnsten verwendeten Schicht noch so selten vor, daß man sie ohne erheblichen Fehler vernachlässigen kann, wird aber bei zunehmender Schichtdicke immer häufiger und liefert im Falle k (Folienzahl) = 3 bereits den maximalen Beitrag zu der um mehr als $\varphi = 6{,}3°$ und $8{,}3°$ gestreuten Intensität. Glücklicherweise lassen sich die Kurven Ψ_n (Fig. 7) gegen größere n mit einer für unsere Zwecke ausreichenden Sicherheit extrapolieren.

Je höher nämlich der Index n wird, desto mehr verlagert sich das Maximum der n-fach gestreuten Intensität $J_n(\varphi)$ (oder $\Phi_n(\varphi)$) gegen größere φ, wie physikalisch einleuchtend und auch aus Fig. 6 deutlich zu ersehen ist. Bei sehr großem n wird also in dem kleinen Kegel der Richtungen $\varphi < 6{,}3°$ bzw. $8{,}3°$ nur sehr wenig Intensität zurückbleiben. Demnach wird sich $\Psi_n(\varphi)$, wie aus (53) zu sehen, bei unbegrenzt wachsendem n asymptotisch einem Werte nähern, der nur sehr wenig kleiner als 1 ist. Mit Rücksicht hierauf haben wir $\Psi_n(6{,}3°)$ und $\Psi_n(8{,}3°)$ in der in Fig. 7 angegebenen Weise extrapoliert nnd uns davon überzeugt, daß unsere Resultate nur unwesentlich geändert werden, wenn man die Ψ-Kurven weiter von der Asymptote 1 entfernt oder näher an diese heranzieht.

Die Berechnung der gesamten über φ hinaus gestreuten Intensität $W(\varphi)$ wurde nach Gl. (51) mit Hilfe der in (50) und Fig. 7 angegebenen Zahlwerte durchgeführt. Die maximalen Ablenkungszahlen n, die noch berücksichtigt wurden, waren in den Fällen $k = 1, 2, 3, 4, 5$ bzw. $n = 12, 17, 23, 28$ und 32. Das Ergebnis der Rechnung ist in den Figg. 8 u. 9 durch die

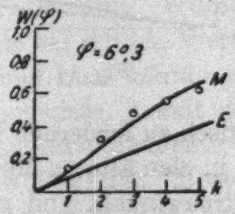


Fig. 8.

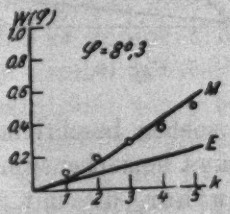


Fig. 9.

Kurven M (Mehrfachstreuung) dargestellt. Wegen der Unsicherheit der in Fig. 7 vorgenommenen Extrapolation liegt die Kurve bei $k = 4$ und 5 möglicherweise um Bruchteile eines Millimeters zu hoch oder zu tief.

Zum Vergleich sind die entsprechenden Werte der Rutherfordschen Einfachstreuungstheorie gemäß (30) und (46) als Kurven E beigefügt und die von Crowther auf experimentellem Wege ermittelten Punkte durch das Zeichen ○ markiert. Der Anschluß an die experimentellen Punkte ist bei den Kurven M unvergleichlich besser als bei den Kurven E. Wir bezweifeln

sogar die Realität der bei $k = 1$ und 2 vorhandenen Abweichungen, soweit diese nicht auf die Ungenauigkeit des Ansatzes $\omega = 1^0$ und auf den Geschwindigkeitsverlust der Strahlen zurückgeführt werden können. Die scheinbar bei kleinem k geradlinige Form der Crowtherschen Kurve halten wir für eine Täuschung; denn es ist klar, daß sie, wenn überhaupt am Rutherfordschen Modell etwas richtig ist, im Grenzfall unendlich dünner Schicht in die Rutherfordsche Kurve E übergehen, d. h. diese im Nullpunkt berühren muß. Bei wachsender Dicke wird sie dann wegen eintretender Mehrfachstreuung nach oben abweichen, um endlich bei großem d wieder nach unten abzubiegen und gegen 1 zu konvergieren. Diese letztere Abbiegung tritt, wie aus unserem Kurven M in Übereinstimmung mit den Crowtherschen Werten zu sehen ist, in der Nähe der Halbwertdicke ein, d. h. derjenigen Dicke, die $W(\varphi)$ zu $^1/_2$ macht.

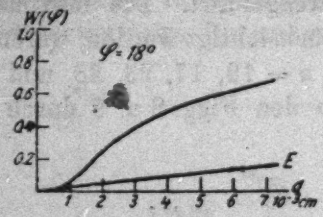


Fig. 10.

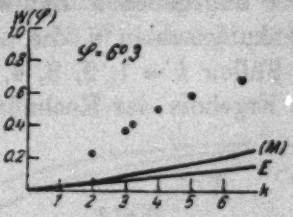


Fig. 11.

Die soeben beschriebene, theoretisch zu fordernde Kurvenform kommt bemerkenswerter Weise in den älteren Messungen von Crowther, die mit größeren Streuwinkeln und größeren Schichtdicken ausgeführt sind, ganz vorzüglich zum Ausdruck. Um dies zu zeigen, reproduzieren wir in Fig. 10 eine von Crowther herrührende graphische Darstellung seiner damals an Aluminiumfolien erhaltenen Resultate und fügen zum Vergleich wiederum die entsprechende Einfachstreuungskurve E bei, welche die Crowthersche in der Tat bei $d = 0$ berührt.

§ 2. Die übrigen Messungen.

Viel weniger günstig für die theoretische Prüfung als bei Gold liegen die Verhältnisse bei den mit anderen Elementen ausgeführten Messungen. Bei Aluminium ($Z = 13$) beispielsweise hätte man R gleich dem Radius der L-Schale zu setzen,

nach (47) also etwa gleich $1{,}9 \cdot 10^{-9}$ ($n = 2$, $Z = 13 - 2 = 11$). Dies ergäbe für μ den Wert $7 \cdot 10^5\ \mathrm{cm}^{-1}$ und demnach schon für die kleinste verwendete Schichtdicke $d = 8{,}45 \cdot 10^{-5}$ cm den Wert $\mu d = 60$. Die Bedingung (18) ist unter diesen Umständen nicht mehr erfüllbar. Die Berechnung nach den Formeln (12), (14), (16) aber erscheint hoffnungslos in Anbetracht der aus (28) abzulesenden Tatsache, daß in der Reihe (14) bei mittleren Schichtdicken etwa das 400. Glied den maximalen Beitrag liefert. Ähnlich wenn auch nicht ganz so ungünstig liegen die Verhältnisse bei Cu und Ag. Wählen wir für jedes Element als eine mittlere Vergleichsdicke d die von Crowther für $\varphi = 8{,}3°$ ermittelte Halbwertsdicke (s. o.), so erhält man für μd bei Au, Ag, Cu, Al, C bezw. die Werte: 21, 130, 330, 410, 1000. Die Mehrfachstreuung wird also mit abnehmendem Atomgewicht immer ausgesprochener. Hierzu stimmt sehr gut der von Crowther hervorgehobene Umstand, daß die Abweichung von der Rutherfordschen Theorie bei den leichten Elementen erheblich größer ist als bei den schweren.

Man könnte daran denken zu versuchen, die mittleren Ablenkungszahlen durch Verkleinerung des gewählten Atomradius R herabzudrücken. Würde man damit soweit gehen, daß ω z. B. auch bei Al den Wert 1° annimmt, so würde (18) erfüllbar werden, und man könnte zugleich die ganzen für Gold erhaltenen Ergebnisse, soweit sie die Abhängigkeit von φ betreffen, auf die anderen Elemente übertragen. Hierfür müßte im Falle der Crowtherschen Messungen bei Al z. B. der Atomradius von etwa $2 \cdot 10^{-9}$ cm (L-Schale) auf etwa $2{,}3 \cdot 10^{-10}$ cm herabgesetzt werden. Unsere im 1. Abschnitt § 3 erhaltenen Ergebnisse machen es aber äußerst wahrscheinlich, daß bei den verwendeten Schichtdicken ($\sim 10^{-4}$) die in Kernabständen $> 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ passierenden Elektronen einen sehr wesentlichen Beitrag zu der gemessenen Gesamtintensität liefern, dessen Vernachlässigung einen erheblichen Fehler bedeutet. Wir haben also zu erwarten, daß der Ansatz $\omega = 1°$ eine *zu kleine* Streuung ergibt. Daß dem in der Tat so ist, zeigt Fig. 11 in sehr charakteristischer Weise. In ihr ist für den Fall von Al (Foliendicke $= 8{,}45 \cdot 10^{-5}$ cm, Streuwinkel $\varphi = 6{,}3°$, $T/e = 1{,}53 \cdot 10^5$) außer den experimentellen Werten ⊙ und der Einfachstreuungskurve E unter der Bezeichnung (M) diejenige Kurve eingetragen,

die man aus (51), (53) für $\omega = 1^0$ erhält; sie bleibt weit unter der wirklichen Streuungskurve zurück.

Eine bündige Bestätigung unserer Theorie an den Crowtherschen Messungen mit Ag, Cu, Al und C wäre demnach nur von einer Auswertung der komplizierten Formeln (12) zu erwarten, und diese ist, wie bemerkt, praktisch undurchführbar. Wir müssen uns also mit der Feststellung begnügen, daß sowohl die allgemeine Form der Streuungskurven als auch die Größe der Abweichungen von der theoretischen Einfachstreuungskurve bei den verschiedenen Elementen qualitativ durchaus unseren Erwartungen entspricht.

Zusammenfassung.

Die von Crowther und Schonland gemessene β-Streuung kann (im Gegensatz zu der von Chadwick gemessenen α-Streuung) *nicht* als Einfachstreuung aufgefaßt werden. Die mittlere Anzahl der relativ zum gemessenen Streuwinkel merklichen Ablenkungen, die ein β-Elektron bei Durchquerung der in jenen Versuchen verwendeten Folien erfuhr, schwankt nämlich zwischen 3 und einigen Hundert. Hieraus erklärt sich die Stärke der gemessenen Streuung, die mit Rutherfords Theorie der Einfachstreuung unvereinbar war. Eine auf der Grundlage des Rutherford-Bohrschen Atommodelles konsequent durchgeführte Theorie der Mehrfachstreuung liefert, soweit sie eine numerische Auswertung gestattet (im Falle nicht zu großer mittlerer Ablenkungszahlen), quantitativ befriedigende Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Crowtherschen Messungen. Diese sind demnach mit dem Rutherford-Bohrschen Modell verträglich und geben keine Veranlassung, die allgemeine Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes zu bezweifeln oder den Elektronen magnetische Momente zuzuschreiben.

München, Institut f. theor. Physik, Juli 1922.

(Eingegangen 7. Juli 1922.)

3. *Zur Theorie des Kerr- und Faradayeffektes; von Karl F. Herzfeld.*

Einleitung.

Im Jahre 1875 hat Kerr gezeigt, daß durchsichtige isotrope Körper unter der Einwirkung starker elektrischer Felder doppeltbrechend werden. Wenn ein Lichtstrahl sich in der y-Richtung durch ein Medium fortpflanzt, welches einem elektrischen homogenen Feld $\mathfrak{E}$ in der z-Richtung ausgesetzt ist, dann ist der Brechungsindex verschieden, je nachdem die Schwingungsrichtung in der z- oder x-Achse liegt, und beide Größen n_z, n_x unterscheiden sich von dem Brechungsindex ohne Feld n_0. Die Differenz ist stets klein und proportional $\mathfrak{E}^2$. Man nennt

(1) $\quad j = \frac{n_z - n_x}{\lambda\, \mathfrak{E}^2}$ (λ Wellenlänge) die Kerrkonstante.[1])

Zur Erklärung dieses Effektes sind nun eine ganze Reihe von Theorien aufgestellt worden; sie alle ergeben die Proportionalität zu $\mathfrak{E}^2$, die meisten von ihnen ergeben auch die gleiche Abhängigkeit der Kerrkonstante von der Wellenlänge, dagegen unterscheiden sie sich durch die Temperaturabhängigkeit. Über die Frage der wirklichen Temperaturabhängigkeit besteht noch keine Einigkeit.

Alle bisher aufgestellten Theorien stehen auf dem Standpunkt der klassischen Elektrodynamik. Die Ableitungen sind meist recht kompliziert. Hier soll nun untersucht werden, wie diese Theorien vom Standpunkt der Quantentheorie darzustellen sind. Zugleich soll die Darstellung möglichst durchsichtig sein, wobei besonderes Gewicht auf die Frage gelegt wird, wie die Proportionalität mit $\mathfrak{E}^2$ zustande kommt. In einem weiteren Abschnitt soll kurz das Verhältnis zur Erfahrung klargelegt werden.

1) J. Kerr, Phil. Mag. (4) 50. S. 337. 446. 1875. Weitere Literatur bis 1908 bei W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, Leipzig 1908.

Endlich wird der Faradayeffekt nach der gleichen Methode behandelt. Dieser[1]) besteht bekanntlich darin, daß die Polarisationsebene von linear polarisiertem Licht durch viele durchsichtige Körper gedreht wird, wenn sie einem starken Magnetfeld ausgesetzt sind, dessen Kraftlinien parallel der Lichtfortpflanzung verlaufen.

§ 1. Theorie des Kerreffektes.

Das Wesentliche an unserer Darstellung besteht darin, daß wir die Entwicklungen in zwei Schritte teilen. Den ersten bildet die Diskussion der Dispersionsgleichung

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum_i \frac{\varrho_i}{\nu_{0i}^2 - \nu^2}. \tag{2}$$

Hier bedeutet ν die Schwingungszahl des auffallenden Lichtes, ϱ_i und ν_{0i} Konstante. ν_{0i} ist die Schwingungszahl von „Absorptionsstreifen", während ϱ_i deren Gesamtstärke (d. h. die Fläche der Absorptionskurve, nicht das Maximum) charakterisiert. Unsere Gleichung gilt nur in einiger Entfernung von den Absorptionsstreifen, und auf diesen Fall wollen wir auch die Diskussion beschränken.

Die Gleichung wird in der klassischen Elektronentheorie abgeleitet, in welcher dann ν_{0i} die Eigenschwingungszahl der $i$ten Elektronenart bedeutet, während $\varrho_{0i} = \frac{4\pi}{3} N_i \frac{e_i^2}{m_i}$ wird. Hierbei ist aber noch zu beachten[2]), daß ν_0 nicht die Stelle des beobachtbaren Absorptionsstreifens der betreffenden Substanz bedeutet, sondern diejenigen Stellen, an welchen die einzelnen Moleküle absorbieren, wenn sie voneinander sehr weit entfernt (etwa als Gas) sind. Dadurch, daß die Moleküle verhältnismäßig dicht gepackt sind, treten die Absorptionsstreifen an anderer Stelle auf, die man folgendermaßen erhält.

Aus (2) folgt

$$n^2 - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\sum \frac{3\varrho}{\nu_0^2 - \nu^2}} - \frac{1}{3}} = \frac{3\sum \frac{\varrho}{\nu_0^2 - \nu^2}}{1 - \sum \frac{\varrho}{\nu_0^2 - \nu^2}}. \tag{3}$$

1) W. Voigt, a. a. O.

2) Vgl. P. P. Ewald, Ann. d. Phys. 49. S. 31. 1916. Hrn. H. Faxén bin ich für den Hinweis hierauf zu großem Dank verpflichtet.

Das gibt also Absorptionsstreifen an den Stellen

$$\Sigma \frac{\varrho}{\nu_0^2 - \nu^2} = 1 \tag{4}$$

statt an den Stellen $\Sigma \frac{\varrho}{\nu_0^2 - \nu^2} = \infty$. Bei einem einzigen Streifen liegt dieser bei $\nu^2 = \nu_0^2 - \varrho$. Die Zahl 3 kommt bekanntlich dadurch zustande, daß die ein Teilchen erregende Kraft nicht $\mathfrak{E}$, sondern $\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$ ist, und ist daran gebunden, daß jedes Teilchen ganz isotrop (wenigstens im Mittel) von anderen umgeben ist.

Vom Standpunkt der Quantentheorie aus hat man nun die Gleichung (2) einfach als experimentell gegebene, für die Quantentheorie noch nicht ableitbare Tatsache hinzunehmen, wobei besonders hervorzuheben ist, daß auf Grund der Erfahrung die ν_0 die Schwingungszahlen der Absorptionsstreifen des Einzelmoleküls, nicht etwa Umlaufsfrequenzen der Elektronen oder dergl. sind. Auch der Zusammenhang der Lage der beobachtbaren Absorptionsstreifen mit den ν_0 hat als experimentelle Tatsache zu gelten, da die Abhängigkeit von der Dichte in (2) richtig wiedergegeben ist.

Ohne äußeres elektrisches Feld sind natürlich Lage und Stärke der Absorptionsstreifen von der Polarisationsrichtung des auffallenden Lichtes unabhängig; wenn das auch für das einzelne Molekül bezogen auf seine ausgezeichneten Achsen nicht gelten mag, so verwischt die gleichmäßige Verteilung dieser Achsen diesen Unterschied für ein „isotropes" Medium.

Der Kerreffekt besteht nun in Folgendem: Durch das äußere elektrische Feld werden direkt die Absorptionsstreifen geändert, sei es in ihrer Lage, sei es nur in ihrer Stärke und zwar verschieden für verschiedene Polarisationsrichtungen, d. h. die Absorptionsstreifen werden entweder in verschieden polarisierte Teile aufgespalten oder sie bleiben in ihrer Lage unverändert, werden aber teilweise polarisiert. Diese Änderungen üben auf dem Weg über die Dispersionsformel (2) ihren Einfluß auf den Brechungsindex auch im absorptionsfreien Gebiet und geben so zum Kerreffekt Anlaß.

Wir wollen jede direkte Beeinflussung eines Absorptionsstreifens durch ein elektrisches Feld Starkeffekt nennen. Hierbei

haben wir noch zu berücksichtigen, daß die am einzelnen Teilchen angreifende elektrische Kraft nicht die sogenannte „äußere elektrische Kraft", sondern die „erregende Kraft" $\frac{\varepsilon+2}{3}\mathfrak{E}$ ist. Hier bedeutet ε die (elektrostatische) Dielektrizitätskonstante. Die verschiedenen Theorien des Kerreffekts unterscheiden sich nur durch die verschiedenen Arten des Starkeffekts, den sie annehmen. Eine direkte Untersuchung des letzteren ist derzeit wohl aussichtslos, weil die für die Dispersion maßgebenden Absorptionsstreifen meist weit im Ultraviolett liegen und zudem ziemlich breit sein dürften.

Wir können folgende Gruppen von Theorien unterscheiden.

I. Annahme eines quadratischen Starkeffekts. Dieser quadratische Starkeffekt, d. h. eine Aufspaltung einer Spektrallinie in mindestens zwei Streifen, die in bzw. senkrecht zur Richtung des äußeren Feldes polarisiert sind, tritt an manchen Spektrallinien tatsächlich auf.[1]) Der Absorptionsstreifen möge in der einen Richtung polarisierte Komponenten von der Schwingungsdifferenz gegen die ursprüngliche Lage

$$\Delta\nu_1, \quad \Delta\nu_2 \ldots$$

und den relativen Intensitäten

$$a_1, \quad a_2$$

geben.

Wir führen dann die Abkürzung:

$$\sum a_s \Delta\nu_s = \tfrac{1}{9}\delta \cdot (\varepsilon+2)^2 \mathfrak{E}^2$$

ein, die die Verschiebung des Schwerpunkts für die eine Polarisationsrichtung charkterisiert. Dabei ist wichtig, daß diese Verschiebung nicht null ist, d. h. daß keine symmetrische Aufspaltung erfolgt.

Dann wird

$$(5) \quad 6\frac{n}{(n^2+2)^2}(n_x - n_0) = \left(-\sum \frac{2\varrho_i \nu_{0i}}{(\nu_{0i}^2 - \nu^2)^2}\delta_{xx}\right)\frac{(\varepsilon+2)^2}{9}\mathfrak{E}^2$$

und eine entsprechende Formel für die z Richtung.

Diese Formeln werden dann besonders einfach, wenn nur ein Absorptionsstreifen in Betracht kommt. Dann wird

$$(6) \quad \frac{n_x - n_0}{n_z - n_0} = \frac{\delta_x}{\delta_z},$$

1) R. Ladenburg, Phys. Zeitschr. 22. S. 49. 1921.

d. h. das Verhältnis der Verzögerungen ist gleich dem Verhältnis der Aufspaltungen.

Für die Kerrkonstante

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} j &= \frac{n_z - n_x}{\lambda \mathfrak{E}^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\varrho_0 \nu_0}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2} (\varepsilon + 2)^2 \frac{(n^2+2)^2}{27 n} (\delta_x - \delta_z) \\ &= \frac{(n^2-1)^2}{27 n} \frac{(\varepsilon+2)^2 \nu_0^2}{\varrho_0 \lambda} \frac{\delta_x - \delta_z}{\nu_0} \end{aligned} \right.$$

ergibt sich die Formel von Havelock[1]) in bezug auf die Abhängigkeit von der Wellenlänge $\left(\text{Konstante } \frac{(n^2-1)^2}{n\lambda}\right)$.

Die Doppelbrechung ist negativ oder positiv, je nachdem die zum Feld parallel schwingende Komponente mehr nach Ultraviolett liegt als die andere oder umgekehrt. Was den Zahlwert betrifft, so ist etwa für CS_2

$$\frac{(\varepsilon+2)^2 \nu_0^2}{27 \varrho_0} \frac{\delta_x - \delta_z}{\nu_0} \sim 1{,}1 \cdot 10^{-11}; \quad \text{da} \quad \frac{(\varepsilon+2)^2}{3 \varrho_0} \nu_0^2 \sim 4{,}5 \text{ ist,}$$

ergibt sich

$$\frac{\delta_x - \delta_z}{\nu_0} \sim 2{,}3 \cdot 10^{-11};$$

hierbei ist die Feldstärke in absoluten Einheiten gemessen.

Bei Na-Dampf hatte Ladenburg[2]) $\frac{\delta_x - \delta_z}{\nu_0} \sim 10^{-11}$ gefunden, das stimmt in der Größenordnung ganz gut. Die Theorie von Voigt[3]) gehört in diese Gruppe. Sein Resultat $\frac{n_z - n_0}{n_x - n_0} = 3$ hängt an seinem ganz speziellen Ansatz für den Starkeffekt, nach welchem die Schwingung in der z-Achse dreimal so weit verschoben wird, wie in der x-Achse.

II. Es wäre auch ein linearer Starkeffekt möglich. Auch dieses würde nur einen in $\mathfrak{E}^2$ proportionalen Kerreffekt geben, denn ein linearer Starkeffekt spaltet jede Linie symmetrisch auf, so daß die optischen Schwerpunkte sowohl der parallel als auch der senkrecht schwingenden Komponenten an der Stelle der ursprünglichen Linie zusammenfallen und die Aufspaltung in erster Ordnung den Brechungsindex gar nicht beeinflußt. Erst die zweiten Differenzen üben einen Einfluß aus,

1) T. H. Havelock, Phys. Rev. 28. S. 136. 1909.
2) R. Ladenburg, a. a. O.
3) W. Voigt, a. a. O., S. 356. 376.

infolge deren die längerwelligen Komponenten den Brechungsindex etwas stärker vergrößern als ihn das Abrücken der kurzwelligen verkleinert. Bezeichnet $\frac{1}{5}(\varepsilon+2)^2\mathfrak{E}^2\cdot\Delta^2$ das optische Trägheitsmoment der Komponenten einer Schwingungsrichtung, in welche der ursprüngliche Streifen zerfällt, so ergibt sich

$$(8)\qquad 6n\frac{n_x-n_0}{(n^2+2)^2}=\varrho_0\,2\frac{3\nu_0^2+\nu^2}{(\nu_0^2-\nu^2)^3}\,\frac{(\varepsilon+2)^2}{9}\,\mathfrak{E}^2\Delta_x^2$$

und eine entsprechende Gleichung für z. Dadurch, daß erst die zweite Differenz eine Rolle spielt, wird der Effekt wieder quadratisch. Dagegen gilt jetzt nicht mehr die Havelocksche Abhängigkeit von der Wellenlänge.

III. Starkeffekt der Intensität. Hierzu muß angenommen werden, daß mehrere, im einfachsten Fall zwei Absorptionsstreifen für die Dispersion bestimmend sind. Ohne Feld steht ihre Stärke in einem bestimmten Verhältnis, unabhängig von der Polarisationsrichtung. Im Feld soll sich nun die relative Stärke ändern und zwar verschieden für die verschiedenen Polarisationsrichtungen. Es wird daher

$$(9)\qquad 6n\frac{n_x-n_0}{(n^2+2)^2}=\frac{\Delta\varrho_{1x}}{(\nu_{01}^2-\nu^2)}+\frac{\Delta\varrho_{2x}}{(\nu_{02}^2-\nu^2)}$$

und eine entsprechende Formel für z.

Nimmt man an, daß die beiden Streifen einander nahe liegen (Abstand $\Delta\nu_{12}$) und daß die *Summe* der Intensitäten beider Streifen durch das Feld nicht geändert wird, d. h.

$$(10)\qquad \Delta\varrho_{1x}=-\Delta\varrho_{2x},\qquad \Delta\varrho_{1z}=-\Delta\varrho_{2z}$$

so wird, wenn ν_0 einen Mittelwert zwischen ν_1 und ν_2 bedeutet,

$$(11)\quad\begin{cases} 6n\dfrac{n_x-n_0}{(n^2+2)^2}=-\Delta\varrho_{1x}\dfrac{2\nu_0\Delta\nu_{12}}{(\nu_0^2-\nu^2)^2} \\ \sim-\dfrac{\Delta\varrho_{1x}}{(\varrho_1+\varrho_2)^2}2\nu_0\Delta\nu_{12}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2, \end{cases}$$

so daß die Havelocksche Dispersionsformel auch hier gilt.

Es wird

$$(12)\qquad \frac{n_x-n_0}{n_z-n_0}=\frac{\Delta\varrho_{1x}}{\Delta\varrho_{1z}}.$$

Als Erklärung für die Schwächung des einen Streifens auf Kosten des anderen im polarisierten Licht geben die Theorien

von Langevin und Born[1]) eine Richtung der Moleküle durch das elektrische Feld an. Beide denken sich mit dem einzelnen Molekül (im einfachsten Fall) zwei Schwingungsvorgänge fest verbunden, in der Art, daß das Molekül in einer Richtung senkrecht zu seiner Hauptachse betrachtet, zwei Linien aussenden würde, deren eine (z. B. 1) in der Hauptsache, deren andere senkrecht dazu schwingt. Bei Betrachtung längs der Hauptachse ist nur die Schwingung 2 unpolarisiert sichtbar. In dieser Formulierung können wir diese Aussagen auch für die Quantentheorie übernehmen. Ohne Feld haben die Moleküle alle beliebigen Richtungen, je $^1/_3$ haben ihre Hauptachse, $^2/_3$ ihre anderen Achsen jeweils in der x- bzw. z-Richtung.[2]) Es ist daher $\varrho_1 : \varrho_2 = 1:2$ (weil der Linie 2 zwei Molekülachsen entsprechen). Das Feld wirkt nun richtend, indem es mehr Moleküle parallel der z-Richtung stellt; d. h. ein zu $\Delta\varrho_{1_x}$ proportionaler Bruchteil der Moleküle richtet seine Hauptachse statt seiner Nebenachse ($\Delta\varrho_{1_x} = -\Delta\varrho_{2_x}$)[3]) in die Feldrichtung.

Diese zur z-Richtung hingedrehten Achsen werden aber nicht nur der x-, sondern in gleicher Zahl auch der y-Richtung entnommen, d. h. es ist

$$\Delta\varrho_{1_z} = -2\Delta\varrho_{1_x}. \tag{13}$$

So ergibt sich das von den beiden Theorien abgeleitete Resultat

$$\frac{n_z - n_0}{n_x - n_0} = -2$$

einfach aus der Annahme der Drehung und den Symmetrieverhältnissen.

Es ist jetzt nur noch auf das Quantitative einzugehen und zu zeigen, warum beide Theorien $\Delta\varrho$ proportional $\mathfrak{E}^2$, aber mit verschiedener Temperaturabhängigkeit ergeben.

Wenn wir zuerst die Annahme starrer Dipole besprechen,

---

1) P. Langevin, Le Radium 7. 249. 1910. M. Born, Ann. d. Phys. 55. 177. 1918.

2) Diese Ausdrucksweise möge im Interesse der Kürze gestattet sein. Genau wäre es natürlich, den bei isotroper Verteilung der Achsen in Betracht kommenden Bruchteil der Strahlung ($\overline{\cos^2\varphi} = {}^1/_3$) zu nehmen.

3) Diese oben gemachte Annahme ist also dadurch bedingt, daß jeder Achse eine Schwingung zukommt.

so ist die potentielle Energie eines solchen $\mathfrak{p} \cdot K \cos \delta$ ($\mathfrak{p}$ Moment, K erregende Kraft $= \frac{\varepsilon + 2}{3} \mathfrak{E}$) und die Richtwirkung in erster Näherung

$$\frac{U}{3kT} \sim \frac{\mathfrak{p} \cdot K}{3kT}, \tag{14}$$

also proportional K statt K^2. Aber auf diese Richtungswirkung kommt es gar nicht an. (14) gibt nämlich den Überschuß derjenigen Teilchen, die etwa das positive Ende der Hauptachse der $+z$-Richtung zukehren, über diejenigen an, die dieses Ende der $-z$-Richtung zukehren. Diese Größe ist zwar für die *polaren* Wirkungen (Dielektrizitätskonstante, Paramagnetismus) maßgebend, für uns aber gleichgültig, denn für uns kommt es nur darauf an, ob die Molekülhauptachse in der z- oder x-Achse liegt, d. h. nicht auf $\overline{\cos \varphi}$, sondern auf $\frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2}$. Der Effekt ist also zweiter Ordnung, denn die polar gerichteten Moleküle werden in erster Linie den entgegengesetzt liegenden entnommen und erst in zweiter Ordnung den senkrecht dazu liegenden. So ergibt die Bornsche Theorie

$$\frac{\Delta \varrho_{12}}{\varrho_1 + \varrho_2} = {}^1/_{15} \frac{\mathfrak{p}^2 (\varepsilon + 2)^2}{9 (kT)^2} \mathfrak{E}^2. \tag{15}$$

Die Langevinsche Theorie dagegen hat keine fertigen Dipole, für sie ist die potentielle Energie in Abhängigkeit vom Feld und vom Richtungscosmus von vornherein quadratisch

$$U \sim \frac{(\varepsilon + 2)^2}{9} \mathfrak{E}^2 \cdot \cos^2 \varphi. \tag{16}$$

Die Richtwirkung entnimmt die Teilchen von vornherein der x- und y-Achse, denn es gibt keine Gebilde in der z-Richtung, die „falsch" liegen. Daher kommt hier schon die erste Ordnung in der Entwicklung von $e^{-\frac{U}{kT}}$ in Betracht und es wird

$$\Delta \varrho_{12} \sim \frac{(\varepsilon + 2)^2 \mathfrak{E}^2}{9kT}, \tag{17}$$

also umgekehrt proportional T statt T^2.

Nach der klassischen Theorie ist im Fall des Langevinschen Ansatzes die Kerrkonstante stets negativ, weil sich die

„weichere" Bindung in die Feldrichtung einstellt und klassisch die elektrostatisch „weichere" auch optisch weicher ist.

Man könnte noch andere „Richtungtheorien" konstruieren. Die einfachste wäre wohl folgende: Das Molekül sendet nur eine Spektrallinie aus, etwa von der Art, die wir 1 genannt haben (elektrische Schwingung in der Hauptachse). Dann gibt es nur einen Absorptionsstreifen, der bei immer stärkerer Richtung der Moleküle für die z-Richtung immer stärker wird, für die x-Richtung immer mehr verschwindet. Bei vollständiger Richtung (Schwingung allein in der z-Richtung) wird $n_x = 1$ (bzw. wenigstens konstant, wenn im Ultraroten noch Schwingungen liegen). Die Formeln lauten in erster Näherung

$$(18)\quad \begin{cases} 6n\,\dfrac{n_z - n_0}{(n^2+2)^2} = \dfrac{\Delta\varrho_z}{\nu_0^2 - \nu^2} \\ 6n\,\dfrac{n_x - n_0}{(n^2+2)^2} = \dfrac{\Delta\varrho_x}{\nu_0^2 - \nu^2}, \quad \Delta\varrho_x = -2\Delta\varrho_z. \end{cases}$$

Hier gilt die Havelocksche Formel für die Abhängigkeit von der Wellenlänge also nicht (infolge des einfachen Streifens keine Differentiation nach ν_0!).

Für den Richtungseffekt, d. h. für $\Delta\varrho$, kann man nach Belieben wieder die Langevinsche oder die Dipolformel benützen.

IV. α) Die vierte Gruppe von Theorien setzt bei dem Zusammenhang zwischen den Absorptionsstreifen von Einzelmolekül und kompakter Masse ein. Es soll wie in Gruppe III die Absorption des Einzelmoleküls unverändert bleiben, aber der sichtbare Absorptionsstreifen des Mediums soll (für jede Polarisationsrichtung anders) verschoben werden, dadurch daß im elektrischen Feld die erregende Kraft der Lichtwelle nicht mehr

$$(19)\quad \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}, \quad \text{sondern} \quad (19')\quad \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3(1+\delta)}\mathfrak{P} \quad \text{wird.}$$

Die durchgeführten Theorien beschränken sich auf die Annahme eines Absorptionsstreifens. Die Wirkung des Ansatzes auf den sichtbaren Absorptionsstreifen und damit auf den Brechungsexponenten ist die gleiche wie wenn man ν_0 um den Betrag $\frac{\varrho_0\,\delta}{2\nu_0}$ vermehrt hätte. Es wird dann

$$6\frac{n(n_\infty - n_0)}{(n^2-1)^2} = \delta_\infty \tag{20}$$

es gilt also die (aus diesen Annahmen zuerst abgeleitete) Dispersionsformel.[1])

Die Abhängigkeit von Feld und Temperatur ist dann durch die entsprechende Abhänigigkeit der Größe δ, welche die in der Umgebung eines Moleküls herrschende Anisotropie mißt, bestimmt. Lundblad[2]) nimmt die Existenz einer mit dem Molekül fest verbundenen elliptischen Wirkungsfläche an, in die die fremden Moleküle nicht eintreten können, während sie außerhalb gleichmäßig dicht verteilt liegen sollen. Ohne Feld ist die Orientierung der Wirkungsfläche beliebig, also im (Zeit- oder Molekül-)mittel gleichmäßig und ergibt daher den Ansatz (19). Im elektrostatischen Feld soll eine Richtung nach Art der Langevinschen eintreten, die Feldabhängigkeit ergibt sich identisch mit der der Langevinschen Theorie (nur die Konstanten haben etwas andere Bedeutung, während sie bei Langevin durch die Anisotropie der Bindung gegeben sind, sind sie hier durch die Anisotropie der erregenden Kraft gegeben). Die Temperaturabhängigkeit ist insofern etwas allgemeiner, als außer dem T im Nenner auch die Form der Wirkungsfläche explizit von der Temperatur abhängen kann.

β) An diese Stelle gehört auch eine Theorie von Gans[3]), die zwar im allgemeinen ganz auf dem Standpunkt der Theorien III in bezug auf das Zustandekommen des Starkeffekts steht, den Lorentzschen Zusammenhang (19) zwischen äußerer und erregende Kraft aber leugnet. Gans hat seine Annahme, die unmittelbare Umgebung jedes Moleküls erzeuge ein Feld von wechselnder Richtung und solcher Stärke, daß für das resultierende erregende Feld schon Annährung an die Sättigung merkbar wird (Abweichungen von der Proportionalität von Polarisation und Feld) auf allen in Betracht kommenden Gebieten (Dielektrizitätskonstante, Paramagnetismus, Kerreffekt) durchgeführt und gute Übereinstimmung der sich so ergeben-

1) Havelock, a. a. O.

2) R. Lundblad, Diss. Upsala 1920. Auf diesen Zusammenhang wurde ich durch Herrn H. Faxén hingewiesen, dem ich dafür bestens danke.

3) R. Gans, Ann. d. Phys. 64. S. 781. 1921.

den Temperaturabhängigkeit mit der Erfahrung gefunden. Andererseits scheint mir die Zulässigkeit der Rechnungen und Grundannahme noch nicht genügend sicher gestellt.

Für die Feldabhängigkeit ergibt sich natürlich wieder das Resultat der Langevin-Bornschen Theorie, die Temperaturabhängigkeit ist dagegen wesentlich geringer und daher besser mit der Erfahrung im Einklang.

§ 2. Vergleich mit der Erfahrung.

Für den Vergleich mit der Erfahrung und zur Entscheidung zwischen den Theorien stehen im wesentlichen drei Gruppen von Gesetzen zur Verfügung:

1. Die Abhängigkeit von der Wellenlänge.
2. Die Abhängigkeit von der Temperatur.
3. Das Verhältnis der Verzögerungen $\frac{n_x - n_0}{n_z - n_0}$.

1. Für die Abhängigkeit von der Wellenlänge hat[1]) sich bei allen Substanzen mit Ausnahme von Äthyläther die Havelocksche Formel innerhalb der Meßgenauigkeit bestätigt. Damit sind verträglich Theorien der I. Art (quadratischer Starkeffekt) mit einem oder mehreren sehr nahe liegenden Absorptionsstreifen.

Theorien der III. Art oder der Art IVβ (Drehung) mit zwei Absorptionsstreifen, so daß jeder Achse des Moleküls eine Schwingung entspricht (Langevin-Born).

Theorien der Art IVα mit einem Absorptionsstreifen.

Bei Äthyläther ist die Dispersion der Doppelbrechung kleiner als (7) entspricht.

2. Die Temperaturabhängigkeit. Nach allen Theorien, die dem Punkt 1 genügen, ist die Doppelbrechung proportional dem temperaturabhängigen Faktor $(\varepsilon + 2)^2 \frac{(n_0^2 - 1)^2}{n_0}$. Sie unterscheiden sich durch die Temperaturabhängigkeit des nächsten Faktors.

Nach den Theorien der Gruppe I ist er temperaturabhängig.

Nach Langevin ist er $\sim 1/T$.

Nach der Dipoltheorie $\sim 1/T^2$.

---

1) H. E. Mc Comb, Phys. Rev. **29**. S. 525. 1909; N. Lyon, Ann. d. Phys. **46**. S. 758. 1915.

Nach den Theorien der Art IVα unbestimmt.

Nach den Theorien der Art IVβ weniger abhängig als nach III.

Die Messungsergebnisse sind noch nicht ganz eindeutig. Nach Bergholm[1]) verläuft die Kurve für Toluol, Xylol, Schwefelkohlenstoff, bei denen keine Dipole[2]) zu erwarten sind, etwa entsprechend der Langevinschen Theorie, eher mit etwas geringerer Temperaturabhängigkeit. Das ließe sich durch das Zusammenwirken eines quadratischen Starkeffektes (temperaturunabhängig, I) und eines Langevinschen Richtungseffekts erklären oder auch nach IV. Bei Brom- und Chlorbenzol ist das Verhalten ebenso, obwohl man Dipole vielleicht erwarten könnte. Bei Chloroform und Äthyläther fanden Bergholm und Lyon[3]) eine etwas stärkere Temperaturabhängigkeit als $1/T$, was auf die gleichzeitige Anwesenheit des Langevineffektes und fester Dipole deutet. Bei beiden Substanzen sind Dipole[2]) vorhanden. Übrigens haben beide Substanzen negative Kerrkonstante, was nach der Langevinschen Theorie allein nicht zu erklären wäre. Die Temperaturabhängigkeit gilt für den absoluten Betrag dieser Größe.

3. Für das Verhältnis $\frac{n_x - n_0}{n_z - n_0}$ ergibt die Richtungstheorie in der Langevin-Bornschen Form das Verhältnis -2. Nach den Theorien der Gruppe I ist das Verhältnis je nach der speziellen Form des Starkeffektes verschieden und ist gleich dem Verhältnis der entsprechenden Schwerpunktsverschiebungen. Die Experimente[4]) haben noch keine eindeutige Entscheidung gebracht, weil Elektrostriktion und Wärmeentwicklung die Messungen fälschen.

Für die Richtigkeit der Langevin-Bornschen Theorie wäre es entscheidend, zu wissen, ob tatsächlich zwei Ab-

---

1) C. Bergholm, Ann. d. Phys. 51. S. 414. 1916; Zeitschr. f. Phys. 8. S. 68. 1921; G. Szivessy, Zeitschr. f. Phys. 2. S. 30. 1920.

2) H. Isnardi, Zeitschr. f. Phys. 9. S. 153. 1922. Übrigens hat auch Toluol ganz schwache Dipole. Brom- und Chlorbenzol sind nicht untersucht.

3) N. Lyon und F. Wolfram, Ann. d. Phys. 63. S. 789. 1920; N. Lyon, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 64. 1921.

4) F. Himstedt, Ann. d. Phys. 48. S. 1061. 1915; 59. S. 332. 1919.

sorptionsstreifen im berechneten Abstand vorhanden sind. Leider liegen die maßgebenden Streifen stets im Ultraviolett. Für CS_2 berechnet Langevin einen Streifenabstand $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 0{,}21$. Die Dispersion von CS_2 ist über ein sehr breites Gebiet von Flatow[1]) angegeben und scheint tatsächlich auf das Vorhandensein mehrerer ultravioletter Absorptionsstreifen hinzuweisen.

§ 3. Theorie des Faradayeffektes.[2])

Beim Faradayeffekt findet sich ein Unterschied im Brechungsexponenten von rechts- und links-zirkularpolarisiertem Licht, das *in* der Richtung der magnetischen Kraftlinien den Körper durchsetzt. Dieser Unterschied ist proportional dem Feld $\mathfrak{H}$, nicht dem Quadrat.

Wir haben den Faradayeffekt anzusehen als die Wirkung des Zeemanneffektes auf den Brechungskoeffizienten. Hierbei ist zu beachten: Der Zeemanneffekt ist proportional dem Feld (entsprechend Theorie II des Kerreffektes), in der Längsdurchsicht, auf die es hier ankommt, sind die beiden Komponenten des klassischen Dubletts *entgegengesetzt* polarisiert, heben sich daher im Gegensatz zu dem entsprechenden Fall des (transversalen) Kerreffektes auch in erster Ordnung nicht auf, d. h. der Effekt selbst ist der Aufspaltung, d. h. $\mathfrak{H}$ direkt proportional.

Der Auffassung entspricht es, daß bei fast allen Substanzen die Drehung der Polarisationsebene positiv ist, was bedeutet, daß die kurzwellige Komponente rechts-[3]), die langwellige links zirkularpolarisiert ist, d. h. der Brechungsexponent des rechts-zirkularpolarisierten Lichtes ist durch das Abrücken des Streifens kleiner, der des linksdrehenden durch das Heranrücken des betreffenden Streifens größer geworden. Entgegengesetzten Faradayeffekt haben nach Voigt[4]) nur Eisensalze, Salze der seltenen Erden und Titanchlorid. Gerade die Salze der seltenen Erden haben aber auch die entgegengesetzten

1) E. Flatow, Ann. d. Phys. 12. S. 85. 1903.

2) Man vergleiche auch die Darstellung von H. A. Lorentz, Enz. d. math. Wiss. V. 22. S. 245 f. Leipzig 1909.

3) rechts-zirkularpolarisiert soll eine Drehung in der Richtung des positiven magnetisierenden Stromes bedeuten.

4) W. Voigt, a. a. O., S. 20.

Drehungen im longitudinalen Zeemaneffekt[1]), also das falsche Vorzeichen der Larmorpräzession. Die Zuordnung zwischen Zeemann- und Faradayeffekt dagegen ist wieder richtig. Für die Eisensalze und das Titanchlorid sind die entsprechenden Zeemaneffekte (im Absorptionsstreifen des Salzes!) nicht bekannt, so daß sich hier nichts sagen läßt.

Würden die Verhältnisse genau so liegen wie eben beschrieben und wäre die primäre Aufspaltung gegeben durch $\pm \delta$ (eventuell als Schwerpunkt), so ergibt sich bei der Annahme eines einzigen Absorptionsstreifens

$$6\frac{n(n_\pm - n_0)}{(n^2+2)^2} = \frac{-2\nu_0\varrho}{(\nu_0^2-\nu^2)^2}\ (\pm\delta) \tag{21}$$

oder

$$n_\pm - n_0 = -\frac{(n^2-1)^2}{3n}\frac{\nu_0^2}{\varrho_0}\left(\pm\frac{\delta}{\nu_0}\right).$$

Also wieder die Havelocksche Abhängigkeit von ν. Tatsächlich hat sich diese Formel auch bei vielen Stoffen gut bewährt.[2]) Andere Messungen aber ergaben[3])

$$n_\pm - n_0 = -\frac{(n^2-1)^2}{3n}\frac{\nu_0\nu}{\varrho_0}\left(\pm\frac{\delta}{\nu_0}\right), \tag{22}$$

d. h. es sieht so aus, als ob nicht ν_0 eine Aufspaltung $\pm\delta$ erlitte, sondern ν eine solche von $\mp\delta$. Auf Grund der klassischen Theorie ergibt sich gerade die zweite Formel. Mathematisch kommt das so zustande, daß die Kraftgleichung als Einfluß des Magnetfeldes $[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$ enthält, durch das $\mathfrak{v}$ tritt dann das ν als Faktor auf. Physikalisch heißt das folgendes. Ohne Magnetfeld fällt auf das Molekül der Eigenfrequenz ν_0 die rechts- oder linksdrehende Welle. Wird das Magnetfeld eingeschaltet, so bekommt das Molekül eine Drehung, die Larmorpräzession, von der Frequenz δ und zwar nach rechts. Es dreht sich also der linksdrehenden Welle entgegen und reagiert auf diese, wie das ruhende Molekül auf eine Welle der Frequenz $\nu+\delta$ reagiert hätte, entsprechend wirkt jetzt die rechtsdrehende Welle auf das Molekül wie eine solche der Frequenz $\nu-\delta$.

1) J. Becquerel, Phys. Zeitschr. 8. S. 682. 929. 1907.

2) A. Cotton und H. Mouton, Compt. rend. 147. S. 198. 1908; C. A. Skinner, Phys. Rev. 29. S. 541. 1909.

3) H. Becquerel, Compt. rend. 125. S. 679. 1897.

§ 4. Longitudinaler Kerreffekt.

Wir sind nun ohne weiteres imstande anzugeben, was wir für den noch nicht beobachteten longitudinalen Kerreffekt erwarten dürfen.

Wir werden jedenfalls keine Doppelbrechung bekommen, daß folgt aus der vollständigen Symmetrie um das elektrische Feld, sondern nur einen vom gewöhnlichen verschiedenen Brechungsindex n'.

I und II. Wir können ohne weiteres Formel (5) bzw. (8) für $n' - n_0$ benützen, wobei die Indizes an δ und Δ wegfallen.

Nach der Langevin-Bornschen Theorie erhalten wir nach der damaligen Bezeichnungsweise, daß Moleküle, deren Zahl $\frac{1}{2}\Delta\varrho_{1z}$ proportional ist, mit ihrer Hauptachse (Schwingung 1) aus der jetzt allein optisch wirksamen Lage (z. B. x — Achse) herausgedreht und dafür mit der Schwingung 2 in diese Ebene kommen. Es ist also:

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{6n(n'-n_0)}{(n^2+2)^2} &= -\frac{1}{2}\frac{\Delta\varrho_{1z}}{(\nu_{01}^2-\nu^2)} + \frac{1}{2}\frac{\Delta\varrho_{1z}}{(\nu_{02}^2-\nu^2)} \\ &= \frac{\Delta\varrho_{1z}}{2}\frac{2\nu_0\Delta\nu_{12}}{(\varrho_1+\varrho_2)^2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2, \end{aligned} \right.$$

d. h.

$$(21) \qquad n' - n_0 = (n_z - n_0) = \cdot\frac{1}{2}(n_z - n_0).$$

Die andere angedeutete Richtungstheorie ergibt einen mit stärker werdender Richtung sich 1 immer mehr nähernden Brechungsexponenten, da für in der Feldrichtung fortgepflanztes Licht immer weniger absorbierende Moleküle da sind.

Die Theorien der Gruppe IV verhalten sich denen der Gruppe III ganz analog. Der Unterschied zwischen longitudinalem Kerr- und Faradayeffekt rührt daher, daß die Komponenten im longitudinalen Starkeffekt unpolarisiert, im longitudinalen Zeemanneffekt auf beiden Seiten der ursprünglichen Linie entgegengesetzt polarisiert sind.

Zusammenfassung.

Der Inhalt der bisherigen Theorien des Kerreffektes und ihre Deutung im Sinne der Quantenauffassung läßt sich am besten erkennen, wenn man die Untersuchung in zwei Teile teilt.

I. Die Dispersionstheorie, d. h. die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Brechungsexponent und Lage und Stärke der Absorptionsstreifen.

II. Die Theorie des Starkeffekts, d. h. die Untersuchung der Beeinflussung der Absorptionsstreifen in Stärke und Lage durch das äußere Feld. Die verschiedenen Theorien unterscheiden sich nur in letzterem Punkte, indem sie entweder einen Starkeffekt der gewöhnlichen Art auf das Einzelmolekül oder eine für die verschiedenen Polarisationsrichtungen verschiedene Intensitätsänderung durch Gleichrichtung der Moleküle oder endlich eine Beeinflussung der gegenseitigen Einwirkung benachbarter Moleküle annehmen. Die Experimente gestatten noch keine eindeutige Entscheidung zwischen den Theorien. — Der Faradayeffekt läßt sich entsprechend als Einfluß der Larmorpräzession der Moleküle auf den Brechungsexponenten darstellen.

Zum Schluß werden die Formeln für den longitudinalen Kerreffekt gegeben.

(Eingegangen 19. Juli 1922.)

4. *Theorie der Thermionenströme;* *von Richard Gans.*

Als Grundproblem der Elektronenröhren bezeichnen wir das folgende. Gegeben sei die geometrische Anordnung der beiden Elektroden im Hochvakuum, ferner die Temperatur der Glühkathode und die Potentialdifferenz zwischen Anode und Kathode. Zu berechnen ist die Potentialverteilung und die Stromstärke. Aus der Potentialverteilung folgt ohne weiteres die räumliche Verteilung der Feldstärke und der Ladungen sowie der Energiedichte, und kennt man die Stromstärke als Funktion der Spannungsdifferenz und betrachtet diese als stetig veränderlich, so hat man damit auch die sog. Charakteristik.

Wie man sieht, geht die Aufgabe über die hinaus, welche Laue[1]) sich gestellt hat, der nur Gleichgewichtszustände behandelt.

In der vorliegenden Arbeit sollen einige Annahmen gemacht werden, die zur Vereinfachung des Problems beitragen, ohne die wesentlichen Züge des Vorgangs zu verwischen.

Zunächst setzen wir voraus, daß die Elektroden unendlich ausgedehnte einander parallele Platten sind, während praktisch der zylindrische Fall wichtiger ist. Sodann wollen wir, ebenso wie andere Autoren, die Diffusionskräfte zwischen den Elektronen vernachlässigen, also annehmen, daß diese sich nur insofern beeinflussen, als sie zum elektrischen Potential beitragen. Schließlich sollen auch die Vorgänge an den Elektroden, was bedenklicher ist, idealisiert werden. Wir wollen von der Bildkraft absehen und weder die Reflexion noch die Sekundärstrahlung berücksichtigen, die sicherlich eine gewisse Rolle spielen.[2])

1) M. v. Laue, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 15. S. 205, 257, 301. 1918; Jahrbuch d. drahtlosen Telegraphie u. Telephonie 16. S. 199. 1920; Ann. d. Phys. 58. S. 695. 1919; Phys. Zeitschr. 20. S. 202. 1919.

2) O. v. Baeyer, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 10. S. 96, 958. 1908; Phys. Zeitschr. 10. S. 168. 1909; E. Gehrts, Ann. d. Phys. 36. S. 995. 1911; O. W. Richardson, Phys. Rev. 29. S. 557. 1909.

Langmuir[1]) macht die keineswegs richtige Annahme, daß der Potentialgradient an der Kathode verschwindet, daher folgt bei ihm auch eine Charakteristik, die Proportionalität zwischen der Stromstärke und der $^3/_2$ten Potenz des Potentials gibt, d. h. eine Formel, die von dem Sättigungsstrom keine Rechenschaft gibt. Schottky[2]) ist der richtigen Methode am nächsten gekommen, indem er die Geschwindigkeitsverteilung der aus der Kathode entweichenden Elektronen berücksichtigt und eingesehen hat, daß das Vorhandensein eines Potentialminimums zwischen den Elektroden einen entscheidenden Einfluß auf die Stromstärke ausübt. Da er aber die für das Potential gültige Differentialgleichung nicht löst, kann er über den Wert und die Lage dieses Minimums keine genügend genaue Angaben machen.

Das sind die Gründe, die uns veranlassen, das Problem unter den oben angegebenen Vereinfachungen, die übrigens die früheren Autoren auch eingeführt haben, streng zu behandeln.

§ 1. *Der Vorgang an der Glühkathode.* Im Innern der glühenden Kathode bewegen sich die Teilchen mit Geschwindigkeiten, die dem Maxwellschen Verteilungsgesetze[3]) entsprechen, d. h. es haben

$$dN_0 = N_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}} e^{-h v_0^2} dv_0 \tag{1}$$

Teilchen eine x-Komponente der Geschwindigkeit, die zwischen v_0 und $v_0 + dv_0$ liegt. Hier bedeutet

$$h = \frac{m}{2kT}, \tag{2}$$

und es ist m die Masse des Elektrons, N_0 ihre Anzahl in der Volumeinheit, T die absolute Temperatur der Kathode.

Von diesen Teilchen können nur diejenigen aus der Elektrode austreten, deren kinetische Energie senkrecht zur Oberfläche $\frac{m}{2} v_0^2$ einen bestimmten, vom Elektrodenmaterial ab-

1) J. Langmuir, Phys. Rev. (2) 2. S. 450. 1913; Phys. Zeitschr. 15. S. 348. 1914; vgl. auch C. D. Child, Phys. Rev. 32. S. 499. 1911.

2) W. Schottky, Ann. d. Phys. 44. S. 1011. 1914.

3) Das ist nicht ganz richtig (vgl. § 4), da der im Metall fließende und an seiner Oberfläche austretende Strom (also nicht der Heizstrom) die Verteilung, wenn auch nur äußerst wenig, verändert.

hängigen Wert w übersteigt, weil die Grenzschicht Metall–Vakuum als elektrische Doppelschicht aufzufassen ist. Ist die Normalkomponente v_0 der Geschwindigkeit eines Teilchens so groß, daß es ins Vakuum übertreten kann, so hat es dort unmittelbar neben der Elektrode eine Geschwindigkeit v_1, die sich aus

$$\frac{m}{2}(v_0^2 - v_1^2) = -\varepsilon(\Phi_0 - \Phi_1) = w \tag{3}$$

berechnet, wenn Φ_0 und Φ_1 die Potentiale an der inneren und äußeren Oberfläche der Elektrode bedeuten und ε die Elementarladung ist (ε ist also negativ).

Führen wir die dem Potential proportionale Funktion

$$u = -\frac{\varepsilon}{kT}\Phi \tag{4}$$

ein, die wir der Einfachheit halber im folgenden stets das Potential nennen wollen, so wird (3)

$$h(v_0^2 - v_1^2) = u_0 - u_1 = \frac{w}{kT}. \tag{5}$$

Nach der Kontinuitätsgleichung muß $v_0\,dN_0 = v_1\,dN_1$ sein, unter v_1 die Normalgeschwindigkeit an der äußeren Oberfläche der Kathode, unter dN_1 die dort vorhandene Teilchenzahl pro Volumeinheit verstanden, deren Normalgeschwindigkeit zwischen v_1 und $v_1 + dv_1$ liegt. Da ferner nach (5) $v_0\,dv_0 = v_1\,dv_1$ ist, so ergibt sich mittels (1) und (5)

$$\varepsilon v_1\,dN_1 = \varepsilon v_0\,dN_0 = \varepsilon N_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}}\, e^{-\frac{w}{kT}}\, e^{-hv_1^2} v_1\,dv_1. \tag{6}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$\frac{J}{q} = \frac{\varepsilon N_0}{2\sqrt{h\pi}}\, e^{-\frac{w}{kT}} \tag{7}$$

ein, wo q die Oberfläche der Kathode bedeutet, so gibt nach (6)

$$\varepsilon v_1\, q\, dN_1 = 2Jh\, e^{-hv_1^2} v_1\,dv_1 \tag{8}$$

den Beitrag der betrachteten Gruppe Elektronen zu dem aus der Kathode austretenden Strom.

Da, wie wir später sehen werden, J der Sättigungsstrom ist, so erkennen wir in (7) nach Substitution von (2) das Richardsonsche Gesetz der Abhängigkeit zwischen J und T. Übrigens erkennt man schon jetzt durch Integration von (8) über alle Geschwindigkeiten, daß J die Gesamtemission ist.

Laue[1]) hat auf thermodynamischem Wege eine Formel abgeleitet, die in Widerspruch mit der obigen (7) zu stehen scheint, doch ist dieser Widerspruch, wie er selbst[2]) bemerkt, nur scheinbar, da die bei ihm in der Exponentialfunktion auftretende „Konstante" eine Funktion der Temperatur sein kann.

Nach (8) stellt also

$$dN_1 = \frac{2Jh}{\varepsilon q} e^{-hv_1^2} dv_1 \tag{9}$$

die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Elektronen dar, die gerade aus der Glühkathode ausgetreten sind.

§ 2. *Die Differentialgleichung für das Potential und ihr Integral.* Ein Elektron, das aus der bei $x = x_1$ liegenden Kathode mit der Normalgeschwindigkeit v_1 ausgetreten ist, wird sich nach dem Gesetze (Energiegleichung)

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_1^2) = -\varepsilon(\Phi - \Phi_1) \tag{10}$$

weiterbewegen, wenn v und Φ Geschwindigkeit und Potential an einer beliebigen Stelle des Vakuums bedeuten. Mittels (2) und (4) schreibt diese Gleichung sich

$$h(v^2 - v_1^2) = u - u_1 . \tag{11}$$

Die Poissonsche Gleichung liefert $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -4\pi\varepsilon N$, die am betrachtetem Orte vorhandene Teilchenzahl in der Volumeinheit verstanden, oder mittels (4)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4\pi\varepsilon^2}{kT} N. \tag{12}$$

Jetzt haben wir drei Fälle zu unterscheiden.

I. Fall: u wächst von $x = x_1$ (Kathode) beständig bis $x = x_2$ (Anode).

II. Fall: u nimmt von $x = x_1$ bis $x = x_2$ beständig ab.

III. Fall: u hat zwischen x_1 und x_2 ein Minimum.

Weitere Fälle existieren nicht, denn da nach (12) $\frac{d^2u}{dx^2} > 0$ ist, kann u kein Maximum haben, und da die Funktion mit

1) M. v. Laue, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 15. S. 205. 1918.
2) M. v. Laue, ibid. S. 247.

ihrer Ableitung stetig ist, sind auch mehrere Minima unmöglich, weil zwischen diesen Maxima liegen müßten.

I. Fall: für $x_1 < x < x_2$ sei $\frac{du}{dx} > 0$. Dann wachsen die Geschwindigkeiten nach (11) dauernd an, und alle Teilchen gelangen zur Anode. Da nun nach der Kontinuitätsgleichung

$$v\,dN = v_1\,dN_1 \tag{13}$$

ist, so wird aus (12)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4\pi\varepsilon^2}{kT}\int\frac{v_1\,dN_1}{v} \tag{12'}$$

und mittels (9) und (11)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{16\pi\varepsilon J h^{3/2}}{mq}\int_0^\infty \frac{e^{-hv_1^2}v_1\,dv_1}{\sqrt{hv_1^2+u-u_1}}, \tag{14}$$

Durch die Substitution

$$hv_1^2 + u - u_1 = s^2 \tag{15}$$

geht (14) über in

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{g^2}{2}e^{u-u_1}\left[1-\Theta\left(\sqrt{u-u_1}\right)\right], \tag{16}$$

wenn zur Abkürzung

$$g^2 = \frac{16(\pi h)^{3/2}\varepsilon J}{mq}; \qquad \Theta\left(\sqrt{z}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}} e^{-s^2}\,ds \tag{17}$$

gesetzt ist. (16) ist die für u gültige Differentialgleichung.

Die Stromstärke i berechnet sich nach der Kontinuitätsgleichung zu

$$i = \varepsilon q\int v\,dN = \varepsilon q\int v_1\,dN_1,$$

also nach (9)

$$i = 2Jh\int_0^\infty e^{-hv_1^2}v_1\,dv_1 = J.$$

Wir erhalten in diesem Falle also eine von der Potentialdifferenz unabhängige Stromstärke, die, wie wir sehen werden, der Sättigungsstrom ist. Für diesen Fall nimmt also die *Charakteristik* die einfache Form an

$$i = J. \tag{18}$$

Ein erstes Integral ergibt sich aus (16) durch Multiplikation mit $\frac{du}{dx} = \frac{d(u\,u_1)}{dx}$ und nachfolgende Integration. Wir erhalten

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = g^2[p(u-u_1)+c], \tag{19}$$

wenn $p(z)$ die folgende Funktion bedeutet

$$p(z) = e^z[1-\Theta(\sqrt{z})] - 1 + 2\sqrt{\frac{z}{\pi}}. \tag{20}$$

Die Integrationskonstante c hängt nach (19) mit dem für $x = x_1$ (an der Kathode) gültigen Wert von du/dx durch die Beziehung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_1^2 = g^2 c$$

zusammen, ist also stets positiv.

Aus (19) folgt durch nochmalige Integration

$$\int_0^{u-u_1} \frac{dz}{\sqrt{p(z)+c}} = g(x-x_1). \tag{21}$$

Hier haben wir die zweite Integrationskonstante bereits so gewählt, daß $u = u_1$ für $x = x_1$ wird.

Setzen wir in (21) zur Bestimmung von c $x = x_2$; $u = u_2$ und führen wir den Elektrodenabstand $x_2 - x_1 = l$ ein, indem wir

$$g\,l = \lambda \tag{22}$$

setzen und der Kürze halber λ den Elektrodenabstand nennen, so erhalten wir

$$\int_0^{u_2-u_1} \frac{dz}{\sqrt{p(z)+c}} = \lambda. \tag{23}$$

Das ist bei gegebenem Elektrodenabstand λ und gegebener Potentialdifferenz $u_2 - u_1$ eine transzendente Gleichung zur Bestimmung von c. Führen wir den so ermittelten Wert von c in (21) ein, so haben wir damit das Potential u als Funktion von x gefunden.

Der Vergleich von (16) und (12) ergibt für die Raumdichte der Elektrizität

$$N\varepsilon = \frac{J}{q}\sqrt{h\pi}\,e^{u-u_1}[1-\Theta(\sqrt{u-u_1})]. \tag{24}$$

Ferner ist der Mittelwert der Geschwindigkeit

$$(25)\quad \bar{v} = \frac{\int v\, dN}{N} = \frac{\int v_1\, dN_1}{N} = \frac{J}{eqN} = \frac{1}{\sqrt{h\pi}} \cdot \frac{1}{e^{u-u_1}[1-\Theta(\sqrt{u-u_1})]}.$$

Die elektrostatische Energiedichte ist nach (19)

$$(26)\quad \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = \frac{m}{2e}\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,\frac{J}{q}\,[p(u-u_1)+c]$$

und die Feldstärke

$$(27)\quad -\frac{d\Phi}{dx} = -\left(\frac{4\pi m}{e}\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,\frac{J}{q}\right)^{1/2}\sqrt{p(u-u_1)+c}.$$

Aus diesem Grunde interessieren uns die in (24) bis (27) auftretenden Funktionen. Wir haben sie für verschiedene Werte von c ermittelt und durch numerische Integration mittels der Simpsonschen Regel aus (21) $g(x-x_1)$ berechnet. Damit haben wir dann das Potential, die Dichte, die mittlere Geschwindigkeit, die Energiedichte und die Feldstärke als Funktionen des Orts gefunden. Tabelle 1 in § 6 gibt die diesbezüglichen Zahlenwerte.

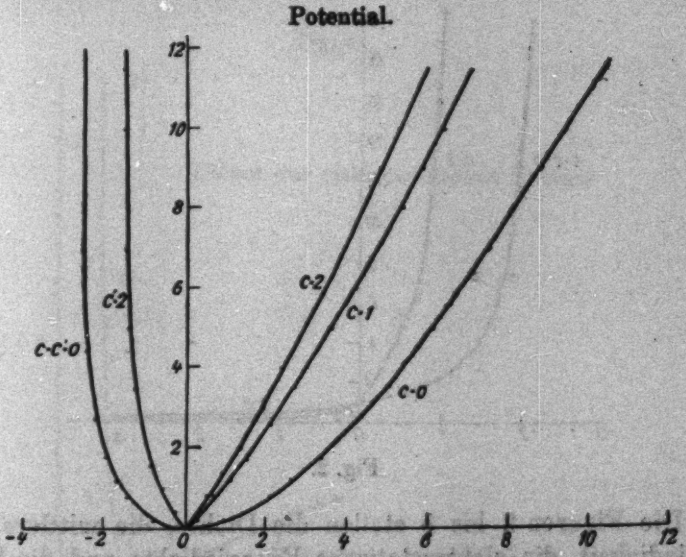


Fig. 1.

Fig. 1 stellt in ihrem ersten Quadranten $u-u_1$ als Funktion von $g(x-x_1)$ dar, und zwar für verschiedene Werte von c. Graphisch bestimmt man den Wert von c, der zu einer bestimmten Potentialdifferenz u_2-u_1 und einem bestimmten

Elektrodenabstand λ gehört, indem man in Fig. 1 λ von 0 nach rechts als Abszisse und $u_2 - u_1$ als Ordinate aufträgt. Dadurch kommt man zu einer ganz bestimmten Kurve der Schar. Liegt der durch die Koordinaten λ, $u_2 - u_1$ bestimmte Punkt nicht oberhalb, sondern unterhalb der für $c = 0$ gültigen Kurve, so gelangt man auf diese Weise zu keiner Kurve der Schar; dann liegt eben der bisher behandelte Fall du/dx überall > 0 nicht vor. Die möglichen Wertepaare λ, $u_2 - u_1$ werden von den nicht möglichen durch die Kurve

$$\int_0^{u_2-u_1} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} = \lambda \tag{28}$$

getrennt. Ist

$$\lambda \leqq \int_0^{u_2-u_1} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}, \tag{28'}$$

so liegt der von uns soeben behandelte Fall vor.

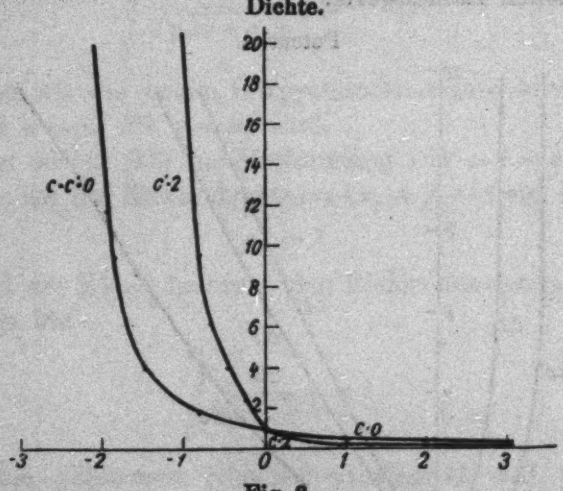


Fig. 2.

Die Figuren 2 bis 5 stellen die Dichte, die mittlere Geschwindigkeit, die elektrostatische Energiedichte und die Feldstärke als Funktionen des Orts dar.

II. Fall: für $x_1 < x < x_2$ sei $\frac{du}{dx} < 0$. Die kalte Elektrode hat dann ein niedrigeres Potential als die heiße, es ist also eine „Gegenspannung" angelegt. Die Geschwindigkeiten

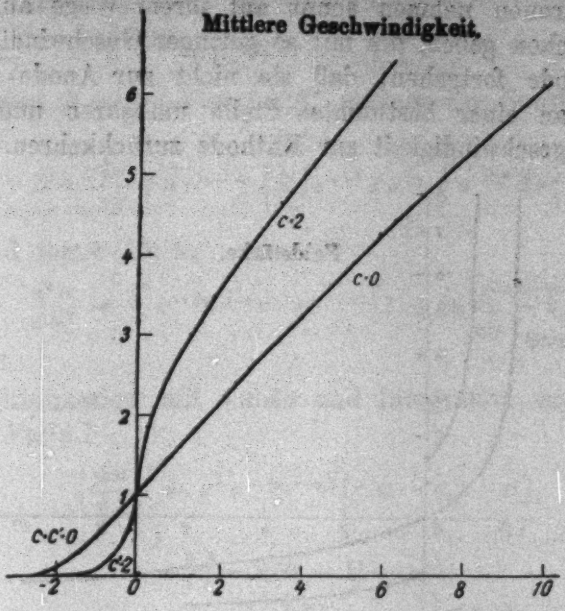

Mittlere Geschwindigkeit.
6
5
4
3
2
1
c·2
c·0
c·c'·0
c·2
-2
0
2
4
6
8
10

Fig. 3.

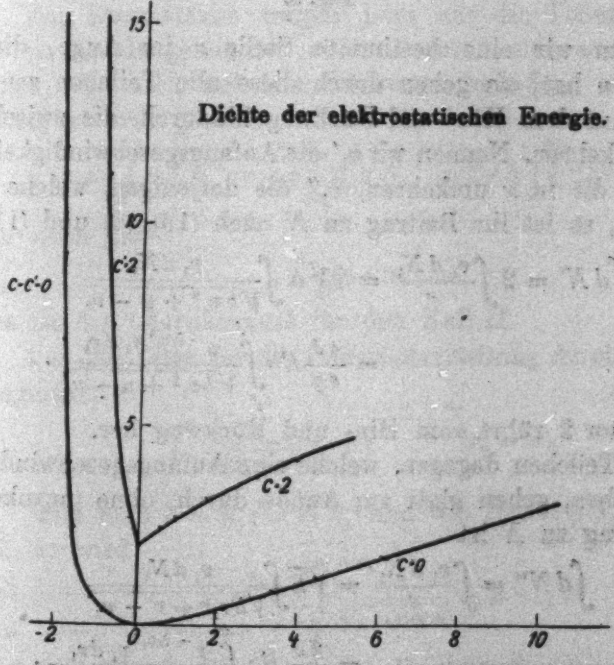

Dichte der elektrostatischen Energie.
15
10
5
c·c'·0
c·2
c·2
c·0
-2
0
2
4
6
8
10

Fig. 4.

der Elektronen nehmen somit auf ihrem Wege ab, und es wird Teilchen geben, die mit so geringer Geschwindigkeit von der Kathode fortgehen, daß sie nicht zur Anode gelangen, sondern an einer bestimmten Stelle umkehren und mit der Ausgangsgeschwindigkeit zur Kathode zurückkehren.

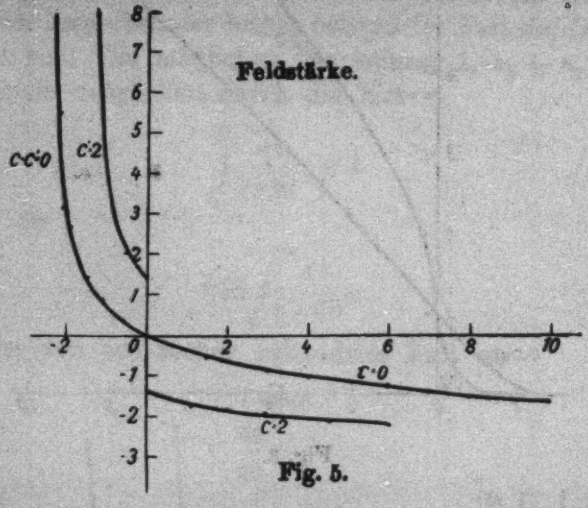


Fig. 5.

Fassen wir eine bestimmte Stelle x ins Auge, die das Potential u hat, so gehen durch diese alle Teilchen zweimal, nämlich auf dem Hin- und Rückweg hindurch, die zwischen x und x_1 umkehren. Nennen wir v_1' die Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen, die in x umkehren, v_1'' die derjenigen, welche in x_1 umkehren, so ist ihr Beitrag zu N nach (13), (9) und (11)

$$\int dN' = 2\int \frac{v_1\, dN_1}{v} = 2\sqrt{h}\int \frac{v_1\, dN_1}{\sqrt{h v_1^2 + u - u_1}}$$

$$= \frac{4J}{eq} h^{3/2} \int_{v_1'}^{v_1''} \frac{e^{-h v_1^2} v_1\, dv_1}{\sqrt{h v_1^2 + u - u_1}}.$$

Der Faktor 2 rührt vom Hin- und Rückweg her.

Die Teilchen dagegen, welche eine Anfangsgeschwindigkeit $> v_1''$ haben, gehen glatt zur Anode durch, ohne umzukehren. Ihr Beitrag zu N ist

$$\int dN'' = \int \frac{v_1\, dN_1}{v} = \sqrt{h}\int \frac{v_1\, dN_1}{\sqrt{h v_1^2 + u - u_1}}$$

$$= \frac{2J}{eq} h^{3/2} \int_{v_1''}^{\infty} \frac{e^{-h v_1^2} v_1\, dv_1}{\sqrt{h v_1^2 + u - u_1}}.$$

Aus (11) ergibt sich

$$h v_1'^2 = u_1 - u; \qquad h v_1''^2 = u_1 - u_2, \tag{29}$$

so daß aus $N = \int dN' + \int dN''$ mittels der Substitution (15)

$$N = \frac{2J}{sq}\sqrt{h}\, e^{u-u_1}\left\{2\int_0^{\sqrt{u-u_2}} e^{-s^2} ds + \int_{\sqrt{u-u_2}}^{\infty} e^{-s^2} ds\right\} \tag{30}$$

wird und somit (12) in

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{g^2}{2} e^{-(u_1-u_2)} \cdot e^{u-u_2}\left[1 + \Theta(\sqrt{u-u_2})\right] \tag{31}$$

übergeht.

Multiplikation mit du/dx und Integration ergibt analog wie im Falle I

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = g^2 e^{-(u_1-u_2)}\left[r(u-u_2) + c'\right], \tag{32}$$

wo

$$r(z) = 2(e^z - 1) - p(z) \tag{33}$$

bedeutet. c' ist stets > 0, denn es ist $\left(\frac{du}{dx}\right)_2^2 = g^2 e^{-(u_1-u_2)} c'$.

Zur Stromstärke tragen jetzt nur die Teilchen bei, die bis zur Anode gelangen, während zur Dichte auch die Elektronen, die sich auf dem Rückwege befinden, einen Beitrag liefern, wie wir gesehen haben. Es ist also

$$i = sq\int v\, dN'' = sq\int v_1\, dN_1'' = 2Jh\int_{v_1''}^{\infty} e^{-h v_1^2} v_1\, dv_1$$

oder nach (29)

$$i = J e^{-(u_1-u_2)}. \tag{34}$$

Dies ist die *Charakteristik* für den Fall II.

Aus (32) folgt für die Potentialverteilung durch nochmalige Integration

$$\int_0^{u-u_2} \frac{dz}{\sqrt{r(z)+c'}} = g e^{-\frac{u_1-u_2}{2}}(x_2 - x). \tag{35}$$

Setzt man $u = u_1$; $x = x_1$ und wie früher $g(x_2 - x_1) = gl = \lambda$, so wird

$$e^{\frac{u_1-u_2}{2}} \int_0^{u_1-u_2} \frac{dz}{\sqrt{r(z)+c'}} = \lambda \tag{36}$$

die transzendente Gleichung zur Bestimmung von c'.

Da $c' \gtrless 0$ ist, muß im Falle II sein

$$\lambda \leqq e^{\frac{u_1 - u_2}{2}} \int_0^{u_1 - u_2} \frac{dz}{\sqrt{r(z)}} \cdot \tag{37}$$

Der zweite Quadrant der Fig. 1 stellt $u - u_2$ als Funktion von $g \cdot e^{-\frac{(u_1 - u_2)}{2}} (x_2 - x)$ dar. Graphisch bestimmt man c', indem man $\lambda e^{-\frac{u_1 - u_2}{2}}$ von 0 aus nach links als Abszisse, $u_1 - u_2$ nach oben als Ordinate abträgt.

Die Figuren 2 bis 5 stellen in ihrer linken Hälfte die Dichte, die mittlere Geschwindigkeit, die elektrostatische Energiedichte und die Feldstärke als Funktion des Orts dar.

Im Falle I liegt die Glühkathode in den Figuren in 0, die Anode irgendwo rechts davon, im Falle II liegt die Anode in 0, die Glühkathode irgendwo links davon.

Tabelle 1 in § 6 gibt die der Dichte proportionale Funktion $e^z [1 + \Theta(\sqrt{z})]$, $r(z)$ sowie $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r(z) + c'}}$ für $c' = 0$ und $c' = 2$.

III. Fall: $\frac{du}{dx} < 0$ für $x_1 < x < x'$; $\frac{du}{dx} > 0$ für $x' < x < x_2$. u hat also im Punkte x' einen Minimalwert u'.

Wir stellen zunächst die Differentialgleichung für $x' < x < x_2$ auf, d. h. zwischen dem Minimum und der Anode.

Nach (12′) im Verein mit (9) folgt eine Gleichung, die ganz analog (14) ist, nur sind die Grenzen des Integrals auf der Rechten andere. Es tragen nämlich alle die Elektronen zur Dichte im betrachteten Gebiet bei, die über das Minimum hinüberkommen, für die nach (11) also

$$\infty > h v_1^2 > u_1 - u'.$$

Somit wird

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{16 \pi s J h^{1/2}}{m q} \int_{\sqrt{\frac{u_1 - u'}{h}}}^{\infty} \frac{e^{-h v_1^2} v_1 \, dv_1}{\sqrt{h v_1^2 + u - u_1}}$$

oder mittels der Substitution (15) und Beachtung von (17)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{g^2}{2} e^{-(u_1 - u')} \cdot e^{u - u'} [1 - \Theta(\sqrt{u - u'})]. \tag{38}$$

Multiplikation mit du/dx und Integration ergibt

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = g^2 e^{-(u_1-u')} \cdot p(u-u'). \tag{39}$$

Die Integrationskonstante ist bereits so bestimmt, daß $\frac{du}{dx}=0$ für $u=u'$. Nochmalige Integration liefert

$$\int_0^{u-u'} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} = g\, e^{-\frac{(u_1-u')}{2}} (x-x'). \tag{40}$$

Hier ist bereits beachtet, daß für $x=x'$ das Potential u den Wert u' annimmt. x' und u' sind die beiden Integrationskonstanten des Integrals (40) von (38).

Für $x_1 < x < x'$, d. h. zwischen Glühkathode und Minimum, tragen in einem Punkte x zur Dichte bei erstens alle Teilchen, welche zwischen x und x' umkehren werden und die, welche dort bereits umgekehrt sind, die entsprechenden Geschwindigkeiten v_1 sind also doppelt zu zählen (auf dem Hin- und Rückwege), zweitens die Teilchen, die über x' hinausfliegen und zur Anode gelangen. Diese sind natürlich einfach zu zählen.

Somit folgt aus (12′) im Verein mit (9):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{16\pi s J h^{2/3}}{m q}\left\{2\int_{\sqrt{\frac{u_1-u}{h}}}^{\sqrt{\frac{u_1-u'}{h}}} \frac{e^{-h v_1^2} v_1\, dv_1}{\sqrt{h v_1^2 + u - u_1}} + \int_{\sqrt{\frac{u_1-u'}{h}}}^{\infty} \frac{e^{-h v_1^2} v_1\, dv_1}{\sqrt{h v_1^2 + u - u_1}}\right\}$$

oder mittels der Substitution (15) und Einführung von g und Θ nach (17):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{g^2}{2} e^{-(u_1-u')}\left[1 + \Theta\left(\sqrt{u-u'}\right)\right]. \tag{41}$$

Das erste Integral wird mit Einführung der Funktion r nach (33):

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = g^2 e^{-\frac{u_1-u'}{2}} r(u-u'). \tag{42}$$

Die Integrationskonstante ist hier bereits so bestimmt, daß $\frac{du}{dx}=0$ für $u=u'$. Nochmalige Integration ergibt:

$$\int_0^{u-u'} \frac{dx}{\sqrt{r(x)}} = e^{-\frac{u_1-u'}{2}} g(x'-x), \tag{43}$$

da für $x=x'$ $u=u'$ werden soll.

(40) und (43) stellen u als Funktion von x dar für $x' < x$ bzw. $x' > x$. Für $x = x'$ sind u und du/dx, wie es sein muß, stetig.

Zur Stromstärke i tragen nur die Teilchen bei, welche wirklich zur Anode gelangen, es ist also nach (13) und (9)

$$i = \varepsilon q \int v\, dN = \varepsilon q \int v_1\, dN_1 = 2Jh \int_{\sqrt{\frac{u_1 - u'}{h}}}^{\infty} e^{-\lambda v_1^2} v_1\, dv_1,$$

so daß

$$i = J e^{-(u_1 - u')} \tag{44}$$

folgt.

Man beachte, daß man die rechten Seiten der Gleichungen (21), (35), (40), (43) mit Benutzung der Beziehungen (18), (34), (44) einheitlicher $g\sqrt{\frac{i}{J}}(x - x_1)$; $g\sqrt{\frac{i}{J}}(x_2 - x)$; $g\sqrt{\frac{i}{J}}(x - x')$; $g\sqrt{\frac{i}{J}}(x' - x)$ schreiben kann.

Für den Fall III gilt also in Fig. 1 die untere Kurve ($c = 0$), und zwar liegt die Glühkathode irgendwo links, die Anode rechts von 0. Die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und dem Minimum steht nach (44) in einfachem Zusammenhang mit dem Sättigungsgrad i/J.

§ 3. *Die Charakteristik.* Die Beziehung zwischen i/J und $u_2 - u_1$ heißt die Charakteristik. Sie enthält den Elektrodenabstand oder nach (22) die Größe λ als Parameter.

Im Falle I hatten wir gefunden [siehe Gleichung (18)]

$$\frac{i}{J} = 1. \tag{45a}$$

Diese Formel gilt nach (28′) für

$$\lambda \leqq \int_0^{u_2 - u_1} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}. \tag{46a}$$

Im Falle II ist nach (34):

$$\frac{i}{J} = e^{-(u_1 - u_2)} \tag{45b}$$

für

$$\lambda \leqq e^{\frac{u_1 - u_2}{2}} \int_0^{u_1 - u_2} \frac{dx}{\sqrt{r(x)}}. \tag{46b}$$

Im Falle III folgt durch Einsetzen von $u = u_2$; $x = x_2$ in (40) sowie $u = u_1$; $x = x_1$ in (43) und nachfolgende Addition:

$$\int_0^{u_2-u'} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} + \int_0^{u_1-u'} \frac{dx}{\sqrt{r(x)}} = e^{-\frac{u_1-u'}{2}} g(x_2 - x_1).$$

Setzen wir nach (22) $g(x_2 - x_1) = gl = \lambda$; nach (44) $u_1 - u' = \ln \frac{J}{i}$ und $u_2 - u' = u_2 - u_1 + u_1 - u' = u_2 - u_1 + \ln \frac{J}{i}$, so folgt in diesem Falle als Charakteristik:

$$\lambda \sqrt{\frac{i}{J}} = \int_0^{\ln \frac{J}{i}} \frac{dx}{\sqrt{r(x)}} + \int_0^{u_2 - u_1 + \ln \frac{J}{i}} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}. \tag{45c}$$

Dieser Fall gilt für

$$\lambda \geqq e^{\frac{u_1-u_2}{2}} \int_0^{u_1-u_2} \frac{dx}{\sqrt{r(x)}} \text{ für } u_1 > u_2 \text{ und } \lambda \geqq \int_0^{u_1-u_2} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \text{ für } u_1 < u_2. \tag{46c}$$

Lassen wir bei festgehaltenem Elektrodenabstand $\lambda, u_2 - u_1$ stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen, so haben wir drei Gebiete zu unterscheiden. Erstens das Gebiet der „starken Gegenspannungen“ (Fall II), in dem $u_2 - u_1 < 0$ ist, und das bis zu zu der durch (46b) gegebenen Spannung gilt. Um diese Grenze bestimmen zu können, ist in Tab. 2 des § 6 die Funktion $e^{\frac{z}{2}} \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{r(x)}}$ berechnet. Von dieser negativen Spannung an bis zu der durch (46a) gegebenen positiven Spannung gilt (45c). Dieses Gebiet (Fall III) wollen wir das der „mittleren Spannungen“ nennen. Die Charakteristik für diesen Teil berechnet sich mittels der Tab. 2 des § 6 leicht, indem man einen Wert von i/J zwischen 0 und 1 annimmt, daraus $\lambda \sqrt{\frac{i}{J}} - \int_0^{\ln \frac{J}{i}} \frac{dx}{\sqrt{r(x)}}$ ermittelt und dann mittels der Tabelle für $\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ denjenigen Wert $z = u_2 - u_1 + \ln \frac{J}{i}$ sucht, für den das Integral den Wert $\lambda \sqrt{\frac{i}{J}} - \int_0^{\ln \frac{J}{i}} \frac{dx}{\sqrt{r(x)}}$ hat.

Als Spezialfall ergibt sich aus (45c) der „spontane Strom“ i_0, d. h. der Strom, der ohne Spannungsdifferenz zwischen den Elektroden ($u_2 - u_1 = 0$) entsteht. Es ist

$$\lambda\sqrt{\frac{i_0}{J}} = \int_0^{\ln\frac{J}{i_0}} \frac{dz}{\sqrt{r(z)}} + \int_0^{\ln\frac{J}{i_0}} \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}. \tag{47}$$

Um ihn für ein gegebenes λ sofort ermitteln zu können, haben wir die Funktion $e^{z/2}\left(\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r}}\right)$ berechnet (vgl. Tab. 2 in § 6). Der Wert z, für den diese Funktion den Zahlenwert λ ergibt, ist $\ln J/i_0$.

Das dritte Gebiet (Fall I) der „hohen Spannungen“ oder der „Sättigung“ ist schließlich durch (46a) gegeben. Hier gilt (45a), d. h. der Sättigungsstrom ist erreicht.

Um zu zeigen, wie die Zahlenrechnung sich gestaltet, wählen wir als Beispiel $\lambda = 3$. Aus der Tabelle für $e^{z/2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r}}$ finden wir, daß diese Funktion den Wert 3 für $z = 1{,}154$ annimmt, d. h. für $u_2 - u_1 < -1{,}154$ berechnet sich i/J nach (45b). Ferner ergibt sich, daß für $z = 1{,}526$ das Integral $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p}} = 3$ ist, d. h. $\frac{i}{J} = 1$ für $u_2 - u_1 > 1{,}526$. Zwischen diesen beiden Potentialwerten gilt (45c). Der spontane Strom ergibt sich aus $e^{z/2}\left(\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r}}\right)$. Nach der Tabelle für diese Funktion folgt, daß sie für $z = 0{,}3861$ den Wert 3 annimmt, also ist $\ln \frac{J}{i_0} = 0{,}3861$, und somit gilt für $u_2 - u_1 = 0$: $\frac{i_0}{J} = 0{,}6797$.

Die folgende Tabelle enthält die Charakteristiken für $\lambda = 3$ und $\lambda = 10$ (vgl. Fig. 6). Wir erkennen den typischen Verlauf der Strom-Spannungskurve und finden die bekannte Erscheinung wieder, daß die Sättigung erst bei höheren Spannungen erreicht wird, wenn der Elektrodenabstand größer ist.

Der Sättigungsstrom wird nach unserer Theorie nicht etwa asymptotisch für $\lim u_2 - u_1 = \infty$, sondern für einen endlichen Spannungswert erreicht.

$\lambda = 3$		$\lambda = 10$	
$u_2 - u_1$	$\frac{i}{J}$	$u_2 - u_1$	$\frac{i}{J}$
− 2,485	0,0833	− 4,605	0,0100
− 1,946	0,1429	− 3,912	0,0200
− 1,386	0,2500	− 2,998	0,0499
− 1,154	0,3154	− 1,381	0,1400
− 0,5737	0,5000	0,000	0,2283
0,0000	0,6797	2,429	0,4000
0,4161	0,8000	5,040	0,6000
0,8120	0,9000	7,833	0,8000
1,175	0,9700	9,731	0,9500
1,526	1,0000	10,93	1,0000

Charakteristik.

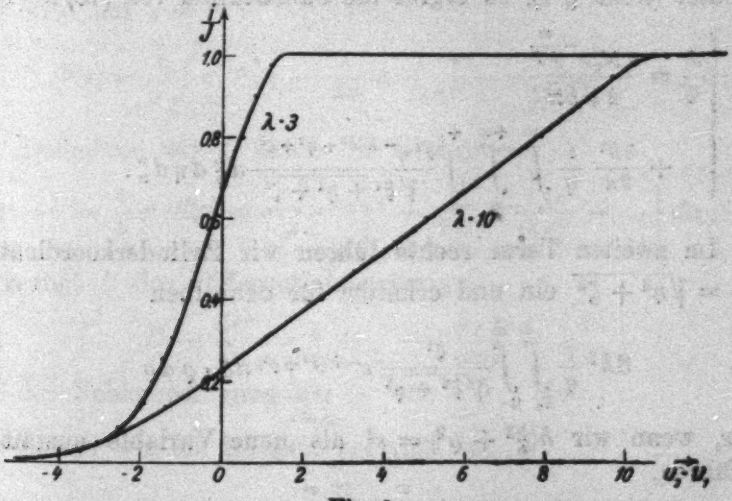


Fig. 6.

§ 4. *Korrektion der Richardsonschen Formel.* Wir hatten in § 1 angenommen, daß im Innern der Glühkathode die Geschwindigkeiten der Elektronen nach dem Maxwellschen Gesetze verteilt sind. Das ist nicht ganz richtig, da sich der ungeordneten Wärmebewegung die geordnete Bewegung des in das Vakuum austretenden Stroms überlagert. Deshalb wollen wir im folgenden zeigen, daß die theoretisch vorhandene Korrektion praktisch ohne Bedeutung ist.

Wir nehmen mit Lorentz an, daß im Metall nur die Elektronen beweglich sind, während die positive Elektrizität an den festliegenden Molekeln haftet, die als Kugeln angesehen werden dürfen. Dann gilt[1]) für die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ bei Vorhandensein eines Stroms i:

$$(48)\quad f = N_0 \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} + \frac{3h^2}{2\pi s}\,\frac{i}{q}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\,e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Da nun der heraustretende Strom

$$(49)\quad J = sq\int_{\xi_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi f\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

ist, wo

$$(50)\quad h\xi_0^2 = \frac{w}{kT}$$

bedeutet (siehe § 1), so ergibt die Substitution von (48) in (49):

$$(51)\quad \begin{cases} \dfrac{J}{q} = \dfrac{s\,N_0\,e^{-\frac{w}{kT}}}{2\sqrt{h\pi}} \\ \quad + \dfrac{3h^2}{2\pi}\,\dfrac{i}{q}\displaystyle\int_{\xi_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi^2\,e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \end{cases}$$

Im zweiten Term rechts führen wir Zylinderkoordinaten $\xi, \varrho = \sqrt{\eta^2+\zeta^2}$ ein und erhalten für denselben

$$3h^2\,\frac{i}{q}\int_{\xi_0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\varrho^2}}\,e^{-h(\xi^2+\varrho^2)}\,d\xi\cdot\varrho\,d\varrho$$

oder, wenn wir $h(\xi^2+\varrho^2) = s^2$ als neue Variable anstatt ϱ einführen,

$$3h^{3/2}\,\frac{i}{q}\int_{\xi_0}^{\infty}\xi^2\,d\xi\int_{\sqrt{h\xi}}^{\infty}e^{-s^2}\,ds.$$

Schließlich führen wir die neue veränderliche $\sqrt{h}\,\xi = t$ ein und erhalten:

$$3\,\frac{i}{q}\int_{\sqrt{\frac{w}{kT}}}^{\infty}t^2\,dt\int_{t}^{\infty}e^{-s^2}\,ds,$$

---

1) H. A. Lorentz, The theory of electrons, Leipzig 1909, S. 271.

so daß nach (51)

$$\frac{J}{q} = \frac{s N_0 e^{-\frac{w}{kT}}}{2\sqrt{h\pi}} + \frac{i}{q}\Psi\left(\frac{w}{kT}\right). \tag{52}$$

Der erste Term rechts entspricht der Richardsonschen Formel, das Zusatzglied wird durch die Stromstärke hervorgerufen.

Es bedeutet:

$$\Psi(z) = 3\int_{\sqrt{z}}^{\infty} t^2 dt \int_{t}^{\infty} e^{-s^2} ds. \tag{53}$$

Für große Argumente gilt die halbkonvergente Entwicklung

$$\int_{t}^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{e^{-t^2}}{2t}\left(1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1\cdot 3}{(2t^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2t^2)^3} + \ldots\right);$$

also wird mit $x = t^2$

$$\Psi(z) = \frac{3}{4}\int_{z}^{\infty} e^{-x}\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1\cdot 3}{(2x)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x)^3} + \ldots\right] dx. \tag{54}$$

Definieren wir U durch die Gleichung:

$$U = \frac{4}{3} e^z \Psi(z) = e^z \int_{z}^{\infty} e^{-x}\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1\cdot 3}{(2x)^2} - \ldots\right] dx, \tag{55}$$

so genügt U der Differentialgleichung:

$$U - \frac{dU}{dx} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1\cdot 3}{(2x)^2} - \ldots \tag{56}$$

mit der Nebenbedingung $\lim_{x=\infty}(e^{-x} U) = 0$. (56')

Setzen wir als Integral von (56) an:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^n}, \tag{57}$$

so erhalten wir aus (56):

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n + (n-1)A_{n-1}}{x^n} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1\cdot 3}{(2x)^2} - \ldots$$

und durch gliedweise Vergleichung die A_n, so daß

$$U = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{5}{(2x)^2} - \frac{35}{(2x)^3} + \frac{315}{(2x)^4} - \frac{3465}{(2x)^5} + \ldots \tag{58}$$

wird, denn das noch hinzukommende Integral Ce^{z} der homogen gemachten Gleichung (56) verschwindet wegen (56').

Somit wird schließlich

$$(59)\quad \Psi = \frac{3}{4} e^{-z}\left[1 - \frac{1}{2z} + \frac{5}{(2z)^2} - \frac{35}{(2z)^3} + \frac{315}{(2z)^4} - \dots\right]$$

Die Auswertung ergibt:

z	$\Psi(z)$
30	$6{,}91 \cdot 10^{-15}$
20	$1{,}51 \cdot 10^{-9}$
10	$3{,}27 \cdot 10^{-5}$
5	$4{,}6 \cdot 10^{-3}$

Da nach Langmuir[1]) für Wolfram $\frac{w}{k} = 5{,}25 \cdot 10^4$ gilt, so ergibt sich z. B. für $T = 2625^0$

$$\Psi\left(\frac{w}{kT}\right) = \Psi(20) = 1{,}51 \cdot 10^{-9},$$

die Korrektion ist also gänzlich zu vernachlässigen.

§ 5. *Zusammenfassung und Ausblick.* 1. Der Vorgang an der Glühkathode erklärt sich durch die Bewegung der Elektronen in ihrem Innern nach dem Maxwellschen Verteilungsgesetz [Gleichung (1)]. Wegen einer elektrischen Doppelschicht auf der Metalloberfläche können nur Elektronen entweichen, deren Normalgeschwindigkeit einen bestimmten Wert überschreitet [Gleichung (3)]. Integriert man über alle Teilchen, die in der Zeiteinheit entweichen, so erhält man den Sättigungsstrom in der Form des Richardsonschen Gesetzes [Gleichung (7)]:

$$J = a\sqrt{T}\, e^{-\frac{b}{T}}.$$

2. Die von der Glühkathode losgelösten Elektronen bewegen sich nach dem Energieprinzip. Das in diesem vorkommende elektrische Potential Φ ergibt sich aus der Poissonschen Gleichung $\Delta\Phi = -4\pi\varepsilon N$ [Gleichung (12)], die Stromstärke aus der Formel $i = \varepsilon q \sum N v$. Da aber Teilchen durch die Raumladungen so verzögert werden können, daß sie zur Kathode zurückkehren, so ist zu beachten, daß sowohl die auf dem Hinweg wie auch die auf dem Rückweg befindlichen Elektronen zur Dichte N beitragen, dagegen liefern zu $\sum N v$,

1) J. Langmuir, Phys. Zeitschr. 15. S. 517. 1914.

d. h. zum Strom, nur diejenigen Elektronen einen Beitrag, die zur Anode gelangen.

3. Wegen dieses verschiedenen Verhaltens sind drei Gebiete zu unterscheiden, das der starken Gegenspannungen, das der mittleren Spannungen und das der hohen Spannungen oder der Sättigung. In allen Fällen lassen sich die Dichte, die mittlere Geschwindigkeit, die Energiedichte und die Feldstärke als Funktionen des Orts durch Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung gewinnen (§ 2).

4. Die Strom-Spannungskurve setzt sich aus drei Teilen stetig zusammen, die den drei eben erwähnten Gebieten entsprechen. Für starke Gegenspannungen

$$\lambda < e^{\frac{u_2-u_1}{2}} \int_0^{u_1-u_2} \frac{dz}{\sqrt{r}} \text{ gilt } \frac{i}{J} = e^{-(u_1-u_2)};$$

für das Sättigungsgebiet:

$$\lambda < \int_0^{u_2-u_1} \frac{dz}{\sqrt{p}} \text{ ist } \frac{i}{J} = 1,$$

während die Charakteristik in dem Zwischengebiet

$$\lambda \sqrt{\frac{i}{J}} = \int_0^{\ln \frac{J}{i}} \frac{dz}{\sqrt{r}} + \int_0^{u_2-u_1+\ln \frac{J}{i}} \frac{dz}{\sqrt{p}}$$

lautet.

5. Die ganze Theorie benutzt die folgenden Konstanten: die Planck-Boltzmannsche Konstante k, Ladung ε und Masse m des Elektrons als universelle Konstanten, die beiden Materialkonstanten der Richardsonschen Formel a und b, die absolute Temperatur der Glühkathode, die Spannungsdifferenz $\Phi_2 - \Phi_1$ der Elektroden und ihren gegenseitigen Abstand l. Sie erlaubt es, alle interessierenden Größen aus diesen Daten zu berechnen.

6. Mängel der vorliegenden Theorie sind, daß erstens der ebene Fall anstatt des praktisch wichtigen zylindrischen behandelt worden ist, daß zweitens die Zusammenstöße der Elektronen vernachlässigt und drittens das Verhalten der an die Elektroden von außen anprallenden Teilchen nicht richtig berücksichtigt worden ist (Vernachlässigung der Reflexion und der Sekundärstrahlung): das soll in späteren Arbeiten geschehen.

Tabelle 1.

z	$e^z(1-\Theta)$	$p(z)$	$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}$	$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p+1}}$	$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p+2}}$	$e^z(1+\Theta)$	$r(z)$	$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r(z)}}$	$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r+2}}$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,000	0,000	0,0000	0,0000
0,2	0,6439	0,1485	0,3672	0,1927	0,1388	1,798	0,294	0,8168	0,1369
0,4	0,5585	0,2671	1,409	0,3747	0,2733	2,430	0,717	1,108	0,2626
0,6	0,4980	0,3718	1,764	0,5487	0,4046	3,146	1,272	1,312	0,3786
0,8	0,4582	0,467	2,073	0,7166	0,5332	3,994	1,985	1,470	0,4826
1,0	0,4276	0,556	2,352	0,8793	0,6594	5,008	2,880	1,599	0,5779
1,2	0,4033	0,639	2,611	1,037	0,7835	6,237	4,001	1,708	0,6639
1,4	0,3823	0,717	2,854	1,192	0,9057	7,728	5,393	1,801	0,7414
1,6	0,3646	0,793	3,084	1,343	1,026	9,541	7,113	1,881	0,8112
1,8	0,3490	0,863	3,304	1,491	1,145	11,75	9,237	1,951	0,8741
2,0	0,3363	0,931	3,515	1,636	1,263	14,44	11,85	2,013	0,9308
2,2	0,3247	0,999	3,719	1,779	1,379	17,72	15,05	2,068	0,9818
2,4	0,3139	1,062	3,916	1,919	1,494	21,74	18,98	2,117	1,028
2,6	0,3047	1,124	4,107	2,057	1,607	26,62	23,80	2,160	1,069
2,8	0,2957	1,184	4,293	2,194	1,720	32,59	29,71	2,199	1,107
3,0	0,2874	1,241	4,475	2,328	1,832	39,89	36,93	2,234	1,140
3,5	0,2697	1,381	4,908	2,657	2,106	66,27	62,86	2,304	1,211
4,0	0,2554	1,512	5,327	2,977	2,376	108,9	105,7	2,361	1,266
4,5	0,2434	1,636	5,728	3,288	2,640	179,8	176,4	2,402	1,308
5,0	0,2325	1,755	6,110	3,593	2,900	296,6	293,1	2,437	1,342
6,0	0,2150	1,979	6,842	4,183	3,409	806,5	802,8	2,488	1,387
7,0	0,2008	2,186	7,535	4,753	3,903	2194	2188	2,511	1,415
8,0	0,1897	2,382	8,196	5,304	4,386	5962	5956	2,528	1,432
9,0	0,1791	2,565	8,832	5,841	4,859	16210	16200	2,538	1,442
10,0	0,1718	2,741	9,446	6,364	5,322	44050	44080	2,544	1,448

§ 6. *Zahlenwerte.* Die Zahlen der Tabellen 1 und 2 sind mittels der Funktionentafeln von Jahnke und Emde für

Tabelle 2.

z	$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}$	$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r(z)}}$	$e^{z/2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r(z)}}$	$e^{z/2}\left\{\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{p}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r}}\right\}$
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,4657	0,4281	0,4389	0,9166
0,10	0,6692	0,5940	0,6244	1,328
0,15	0,8298	0,7168	0,7727	1,667
0,20	0,9672	0,8168	0,9026	1,972
0,25	1,090	0,9030	1,023	2,258
0,30	1,204	0,9784	1,137	2,535
0,35	1,309	1,047	1,247	2,807
0,40	1,409	1,108	1,353	3,074
0,45	1,503	1,165	1,459	3,341
0,50	1,594	1,217	1,563	3,609
0,55	1,680	1,266	1,667	3,879
0,60	1,764	1,312	1,771	4,152
0,65	1,844	1,355	1,875	4,427
0,70	1,923	1,395	1,981	4,710
0,75	1,998	1,434	2,086	4,998
0,80	2,073	1,470	2,193	5,285
0,85	2,148	1,505	2,302	5,588
0,90	2,216	1,538	2,412	5,887
0,95	2,284	1,570	2,524	6,198
1,00	2,352	1,599	2,637	6,516
1,05	2,419	1,629	2,753	6,842
1,10	2,484	1,656	2,871	7,177
1,15	2,548	1,683	2,990	7,518
1,20	2,611	1,708	3,112	7,869
1,25	2,673	1,733	3,238	8,233
1,30	2,734	1,756	3,368	8,601
1,35	2,794	1,779	3,494	8,983
1,40	2,854	1,801	3,626	9,372
1,45	2,913	1,822	3,762	9,777
1,50	2,971	1,842	3,899	10,19
1,55	3,028	1,862	4,042	10,61
1,60	3,084	1,881	4,186	11,05
1,65	3,140	1,900	4,336	11,50
1,70	3,195	1,917	4,485	11,96
1,75	3,250	1,935	4,642	12,44
1,80	3,304	1,951	4,798	12,92
1,85	3,357	1,968	4,965	13,43
1,90	3,411	1,983	5,129	13,95
1,95	3,463	1,999	5,301	14,48
2,00	3,515	2,013	5,471	15,02

Tabelle 2 (Fortsetzung).

x	$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$	$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{r(x)}}$	$e^{x/2}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{r(x)}}$	x	$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$	$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{r(x)}}$	$e^{x/2}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{r(x)}}$
2,1	3,618	2,042	5,834	4,4	5,647	2,396	21,63
2,2	3,719	2,068	6,213	4,5	5,728	2,402	22,79
2,3	3,818	2,093	6,609	4,6	5,804	2,412	24,06
2,4	3,916	2,117	7,029	4,7	5,878	2,417	25,33
2,5	4,009	2,130	7,435	4,8	5,958	2,425	26,73
2,6	4,107	2,160	7,927	4,9	6,032	2,430	28,16
2,7	4,198	2,180	8,410	5,0	6,110	2,437	29,68
2,8	4,293	2,199	8,917	5,2	6,260	2,449	32,98
2,9	4,381	2,215	9,443	5,4	6,408	2,459	36,59
3,0	4,475	2,234	10,01	5,6	6,554	2,468	40,58
3,1	4,561	2,248	10,59	5,8	6,699	2,476	45,01
3,2	4,653	2,265	11,22	6,0	6,842	2,483	49,90
3,3	4,737	2,277	11,86	6,2	6,983	2,490	
3,4	4,826	2,293	12,55	6,4	7,123	2,496	
3,5	4,908	2,304	13,25	6,6	7,262	2,502	
3,6	4,996	2,318	14,03	6,8	7,399	2,506	
3,7	5,077	2,328	14,80	7,0	7,535	2,511	
3,8	5,163	2,341	15,65	7,5	7,869	2,520	
3,9	5,243	2,349	16,51	8,0	8,196	2,528	
4,0	5,327	2,361	17,45	8,5	8,517	2,533	
4,1	5,405	2,369	18,40	9,0	8,832	2,538	
4,2	5,489	2,380	19,44	9,5	9,142	2,541	
4,3	5,565	2,387	20,48	10,0	9,446	2,544	
				10,5	9,746	2,546	
				11,0	10,04	2,547	
				11,5	10,33	2,549	

das Gausssche Fehlerintegral Θ und mittels der Grunerschen Tafeln für e^{-x} (Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik Bd. 3) ermittelt worden. Für große Werte von x hat die semikonvergente Reihe für $e^x\,[1-\Theta(\sqrt{x})]$ gute Dienste geleistet.

Tab. 1 ist wesentlich dichter (bei kleinen Argumenten von 0,05 zu 0,05) berechnet worden, was schon wegen der Integration nach der Simpsonschen Regel nötig war, doch haben wir, um Raum zu sparen, darauf verzichtet, alle errechneten Werte mitzuteilen. Dagegen glaubten wir, dies in Tab. 2 tun zu sollen, weil diese Tabelle es ermöglicht, alle auf die Charakteristik bezüglichen Rechnungen leicht durchzuführen.

La Plata, 4. Juni 1922, Instituto de Física.

(Eingegangen 8. Juli 1922.)

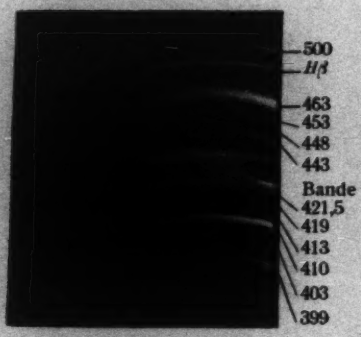
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Sauerstofflinien
Entl. Spannung 10000 Volt

Mit Ohne
Spannung 500 Volt

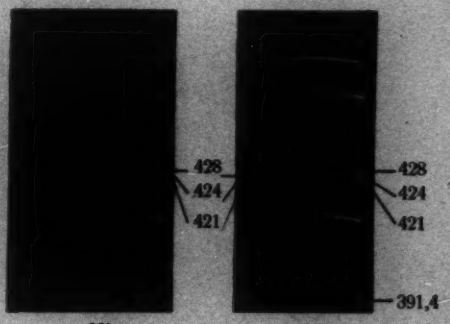
Entl. Spannung 4500 Volt
Wasserstoff

Ohne Mit
Abl. Spannung 1000 Volt

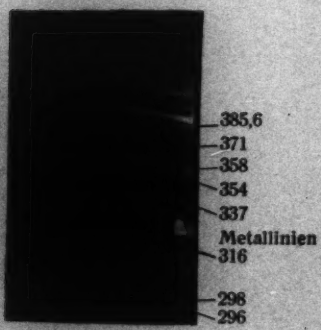


Stickstoff
Entl. Spannung 10000 Volt
Linien mit abl. Spannung 500 Volt

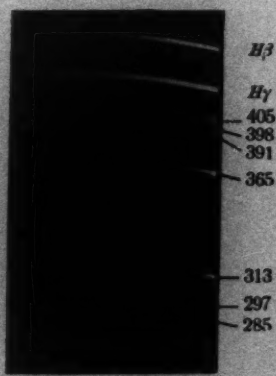
Stickstoff
Negative Banden



Mit Ohne
Abl. Spannung 500 Volt
Entl. Spannung 1000 Volt



Entl. Spannung 10000 Volt



Entl. Spannung 10000 Volt
Abl. Spannung 500 Volt

W. Wien.

Registrierendes
Elektro-Photometer
nach Hartmann oder Koch-Goos
baut nur die gebrauchte
FIRMA F. KÖNKEL, KÖLN a. Rh.

1922. № 22.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 69.

1. *Statistische Anisotropie in kristallinen Medien und ihre röntgenographische Bestimmung;* von K. Weissenberg.

Historische Einleitung.

Die Entdeckung der Röntgeninterferenzen an Kristallen durch M. v. Laue hat es ermöglicht, ihre diskontinuierliche Struktur als Raumgitter experimentell sicherzustellen und aus diesem Befund die Anisotropie der Kristalle herzuleiten. Außer Kristallen zeigen noch eine Reihe anderer Körper eine deutliche Anisotropie hinsichtlich ihres chem.-phys. Verhaltens Quellung, Elastizitäten), z. B. alle natürlichen Fasern (Zellulose, Seide, Muskel-, Sehnen-, Nervenfasern und Haare), desgleichen auch alle plastisch deformierten Metalle, wie hartgezogene oder gedehnte Drähte, gewalzte Folien usw., wahrscheinlich auch Gußstücke aller Art, sowie elektrolytische Niederschläge usw. *Die Anisotropie dieser Körper läßt sich als ein statistisches Effekt deuten, indem die Mikrokriställchen nicht wie in isotropen Medien regellos durcheinander liegen, sondern in bestimmter Weise statistisch geordnet sind.*

Die Möglichkeiten solcher statistischer Anisotropien lassen sich geometrisch einschränken und führen zu einem endlichen Schema von Anisotropieklassen, in welches alle statistischen Anordnungsmöglichkeiten eingereiht werden können.

Die Diskussion der Röntgendiagramme, welche ihnen entsprechen, führt zu einfachen Beziehungen zwischen Diagramm und Anisotropieklasse, so daß hierauf ein allgemeines Verfahren zur Aufsuchung der Anisotropieklasse aus Röntgendiagrammen gegründet werden kann. Hiermit ist dann der Rahmen gegeben, in dem sich alle Beugungseffekte eines anisotropen Körpers einordnen lassen. Als Grenzfälle erscheinen einerseits der Beugungseffekt des Einzelkristalls (Laue-Diagramm), anderer-

seits der Effekt eines ungeordneten Kristallpulvers (Debye-Scherrer). Es liegen nun eine Reihe Röntgendiagramme verschiedener Forscher vor, die offenbar keinem dieser Grenzfälle angehören und zum Teil auch schon als Anordnungseffekte gedeutet worden sind.

Experimentelle Untersuchungen wurden zunächst an plastisch deformiertem Klebwachs[1]), dann an gewalzten und angelassenen Metallfolien, elektrolytischen Niederschlägen und verschieden bearbeiteten Werkstücken durchgeführt.[2]) Die Diagramme zeigten deutlich die Anisotropie des Materials, indem vom Durchstoßpunkt aus in symmetrischen Anordnungen radiale Streifen auftraten und die Debye-Scherrer-Kreise in einzelne Kreisbogenstücke aufgelöst waren. Eine qualitative Erklärung einzelner Bilder als Beugungseffekte von Kristallitordnungen wurde von verschiedenen der genannten Autoren angedeutet. Neue Gesichtspunkte wurden in dieses Erscheinungsgebiet durch das systematische Studium der Anisotropie natürlich gewachsener Fasern (Cellulose-, Seidefasern) gebracht[3]); diese Präparate zeigten bei Durchleuchtung mit monochromatischem Licht senkrecht zur Längsachse der Fasern eine Auf-

1) W. Friedrich, Phys. Zeitschr. 14. S. 317. 1913.

2) E. Hupka, Phys. Zeitschr. 14. S. 628. 1913; vgl. auch Nature 91. S. 267. 1013. (Durchleuchtung von Metallfolien in gewalztem und angelassenem Zustand); H. B. Keene, Phys. Zeitschr. 14. S. 908. 1913; vgl. auch Nature 91. S. 607. 1913; und Phil. Mag. S. 712. Oktober 1913. (Durchleuchtung von Metallfolien und Erklärung der Röntgendiagramme); H. S. Allen, Nature 91. S: 268. 1913; P. Knipping, Phys. Zeitschr. 14. S. 996. 1913. (Erläuterung der Röntgendiagramme); G. G. Blake u. Owen, Nature 92. S. 686. 1914. (Durchleuchtung elektrolyt. abgeschiedener und verschieden bearbeiteter Metallfolien, sowie gegossener Metallstücke); Nishikawa u. Asahara, Phys. Rev. 15. S. 38. 1921, vgl. auch Nishikawa and S. Ono, Proc. Tokiomath. Phys. Soc. Ser. 2. 7. S. 131. 1913. (Studium des Walzens und Anlassens an Röntgendiagrammen); F. Heinrich, Stahl und Eisen 14. S. 1. 1922. (Röntgendiagramme von Metallknüppeln und Blöcken.) R. Glocker, Stahl und Eisen 14. S. 3. 1922. (Röntgendiagramme von Metallknüppeln und Blöcken.)

3) Herzog, Jancke, Polanyi, Zeitschr. f. Phys. 3. S. 343. 1920; vgl. auch Herzog u. Jancke, Zeitschr. f. Phys. 3. S. 196. 1920 und Ber. d. chem. Ges. 53. S. 2162. 1921. (Röntgendiagramme von Zellulosefaser und ihre Deutung.) P. Scherrer, M. Zsigmondy Kolloidchemie 3. Aufl. S. 408. 1920.

lösung der Debye-Scherrer Kreise in Punkte bzw. Kreisbogenstreifen, welche in doppelt symmetrischer Anordnung den Durchstoßpunkt als Mittelpunkt umgeben (vgl. Fig. 2); es konnte gezeigt werden, daß diese Bilder als Beugungseffekt einer bestimmten axialen Anordnung der Kristallite in den Fasern („Faserstruktur") aufzufassen sind[1]); durch Einführung eines Substitutionsverfahrens wurde die räumlich quantitative Deutung solcher Diagramme durchgeführt[2]) und gleichzeitig ein Weg geöffnet, um allgemein den Zusammenhang zwischen Kristallitordnung und Röntgendiagramm abzuleiten. Diese Untersuchungen wurden theoretisch[3]) und experimentell weiter ausgebaut, Muskel-, Sehnen-, Nervenfasern und Haare durchleuchtet[4]) und die in ihnen bestehende Kristallitanordnung aufgeklärt[5]); auch wurde gezeigt, daß die plastischen Deformationen des Pressens von Kristallpulvern und des Hartziehens angelassener Metalldrähte sowie das Einbringen von Kristallitkörnern in ein magnetisches Feld zu einer axialen Anordnung der Kristallite im Aggregat führt[6]); für hartgezogene Metalldrähte wurde diese Struktur quantitativ bestimmt.[7]) In Verfolgung dieser quantitativen Richtung wird nachfolgend eine systematische Ableitung sämtlicher auf Kristallitanordnungen gegründeter statistischer Anisotropien gegeben und ihre Beziehungen zum Röntgendiagramm mit Hilfe des zitierten Substitutionsverfahren ermittelt.

Blickt man zunächst auf obiges Material zurück, so sieht man bereits zwei ausgedehnte Gebiete für die Anwendung der Röntgenanalyse statistischer Anisotropien. Das eine die Untersuchung gewachsener Stoffe der organisierten Natur ins-

---

1) M. Polanyi, Die Naturwissenschaften 9. S. 288. 1921.

2) M. Polanyi, Zeitschr. f. Phys. 7. S. 149. 1921.

3) M. Polanyi u. K. Weissenberg, Ztschr. f. Phys. 9. S. 123. 1922 u. Ztschr. f. Phys. 10. S. 44. 1922.

4) Herzog u. Jancke, Festschrift der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft S. 118. 1921.

5) K. Weissenberg, Ztschr. f. Phys. 8. S. 20. 1921.

6) Becker, Herzog, Jancke, Polanyi, Ztschr. f. Phys. 4. S. 61. 1921; Becker u. Jancke, Ztschr. f. Phys. Chemie 99. S. 242—267. 1922.

7) Ettisch, Polanyi, Weissenberg, Ztschr. f. Phys. 7. S. 181. 1921; Ztschr. phys. Chem. 99. S. 332. 1921; vgl. die zusammenfassende Darstellung von M. Polanyi, Die Naturwissenschaften 10. S. 411. 1922; H. C. Burger, Physica 1. S. 214. 1921.

besondere der Fasern, das andere die Lehre der plastischen Deformation und die darauf gegründeten technischen Prozesse. Es muß angenommen werden, daß eine quantitative Analyse der plastisch erzeugten Kristallitordnung zur Kennzeichnung des Deformationsvorganges führen wird. Die Bearbeitung eines Werkstückes wird dabei ein technisch wichtiges Beispiel abgeben. — Sowohl bei jenen Körpern, die im natürlichen Zustand besondere Kristallanordnung aufweisen, wie bei jenen, denen solche durch Deformation aufgeprägt werden, ist diese Anordnung von entscheidendem Einfluß auf die physikalisch-chemischen Eigenschaften, insbesondere die Quellbarkeit, Dehnbarkeit und Elastizität. Die Verfestigung von Werkstücken durch mechanische Bearbeitung scheit sein Vorbild in den Grundlagen der natürlichen Festigkeit faserförmiger Körper zu haben. Somit ist auch zum Studium der Quellung, Dehnung, Elastizität die Klassifikation und Bestimmung der Kristallitordnung von Wichtigkeit.

Bei dieser Klassifikation ist zunächst zu berücksichtigen, daß die meisten physikalisch chemischen Untersuchungen, insbesondere auch die Röntgenographie, die Anisotropie des Materials nur unter Hinzufügung eines Symmetriezentrums (Z) zur Darstellung bringen, so daß anisotrope Körper mit Z nur in seltenen Fällen sich phys.-chemisch von solchen ohne Z unterscheiden; berücksichtigt man ferner, daß das Aggregat in allen Fällen ein Symmetriezentrum haben muß, in denen die Gitter des Einzelkristallits ein solches vorhanden ist, so kommt man zu dem Schluß, daß die Kristallitordnungen in statistisch anisotropen Körpern in den weitaus meisten Fällen, insbesondere bei allen Metallen, ein Symmetriezentrum besitzen werden, andererseits wird auch für den Fall, daß ein solches fehlt, sowohl in Röntgendiagrammen als auch in den meisten phys.-chemischen Eigenschaften dieser Körper Z auftreten.

Nachfolgend werden daher zunächst nur die Anisotropieklassen mit Z abgeleitet, doch können auch die übrigen nach den hier angegebenen Methoden ohne Schwierigkeit bestimmt werden; sodann werden die Beziehungen zwischen Röntgenogramm und statistischer Anisotropie angegeben, auf welchen sich ein experimenteller Weg zur räumlich quantitativen Bestimmung der Kristallitordnung in diesen Körpern gründet;

schließlich wird unter Verwendung obiger Überlegungen die Anisotropieklasse gewalzter Metallfolien röntgenographisch bestimmt und für eine gewalzte Cu-Folie eine Kristallitgruppe räumlich quantitativ festgelegt.

I. Teil.

Ableitung der Anisotropieklassen und der zugehörigen Kristallitordnungen.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, einen Überblick über alle möglichen Anisotropieklassen zu gewinnen; zu diesem Zwecke bedienen wir uns des zitierten Substitutionsverfahrens, nach welchem jede kristallographische Richtung $\mathfrak{B}$ durch ein Punktpaar $\bar{V}\underline{V}$ einer Lagenkugel ersetzt wird, den ein zu $\mathfrak{B}$ paralleler Durchmesser aus der Kugel ausstößt. Will man nun die Kristallitordnung in der Umgebung eines Punktes im Aggregat studieren, so hat man die kristallographischen Richtungen der Mikrokriställchen in dem betrachteten Bereich durch ihre Repräsentationspunkte zu ersetzen; die Dichte ihrer Flächenbelegung auf der Lagenkugel gibt einen statistischen Überblick über die bestehende Kristallitordnung.

Gemäß dieser Statistik gilt ein *Kristallitaggregat* in der Umgebung eines Punktes als *statistisch ungeordnet* und *folglich isotrop, wenn jede kristallographische Richtung sich gleichmäßig auf alle Raumrichtungen verteilt,* die Lagenkugel somit gleichmäßig mit Repräsentationspunkten belegt ist.

Damit also in diesem statistischen Sinne eine *Anisotropie* vorliegt, ist es notwendig und hinreichend, daß *mindestens eine kristallographische Richtung* durch eine *ungleichmäßige Dichteverteilung* ihrer Repräsentationspunkte charakterisiert ist, somit eine bestimmte Kristallitordnung besteht.

Es kann nun sein, daß die Dichteverteilung der Repräsentationspunkte *aller* kristallographischen Richtungen außer Z noch andere Symmetrien zeigt, dann wollen wir diese als für die bestehende Anisotropie charakteristisch ansehen und wir gewinnen einen Überblick über sämtliche Anisotropieklassen, indem wir alle möglichen Kombinationen von statistischen Symmetrieelementen mit Z aufsuchen. Dabei gehen wir so vor, daß wir zunächst alle Symmetrieelemente in einer Tabelle zusammenstellen, sodann das Problem aller möglichen Kombinationen der-

selben auf das Aufsuchen aller Kombinationen von Drehungsachsen zurückführen und so in einfacher Weise zu einer Systematik aller Anisotropieklassen und der zugehörigen Kristallitordnungen gelangen.

A. Symmetrieelemente.

Unter allen Koordinatentransformationen, die ein System von starr miteinander verbundenen Richtungen, z. B. die kristallographischen Richtungen in einem Kristall, in ein anderes überführen, spielen die linearen Transformationen eine ausgezeichnete Rolle weil diese und nur diese Ebenen und gerade Linien wieder in Ebenen und gerade Linien transformieren (also die Netzebenen und kristallographischen Richtungen eines Kristalles in solche eines *unverbogenen* andern überführen können); bleibt der Koordinatenanfangspunkt dabei ungeändert, so führt ihre geometrische Deutung in bekannter Weise zu den Drehungen, Spiegelungen und ihrer Kombination der Drehspiegelung (die digonale Drehspiegelachse wird gewöhnlich als eigenes Symmetrieelement Z Symmetriezentrum eingeführt, doch ist dies lediglich von formalem Interesse). Wir haben demnach als Symmetrieelemente der Anisotropie die nachfolgenden zu berücksichtigen.

Tabelle I.

Name	Symbol	Transformation
Symmetriezentrum	$\mathfrak{Z}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
ν-zählige Drehungsachse	$\mathfrak{A}^{(\nu)}$	$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu} & \sin\frac{2\varkappa\pi}{\nu} & 0 \\ -\sin\frac{2\varkappa\pi}{\nu} & \cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\varkappa=1,2,3\ldots\infty}$
Spiegelebene	$\mathfrak{S}.\mathfrak{E}.$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Drehspiegelebene Drehspiegelachse	$\mathfrak{Dfp}.\mathfrak{E}^{(\nu)}$ $\mathfrak{Dfp}.\mathfrak{A}^{(\nu)}$	$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu} & \sin\frac{2\varkappa\pi}{\nu} & 0 \\ -\sin\frac{2\varkappa\pi}{\nu} & \cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\varkappa} \end{pmatrix}_{\varkappa=1,2,3\ldots\infty}$

In der Tabelle I sind in der ersten Spalte die Namen der Symmetrieelemente und in der zweiten Spalte die vorgeschlagenen Symbole zusammengestellt, es sind für dieselben gothische Buchstaben gewählt, um sie von den gleichlautenden Symmetrieelementen im Raumgitter zu unterscheiden. Die in der dritten Spalte angegebenen Transformationen geben den analytischen Ausdruck für die Wirkung der Symmetrieelemente auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Der Einfachheit halber wird die Z-Achse des Ausgangs Koordinatensystem $\parallel$ zur Symmetrieachse und $\perp$ zur Symmetrieebene gewählt. Das für die Transformation eingeführte Symbol ist so zu verstehen, daß in der ersten Reihe die Richtungskosinusse der X-Achse, in der zweiten die der Y- und in der dritten die der Z-Achse in bezug auf das Ausgangskoordinatensystem $X\,Y\,Z$ stehen.

Die zu dem Symbol $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ gehörige Koordinatentransformation lautet daher:

$$\begin{aligned} \xi' &= a_{11}\,\xi + a_{12}\,\eta + a_{13}\,\zeta, \\ \eta' &= a_{21}\,\xi + a_{22}\,\eta + a_{23}\,\zeta, \\ \zeta' &= a_{31}\,\xi + a_{32}\,\eta + a_{33}\,\zeta, \end{aligned}$$

wobei $(\xi\,\eta\,\zeta)$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Repräsentationspunktes auf der Lagenkugel bezeichnet und $(\xi'\,\eta'\,\zeta')$ die aus ihm durch die Transformation abgeleiteten.

Nach dem nunmehr alle Symmetrieelemente bestimmt sind, haben wir ihre möglichen Kombinationen aufzusuchen.

B. Reduktion der Kombinationsmöglichkeiten.

Eine Vereinfachung des Problems kommt dadurch zustande, daß wir nur Kombinationen dieser Symmetrieelemente mit $\mathfrak{Z}$ betrachten und man leicht zeigen kann, daß $\mathfrak{S}.\mathfrak{E}.(+)\mathfrak{Z}$ sowohl als auch $\mathfrak{Dfp}.\mathfrak{E}^{(\nu)}$ oder $\mathfrak{Dfp}.\mathfrak{A}^{(\nu)}(+)\mathfrak{Z}$ mit Kombination von $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ und $\mathfrak{Z}$ identisch sind. (Das Zeichen $(+)$ bedeutet Kombination mit . . . .)

Insbesondere ergibt sich

(1) $$\mathfrak{S}.\mathfrak{E}.(+)\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(+)\mathfrak{A}^{(2)} \perp \text{zu } \mathfrak{S}.\mathfrak{E}.$$

und

(2) $$\mathfrak{Dfp}.\mathfrak{A}^{(\nu)}(+)\mathfrak{Z} = \mathfrak{Dfp}.\mathfrak{E}^{(\nu)}(+)\mathfrak{Z} = \begin{cases} \text{a)} & \mathfrak{Z}(+)\mathfrak{A}^{(\nu)} \quad \text{für } \nu = 4m \\ \text{b)} & \mathfrak{Z}(+)\mathfrak{A}^{\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad \text{für } \nu = 4m+2 \\ \text{c)} & \mathfrak{Z}(+)\mathfrak{A}^{(2\nu)} \quad \text{für } \nu = 4m \pm 1 \end{cases}$$

Satz (1) ist aus der Kristallographie bekannt, desgleichen von Satz (2) die Spezialfälle[1]) $\nu = 2, 3, 4, 6$; der Beweis für beliebiges ν läßt sich leicht durch die nachfolgenden Überlegungen oder mit Hilfe der in Tab. I angegebenen Koordinatentransformationen führen.

Im Falle (2a) $\nu = 4m$ ist die Drehspiegelachse stets auch $\frac{\nu}{2} = 2m$ zählige — also sicher auch digonale — Drehachse; diese erzeugt in Verbindung mit $\mathfrak{Z}$ nach (1) eine S. E. senkrecht zur Achse, welche die $\nu = 4m$ zählige Drehspiegelachse in eine gleichzählige Drehachse überführt.

Im Falle (2b) $\nu = 4m + 2 = 2(2m + 1)$ ist die Drehspiegelachse $\frac{\nu}{2} = 2m + 1$ zählige Drehachse und gleichzeitig digonale Drehspiegelachse (d. h. sie besitzt immer ein Symmetriezentrum und eine Hinzufügung desselben hat keine Bedeutung), schließlich ist für (2c) $\nu = 4m \pm 1$ stets eine Drehung um $2 \cdot 2\pi = 4\pi$ nötig, um mit Hilfe der ungeradezähligen Drehspiegelachse eine Richtung in sich selbst überzuführen; dabei werden bei der zweiten Drehung um 2π die zur ersten spiegelbildlichen Lagen erzeugt, so daß eine Spiegelebene $\perp$ zur Achse zur Ausbildung gelangt; diese bewirkt, daß aus der $\mathfrak{Dfp}.\mathfrak{A}^{(\nu)}$ eine $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ wird, mit der sich eine digonale Achse kombiniert, welche nach (1) durch die S. E. $(+)\mathfrak{Z}$ bedingt ist; insgesamt ist also die $\mathfrak{Dfp}.\mathfrak{A}^{(\nu)}(+)\mathfrak{Z}$ mit einer $\mathfrak{A}^{(2\nu)}(+)\mathfrak{Z}$ identisch.

Gemäß (1) und (2) können wir uns also darauf beschränken alle Kombinationen von $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ abzuleiten.

C. Kombinationen von Drehachsen.

Die Achsendrehungen, welche eine Anisotropieklasse zuläßt, bilden notwendigerweise eine Gruppe, d. h. jede aus zwei zulässigen Drehungen zusammengesetzte Drehung ist auch zulässig; somit haben wir nur solche Drehachsenkombinationen zu berücksichtigen, welche Drehungsgruppen bilden. Dabei ergeben sich nur die in Tab. II zusammengestellten Möglichkeiten.

---

1) P. Niggli, Geometrische Kristallographie des Diskontinuums, Verlag Borntträger, Leipzig 1919, S. 86.

Tabelle II.

Bezeichnung	Achsen	Anzahl der Drehungen
1. Pyramidendrehung . . .	$\mathfrak{A}^{(\nu)}$	ν
2. Doppelpyramidendrehung mit ungerader Basis $\nu = 2m + 1$ . .	$\mathfrak{A}^{(\nu)}(+)\,\nu\,\mathfrak{A}^{(2)}$	2ν
3. Tetraederdrehung . . .	$4\mathfrak{A}^{(3)}(+)\,3\mathfrak{A}^{(2)}$	12
4. Doppelpyramidendrehung mit gerader Basis $\nu = 2m$	$1\mathfrak{A}^{(\nu)}(+)\,\frac{\nu}{2}\,\mathfrak{A}^{(2)}(+)\,\frac{\nu}{2}\,\mathfrak{A}^{(2)}$	2ν
5. Oktaeder oder Würfeldrehung	$3\mathfrak{A}^{(4)}(+)\,4\mathfrak{A}^{(3)}(+)\,6\mathfrak{A}^{(2)}$	24
6. Ikosaeder oder Dodekaederdrehung	$6\mathfrak{A}^{(5)}(+)\,10\mathfrak{A}^{(3)}(+)\,15\mathfrak{A}^{(2)}$	60
7. Doppelkegeldrehung . .	$1\mathfrak{A}^{\infty}(+)\,\infty\,\mathfrak{A}^{(2)}$	∞
8. Kugeldrehung $\nu = 1, 2, \ldots \infty$	$\infty\,\mathfrak{A}^{(\nu)}$	∞

In Tab. II deuten die in der ersten Spalte angegebenen Polyedernamen eine Realisationsmöglichkeit der Anisotropieklasse an, indem die Polyeder nur die Drehungen zulassen, welche die Anisotropieklasse charakterisieren; in der zweiten Spalte sind die Achsen zusammengestellt, so zwar, daß über identische Achsen summiert ist, nicht identische Achsen aber auch bei Gleichzähligkeit getrennt angeführt sind. Der Nachweis dafür, daß außer den in Tab. II aufgezählten Drehungsgruppen keine weiteren möglich sind, ist für endliche Drehungsgruppen bereits bekannt[1]); für unendliche Drehungsgruppen kann er folgendermaßen geführt werden:

Wir ersetzen zunächst die Achsenschar durch ihre Repräsentationspunkte auf der Lagenkugel und erhalten so auf der Kugeloberfläche unendlich viele Punkte, welche nach einem Satz von Bolzano-Weierstrass[2]) mindestens einen Häufungspunkt haben müssen, in dessen Umgebung sich die Achsen beliebig nahe kommen, so daß für jeden beliebig klein vorgegebenen Winkel ε stets 2 Achsen gefunden werden können, deren Winkel zueinander $\Delta\varphi < \varepsilon$ ist. — Wir greifen nun

1) Weber Wellstein, Enzykl. der El. Math. II. 3. Aufl. 1915. S. 578 ff.
2) Knopp, Funktionentheorie I. S. 15.

2 Achsen dieser Schar heraus, deren sphärischer Abstand $\Delta\varphi < \varepsilon$ ist und lassen sie aufeinander wirken; wenn nun die Zähligkeit einer der Achsen größer als 2 ist, so entsteht aus den beiden stets eine dritte, welche mit den beiden ersten nicht in einer Ebene liegt und deren Abstand von jeder $< 2\Delta\varphi$ ist. Diese 3 Achsen durchstoßen die Lagenkugel in den Ecken eines spärischen Dreiecks, dessen Seiten $< 2\Delta\varphi$ sind. Gemäß dem Gruppencharakter der Drehungen muß dann aber die ganze Lagenkugel von solchen kleinen sphärischen Dreiecken überdeckt sein. Daraus folgt aber, daß in der Nähe höchstens im Abstand $\Delta\varphi$ von jeder Raumrichtung entfernt eine Achse der Schar liegen muß. Lassen wir nun ε dem Grenzwert 0 zustreben, greifen also immer näher liegende Achsen als Ausgangssymmetrieelemente heraus, so wird in beliebiger Nähe jeder Raumrichtung eine Achse der Schar liegen.

Jede kristallographische Richtung, welche dieser Symmetrieachsenschar entsprechende Lagen einnimmt, muß sich statistisch gleichförmig auf alle Raumrichtungen verteilen; somit resultiert aus einer solchen Achsenschar für jedes $\nu > 2$ eine statistische Isotropie, d. h. die Anisotropieklasse 8 der Tab. II. Die Drehungsgruppe enthält alle möglichen Kugeldrehungen.

Für $\nu = 2$ folgt: die beiden willkürlich herausgegriffenen digonalen Achsen mit einem sphärischen Abstand $\Delta\varphi < \varepsilon$ erzeugen gemäß dem Gruppencharakter eine Schar digonaler Achsen, die mit den ursprünglich herausgegriffenen in einer Ebene liegen; geht man zum Grenzwert $\varepsilon = 0$ über, so wird $\parallel$ zu jeder Richtung in dieser Ebene eine digonale Achse liegen.

Berücksichtigt man nun das Symmetriezentrum der Anisotropie, so entsteht aus jeder digonalen Achse eine dazu senkrechte S. E.; da nun die digonalen Achsen in einer Ebene liegen, so müssen die S. E. alle durch das Lot dieser Ebene gehen und für den Grenzfall $\varepsilon = 0$ in ihrer Schnittgerade eine ∞ zählige Achse $\mathfrak{A}^\infty$ erzeugen.

Nun sind 2 Fälle möglich, entweder die Ebene $\perp$ zur ∞ zähligen Drehachse enthält *alle* digonalen Achsen, dann läßt diese Anisotropieklasse alle und nur Doppelkegeldrehungen zu, es liegt also die Klasse 7 der Tab. II vor; oder es gibt noch eine digonale Achse außerhalb dieser Ebene, dann gibt

es zufolge der ∞ zähligen Achse unendlich viele digonale Achsen auf einem Kegelmantel. Von denen können wir 3 benachbarte herausgreifen; diese können nicht in einer Ebene liegen, müssen also aus der Kugeloberfläche ein beliebig kleines sphärisches Dreieck herausstechen; hieraus ergibt sich aber identisch wie oben die Anisotropieklasse 8, d. h. statistische Isotropie.

Nachdem auf diese Weise alle möglichen Drehachsenkombinationen abgeleitet sind, können wir in nachfolgender Tabelle einen systematischen Überblick über die Anisotropieklassen geben.

D. Systematik der Anisotropie.

Im vorangegangenen wurde die Anisotropie in der Umgebung eines Punktes studiert, d. h. der Koordinatenanfangspunkt bei allen Transformationen festgehalten. Will man nun über die Anisotropie des ganzen kristallinen Aggregates Aufschluß erhalten, so muß man noch feststellen, wie sich diese zu der an einem Punkte bestimmten verhält.

Der einfachste Fall ist bei einer homogenen Phase verwirklicht; in ihr ist in parallelen Richtungen das chemisch-physikalische Verhalten des Aggregates identisch und folglich besteht die an einem beliebigen Punkt bestimmte Anisotropie im ganzen Aggregat. Als Beispiele einer homogenen Phase in einem kristallinen Aggregat können wir die natürlich gewachsenen Fasern sowohl als auch hartgezogene oder gedehnte Metalldrähte und gewalzten Metallfolien ansehen, wenn wir von einer verhältnismäßig dünnen Grenzschicht derselben absehen.

Bei heterogenen Phasen wird es im allgemeinen notwendig sein, in allen Punkten des Aggregates die jeweilige Anisotropie zu bestimmen, doch können auch hier Vereinfachungen eintreten, wenn sich nämlich die Anisotropie im Aggregat gesetzmäßig ändert, wie dies z. B. bei Kristalldrusen und ähnlichen Gebilden der Fall ist. Zu ihrer Charakterisierung wird man außer der Anisotropie an einem Punkte auch noch die Gesetzmäßigkeit ihrer räumlichen Änderung angeben müssen. Auch für die im allgemeinen heterogenen Grenzschichten homogener Phasen können derartige Untersuchungen von Interesse sein.

In der nachfolgenden Tab. III sind alle Möglichkeiten statistisch anisotropen Verhaltens in einem Punkte und somit auch in einer homogenen Phase zusammengestellt. In der ersten Spalte sind die vorgeschlagenen Benennungen der Anisotropieklasse, in der zweiten Spalte sind die Symmetrieelemente zusammengestellt; sie enthalten die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Achsenscharen (+) der Symmetrieebenen, welche zufolge des Symmetriezentrums senkrecht zu allen geradzähligen Achsen auftreten; über identische Symmetrieelemente ist, wie in Tab. II, summiert, nichtidentische sind stets getrennt angeführt; in der dritten Spalte sind die möglichen Achsenwinkel angegeben, deren Kenntnis für die experimentelle Bestimmung der Anisotropieklasse von Bedeutung ist.

E. Anisotropieklasse und Kristallitordnung.

Wir fragen nun nach allen Kristallitordnungen, welche die in Tab. III angeführten Anisotropien erzeugen können.

Die einfachste Kristallitordnung einer Anisotropieklasse besteht offenbar aus einer Gruppe von Kristallitlagen, welche aus *einer* Kristallitlage lediglich durch Wirkung der Symmetrieelemente der Anisotropie hervorgehen; die Anzahl solcher Lagen hängt (bei gegebener Anisotropieklasse) davon ab, inwieweit die Eigensymmetrie der Kristallite zum Aufbau der Kristallitordnung ausgenutzt wurde.[1])

Mehrfache Kristallitordnungen dieser Klasse kommen durch Superposition mehrerer solcher Gruppen zustande. Die allgemeinste Kristallitordnung der Anisotropieklasse wird eine unbeschränkte Anzahl von Ausgangslagen enthalten, ihre Kennzeichnung würde unübersichtlich oder auch unmöglich und man wird versuchen, die Ausgangslagen selbst zu einer Gruppe zusammenzufassen. Diese Gruppe von Ausgangslagen kann selbst wieder nur einer der in Tab. III angeführten Klassen angehören und so erhalten wir als Untergruppen jeder Anisotropieklasse alle und nur die in Tab. III angeführten.

Für die Anisotropieklasse 7 (Doppelkegeldrehung) sind praktische Beispiele solcher Kristallitordnungen beschrieben worden und zwar gehören in die Untergruppe 1 dieser Klasse

1) An dem Beispiel der Kristallitordnung in gewalzten Metallfolien wird dies näher erläutert werden.

Tabelle III.

Bezeichnung	Symmetrieelemente	Achsenwinkel
1. Pyramidenklasse . . .	$\mathfrak{Z}(+)\,\mathfrak{A}^{(\nu)}((+)\,\mathfrak{S}\;\mathfrak{E}$ für $\nu = 2m)$ (ν = beliebige ganze Zahl)	—
2. ungeradzählige Doppelpyramidenklasse	$\mathfrak{Z}(+)\,\mathfrak{A}^{(\nu)}(+)\,\nu\cdot(\mathfrak{A}^{(2)}(+)\,\mathfrak{S}\;\mathfrak{E})$ ($\nu = 2m+1$)	$\sphericalangle\,\mathfrak{A}^{(\nu)}\,\mathfrak{A}^{(2)} = 90°$ $\sphericalangle\,\mathfrak{A}^{(2)}\,\mathfrak{A}^{(2)} = 180°;\ \varkappa\cdot\frac{180°}{\nu};\ \left(180° - \varkappa\cdot\frac{180°}{\nu}\right)$
3. Tetraederklasse	$\mathfrak{Z}(+)\,4\,\mathfrak{A}^{(3)}(+)\,3(\mathfrak{A}^{(2)}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E})$	wie im kubisch-tetraedrischen Kristallsystem
4. geradzählige Doppelpyramidenklasse . . .	$\mathfrak{Z}(+)(\mathfrak{A}^{\nu}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E}.)(+)\frac{\nu}{2}(\mathfrak{A}^{(2)}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E}.)(+)\frac{\nu}{2}(\mathfrak{A}^{(2)}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E}.)$ $\nu = 2m$	$\sphericalangle\,\mathfrak{A}^{(\nu)}\,\mathfrak{A}^{(2)} = 90°$ $\sphericalangle$ zwischen gleichwertigen $\mathfrak{A}^{(2)}$ $180°;\ \varkappa\cdot\frac{360°}{\nu};\ 180° - \varkappa\cdot\frac{360°}{\nu}$ $\sphericalangle$ zwischen ungleichwertigen $\mathfrak{A}^{(2)}$ $\varkappa\cdot\frac{180°}{\nu};\ 180° - \varkappa\cdot\frac{180°}{\nu}$
5. Oktaeder- oder Würfelklasse	$\mathfrak{Z}(+)\,3(\mathfrak{A}^{(4)}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E}.)(+)\,4\,\mathfrak{A}^{(3)}(+)\,6(\mathfrak{A}^{(2)}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E})$	wie im kubisch holoedischen Kristallsystem
6. Ikosaeder- od. Dodekaederklasse	$\mathfrak{Z}(+)\,6\,\mathfrak{A}^{(5)}(+)\,10\,\mathfrak{A}^{(3)}(+)\,15(\mathfrak{A}^{(2)}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E}.)$	wie beim Pentagondodekaeder
7. Doppelkegelklasse . .	$\mathfrak{Z}(+)(\mathfrak{A}^{\infty}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E}.)(+)\,\infty\,(\mathfrak{A}^{(2)}(+)\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E}.)$	$\sphericalangle\,\mathfrak{A}^{\infty}\,\mathfrak{A}^{(2)} = 90°$ $\sphericalangle\,\mathfrak{A}^{(2)}\,\mathfrak{A}^{(2)}$ = beliebig
8. Kugelklasse	$\mathfrak{Z}(+)\,\infty\,\mathfrak{A}^{(\infty)}(+)\,\infty\,\mathfrak{S}.\,\mathfrak{E}.$	$\sphericalangle\,\mathfrak{A}^{(\infty)}\,\mathfrak{A}^{(\infty)}$ = beliebig

die „einfache und mehrfache Faserstruktur", welche sich bei natürlich gewachsenen Fasern[1]) und bei hartgezogenen oder gedehnten Metalldrähten[2]) einstellt, in die Untergruppe 7 die „Spiral- und Ringfaser"[3]), welche bei Baumwolle und bei Muskel-, Nerven-, Sehnenfasern und Haaren gefunden wurde.

Es ist noch zu erwähnen, daß die Ausgangslage eines Kristallits in Wirklichkeit eine Streuung aufweist und nur nach einem Wahrscheinlichkeitsgesetz festgelegt ist; die Berücksichtigung dieses Umstandes ist besonders bei der Bestimmung der Kristallitordnung aus Röntgendiagrammen von Bedeutung.

II. Teil.

Räumlich quantitative Bestimmung der Anisotropie eines kristallinen Aggregats aus Röntgendiagrammen.

Nachfolgend soll ein schematischer Weg zur Durchführung der obigen Bestimmung aufgezeigt werden; bei praktischen Untersuchungen wird man wohl entsprechend dem gegebenen Material oft andere Wege einschlagen; doch werden die allgemeinen Richtlinien dieselben bleiben.

Es sind hier zwei Etappen zu unterscheiden und zwar:

A) Die Bestimmung der Anisotropieklasse,

B) Die Bestimmung der Kristallitordnung innerhalb der Klasse.

A. Bestimmung der Anisotropieklasse von Kristallitordnungen aus Röntgendiagrammen.

Die Anisotropieklasse einer Kristallitordnung bestimmt sich aus ihren Symmetrieelementen gemäß Tab. III; man wird daher versuchen, aus den Röntendiagrammen diese Symmetrieelemente festzulegen, was mit Hilfe der nachfolgenden Überlegungen geschehen kann.

Durch die Art der plastischen Deformationen sind bestimmte Richtungen hervorgehoben, in bezug auf welche der angelegte Spannungstensor symmetrisch ist. Es ist zu erwarten, daß parallel zu diesen Richtungen identische oder höherzählige *Symmetrieelemente der Kristallitordnung* liegen. Dies wurde in allen untersuchten Fällen bestätigt, so finden sich z. B. in

1) Herzog, Jancke, Polanyi, Zeitschr. f. Phys. 3. S. 343. 1920.

2) Ettisch, Polanyi, Weissenberg, Zeitschr. f. Phys. 7. S. 181. 1921.

3) K. Weissenberg, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 20. 1921.

hartgezogenen oder gedehnten Drähten, sowie in gewalzten Metallfolien parallel den Symmetrieelementen des Spannungstensors identische Symmetrieelemente der Kristallitordnung; bemerkenswert ist noch, daß im allgemeinen die Eigensymmetrie der Kristallite nicht voll zum Aufbau der Kristallitordnung ausgenutzt wird. Es stellen sich nämlich die Gleitebenen bzw. Gleitrichtungen annähernd parallel zu den ausgezeichneten Richtungen des Spannungstensors und eine Ausnutzung der Eigensymmetrie der Kristallite kommt daher nur insoweit zustande, als die Parallelstellung ideal durchgeführt ist und die Gleitebene bzw. Gleitrichtungen mit Symmetrieelementen des Kristalls zusammenfallen.

Es soll nun zunächst untersucht werden, welche Symmetrieelemente der Kristallitordnung sich im Diagramm zu erkennen geben und wie diese aus dem Bild erschlossen werden können; sodann soll ein experimenteller Weg zur Bestimmung der Anisotropieklasse der Kristallitordnung angegeben werden.

Auffinden der Symmetrieelemente im Diagramm.

Die Symmetrieelemente der Anisotropie bewirken definitionsgemäß, daß alle kristallographischen Richtungen, somit auch insbesondere die reflektierenden Netzebenen und ihre Repäsentationspunkte, die Lagenkugel symmetrisch überdecken. Die Reflexion an diesen Netzebenen ist durch die Gesetze:

1. $n\lambda = 2D \sin \gamma_{(D\lambda)}$,
2. Einfallswinkel = Reflexionswinkel,
3. Strahl, Netzebenennormale und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene

bestimmt; n bezeichnet eine beliebige ganze Zahl, λ die Wellenlänge des Strahls, D den Netzebenenabstand und $\gamma_{(D\lambda)}$ den Gleitwinkel der Netzebenenschar.

Da nun in 1., 2. und 3. nur die Lage der Netzebenen relativ zum Strahl eingeht, so gilt:

a) Das abgebeugte Strahlenbündel zeigt in bezug auf den ungebeugten Strahl dieselbe Achsenzähligkeit wie die Kristallitordnung. Und zufolge 2. gilt auch der Satz
b) Ist in der Kristallitordnung eine Ebene ∥ zum Strahl S. E., so bleibt sie S. E. auch in bezug auf die abgebeugten Strahlen.

Der Beweis kann auch mit Hilfe der Transformationen der Tab. I geführt werden.

Zusammenfassend ergibt sich also: *Die zum eintretenden Strahl parallelen Symmetrieelemente der Anisotropie finden sich identisch im abgebeugten Strahlenbündel wieder.*

Will man nun umgekehrt aus den Röntgendiagrammen auf die Symmetrieelemente der Anisotropie schließen, so wird man im Diagramm die zum Strahl parallelen Symmetrieelemente aufsuchen und aus ihnen mit Sicherheit darauf schließen, daß die Lagen der *reflektierenden* Netzebenen in der Kristallitordnung diese Symmetrieelemente besitzen; eine einfache Wahrscheinlichkeitsüberlegung zeigt aber, daß dann auch mit großer Wahrscheinlichkeit, die bei dieser Wellenlänge und Strahlrichtung nicht reflektierenden Netzebenen, also das ganze Kristallitaggregat, diese Symmetrieelemente hat. In zweifelhaften Fällen kann ja durch Einstrahlung anderer Wellenlängen oder durch Änderung der Strahlrichtung in bezug auf das Aggregat eine beliebig genaue Kontrolle vorgenommen werden. — Zu erwähnen ist noch, daß andere im Diagramm auftretende Symmetrieelemente, welche nicht ∥ zur Strahlachse sind, im allgemeinen keine Bedeutung haben, und daß zweitens die von heterogenem Licht erzeugten „Radialdiagramme“ [1]) leicht eine höherzählige Symmetrieachse vortäuschen, da bei ihnen die Eigensymmetrie des Einzelkristalls mit eingeht und die von verschiedenen Netzebenen herstammenden „Radien“ nicht genügend voneinander unterschieden werden können. Man wird daher aus Radialdiagrammen allein im allgemeinen nur sehr unsichere Schlüsse auf die Symmetrie der Kristallitordnung ziehen können, dagegen werden solche Radialdiagramme wertvolle Ergänzung der monochromatischen Punktdiagramme sein.

Gemäß diesen Überlegungen empfiehlt sich der folgende Weg zur Bestimmung der Anisotropieklasse.

Man durchleuchtet zunächst in Richtung der vermuteten Symmetrieelemente das Aggregat und sucht die zum Strahl ∥ Symmetrieelemente des Bildes auf. Die Kombination der so gefundenen Symmetrieelemente stellt gemäß der Tab. III im allgemeinen nur ganz wenige Anisotropieklassen zur Diskussion;

1) M. Polanyi, Zeitschr. f. Phys. 7. S. 149. 1921.

eine Entscheidung zwischen ihnen kann durch Hinzufügung weniger Aufnahmen getroffen werden, indem man den Strahl parallel zu den Symmetrieelementen einfallen läßt, welche gemäß der Tab. III mit den gefundenen vereinbar sind; indem man dann auf diesen Diagrammen feststellt, welche der möglichen Symmetrieelemente vorhanden sind, entscheidet man zwischen den zur Diskussion stehenden Anisotropien. Ist für das Vorhandensein von Symmetrieelementen von vornherein kein Anhaltspunkt gegeben, so wird man systematisch nach solchen suchen müssen; das kann am einfachsten in der Weise geschehen, daß man das Aggregat nach verschiedenen Richtungen durchleuchtet, eventuell dabei um bestimmte Achsen drehen oder pendeln läßt; ein genaueres Eingehen auf die Methode soll etwaiger Spezialuntersuchungen vorbehalten bleiben; hier sollen nur zur Illustration einige schematische bekannte Röntgendiagramme von diesem Standpunkt aus diskutiert werden.

Es ist noch zu erwähnen, daß auch in den Fällen, in welchen eine Kristallitordnung nicht scharf, sondern nur mit einer bestimmten Streuung auftritt, die Symmetrieelemente der Kristallitordnung und somit auch die Anisotropieklasse exakt bestimmt ist, da auch die Streuung den Symmetrieelementen entsprechend auftritt.

1. Diagramme mit einer Schar konzentrierter Kreise.

Fig. 1 zeigt ein schematisches Bild, wie man es bei Durchleuchtung von ungeordneten Kristallithaufen (Debye-Scherrer-Diagramm) oder von Elektrolytfolien $\perp$ zur Folienebene oder bei Fasern $\parallel$ zur Faserachse gewinnt. Man entnimmt dem Bild die Symmetrieelemente, welche parallel zum Strahl liegen und erhält

a) eine Drehachse (unendlichzählig),

b) Symmetrieebenenschar durch Drehachse.

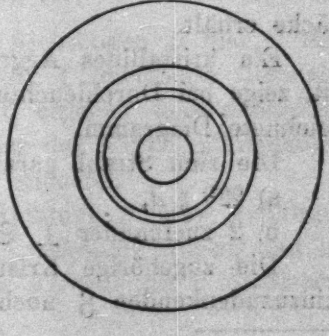


Fig. 1.

Gemäß unserer Tab. III sind daher nur 2 Anisotropieklassen möglich, entweder 7 oder 8.

Die Entscheidung zwischen beiden kann durch eine zweite Aufnahme getroffen werden, bei welcher das Aggregat gegen den Strahl um einen beliebigen Winkel gedreht worden ist; zeigt diese zweite Aufnahme dasselbe Bild wie Fig. 1, so liegt 8 vor, anderenfalls 7, da nur bei 8 zwei gegeneinandergeneigte ∞ zählige Drehachsen vorkommen können.

In der Tat sind beide Fälle von praktischer Bedeutung und an Fasern[1]) und ungeordneten Kristallithaufen realisiert worden.

2. Vier (Punkt-Streifen) Diagramme.

Fig. 2 zeigt ein schematisches Bild, wie man es z. B. bei Durchleuchtung von hartgezogenen Metalldrähten senkrecht

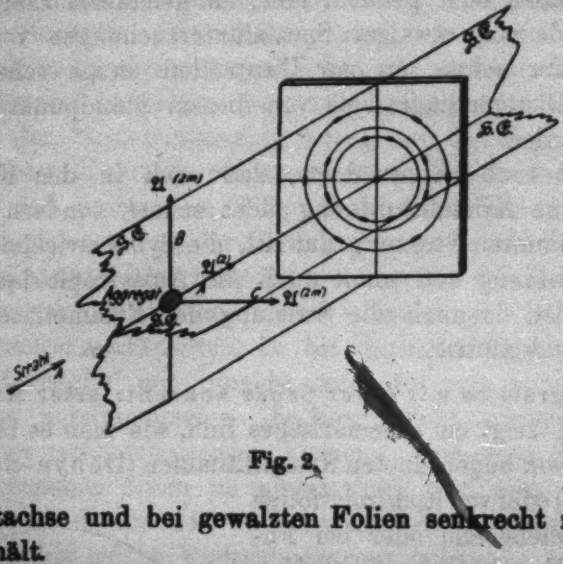


Fig. 2.

zur Drahtachse und bei gewalzten Folien senkrecht zur Walzfläche erhält.

Ein kristallines Aggregat, dessen Anisotropie unbekannt ist, zeige bei Durchleuchtung in Richtung A das in Fig. 2 gezeichnete Diagramm.

Die zum Strahl parallelen Symmetrieelemente sind hier:

a) $\mathfrak{A}^{(2)} \parallel A$,

b) 2 zueinander $\perp$ S.E. parallel zu A.

Die zugehörige Kristallitordnung muß wegen des stets hinzuzudenkenden β noch mindestens 2 zu den S.E. senk-

1) R. O. Herzog u. W. Jancke, Festschrift der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft S. 118. 1921.

rechte geradzählige Achsen enthalten; ihre Richtungen im Aggregat seien mit B bzw. C bezeichnet. Gemäß der Tab. III sind die Klassen 3, 4, 5, 6, 7 möglich, da nur in ihnen 3 zueinander $\perp$ geradzählige Achsen vorkommen.

Zeichnet man nun die in Richtung A gefundene digonale Achse, die Symmetrieebenen und die beiden geradzähligen Achsen B und C in das Aggregat ein, so kann man aus Spalte 3 der Tab. III entnehmen, in welchen Richtungen im Aggregat noch Achsen auftreten können. Durchleuchtet man dann das Aggregat in diesen Richtungen, so kann man aus dem Diagramm das Vorhandensein bzw. Fehlen dieser Achsen entnehmen und auf diese Weise die Anisotropieklasse mit Hilfe weniger Aufnahmen eindeutig bestimmen. — Insbesondere folgt z. B., daß

a) die Anisotropieklasse 7 dann und nur dann vorliegt, wenn Durchleuchtung in Richtung B ein mit Fig. 2 identisches Bild, also eine zu $B \parallel$ identische digonale Achse und Durchleuchtung in Richtung C ein System konzentrischer Kreise, also eine ∞ zählige Achse $\parallel$ zu C ergibt;

b) die Anisotropieklasse 4 dann und nur dann vorliegt; wenn entweder Durchleuchtung in Richtung B eine mit A *nicht identische* zu B parallele digonale oder höher als 4 zählige Achse erkennen läßt,

oder Durchleuchtung in Richtung B eine 4 zählige zu $B \parallel$ Achse ergibt und Durchleuchtung in der Winkelhalbierenden von AC eine mit A nicht identische digonale Achse zeigt;

c) die Anisotropieklasse 5 dann und nur dann vorliegt, wenn entweder

die Durchleuchtungen in den Richtungen B und C mit Fig. 2 identische Bilder, also mit A identische digonale Achsen in den Richtungen B und C ergeben und außerdem die Durchleuchtung in Richtung einer der Winkelhalbierenden AB, BC, CA eine 4 zählige Achse aufweist,

oder die Durchleuchtung in Richtung B eine 4zählige, in Richtung C eine mit A identische, digonale Achse, und in Richtung der Winkelhalbierenden von AC eine mit B identische 4 zählige Achse aufweist;

d) die Anisotropieklasse 3, wenn die Durchleuchtung in Richtung B und C mit A identische, zu B und C parallele

digonale Achsen ergibt und außerdem die Durchleuchtung in Richtung einer der Winkelhalbierenden AB, BC, CA *keine* 4zählige Achse aufweist.

Fig. 3 zeigt ein schematisches Bild, wie es z. B. bei harten Drähten oder gewalzten Metallfolien erhalten wurde, wobei die Drahtachse bzw. Walzrichtung schief zum Strahl stand. Das zum Strahl $\parallel$ Symmetrieelement ist hier 1 S.E. durch vertikale Mittellinie und Strahl.

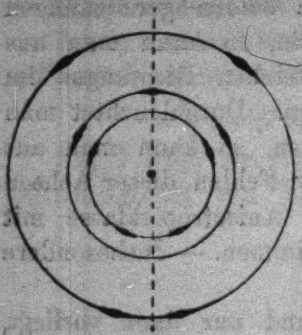


Fig. 3.

Mit Berücksichtigung von β folgt daher für die Kristallitordnung eine geradzählige Achse $\perp$ zur S.E., somit eine der Klassen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Zur Entscheidung kann man zunächst den Strahl parallel der gefundenen geradzähligen Achse einstellen, aus dem so erhaltenen Bild zunächst die Zähligkeit der Achse ablesen und sodann dasselbe nach weiteren Symmetrieelementen suchen. Durch Fortsetzen dieses Verfahrens kann man wieder mit wenigen Aufnahmen die Anisotropieklasse der Kristallitordnung festlegen.

B. Bestimmung der Kristallitordnung innerhalb der Anisotropieklasse.

Zur Festlegung einer Kristallitlage sind im allgemeinsten Fall die Richtungen dreier kristallographischen Achsen des Gitters zu bestimmen; man wird dabei zweckmäßig die Netzebenennormalen der dichtest belegten Ebenen auswählen. Bei hoch symmetrischen Elementarkörpern, in denen die dichtest belegte Ebene in mehreren Richtungen vorkommt, ist es einfacher, diese Richtungen selbst zur Kennzeichnung der Kristalitlage zu verwenden.

Um *alle* Kristallitlagen in dem Aggregat aufzusuchen, wird es daher im allgemeinen notwendig sein, die Verteilung der drei dichtest belegten Netzebenen auf der Lagenkugel zu bestimmen und sodann die gemäß der Gitterordnung zusammengehörigen Lagen derselben zu je einer Kristallitlage zu verbinden. Bei kubischen Elementarkörpern genügt die Feststel-

lung der dichtestbelegten Ebene allein. Bei Kenntnis der Anisotropieklasse der Kristallitordnung vereinfacht sich das Verfahren wesentlich, indem dann nicht die ganze Lagenkugel, sondern nur jener Teil derselben abgesucht werden muß, aus dem alle andern durch Symmetrieoperationen der Klasse abgeleitet werden können. Die Lage der Netzebenen auf der Lagenkugel und somit auch im Aggregat kann quantitativ gemäß den analytischen Methoden, welche in den Arbeiten über das Röntgenfaserdiagramm entwickelt worden sind, berechnet werden; da aber die Formulierungen dort im Hinblick auf ein spezielles Problem gewählt wurden, werden nachfolgend diejenigen Gedankengänge nnd Formeln wiederholt, welche für alle Kristallitordnungen Geltung haben.

Um die einer bestimmten Kristallitordnung entsprechenden Röntgendiagramme abzuleiten, realisieren wir zunächst die Kristallitordnung auf der Lagenkugel, indem wir jede Netzebenenparallelschar durch das Punktepaar MM ersetzen, welches die gemeinsame Netzebenennormale aus der Lagenkugel ausstößt. Die Reflexionen stellen wir uns am Kugelmittelpunkt vollzogen vor, so zwar, daß der reflektierte Strahl gemäß den Reflexionsgesetzen 1, 2 und 3 festgelegt ist.

Und um nun eine Darstellung sämtlicher von einem Beugungszentrum ausgehenden Strahlen zu ermöglichen, denken wir uns über die Lagenkugel eine zweite Schicht als Bildkugel gezogen; ein Punkt auf derselben stellt die Richtung eines abgebeugten Strahles dar. Die Gesamtheit solcher Punkte ergibt das vollständige Diagramm auf der Bildkugel, als deren Zentralprojektion sich jede beliebige Röntgenaufnahme darstellt. Demnach entspricht jedem Punkt M der Lagenkugel, welcher in reflexionsfähiger Lage ist, also nach 1 vom Einstichpunkt A des Röntgenstrahles einen sphärischen Abstand $(90° - \gamma_{(D1)})$ hat, ein Punkt $\mathfrak{M}$ der Bildkugel; der wegen 2 von A dem Abstand $(180 - 2\gamma_{(D1)})$ hat und nach 3 mit M und $\mathfrak{M}$ auf einem Größekreis liegt.

Fig. 4 zeigt diesen Zusammenhang. Wird die Richtung des einfallenden Strahles X und eine zweite beliebige Achse Y zu Koordinatenachsen im Aggregat gewählt, so kann die Lage von M in bezug auf diese beiden Achsen berechnet werden, nachdem die Lage von $\mathfrak{M}$ auf der Bildkugel (photographischer

Film oder Platte) vermessen und β der Winkel zwischen beiden Achsen gegeben ist; es sei insbesondere der Abstand $\mathfrak{M}A = 180^\circ - 2\gamma_{(D\lambda)}$ und der Winkel δ, den der Größtkreis AP mit

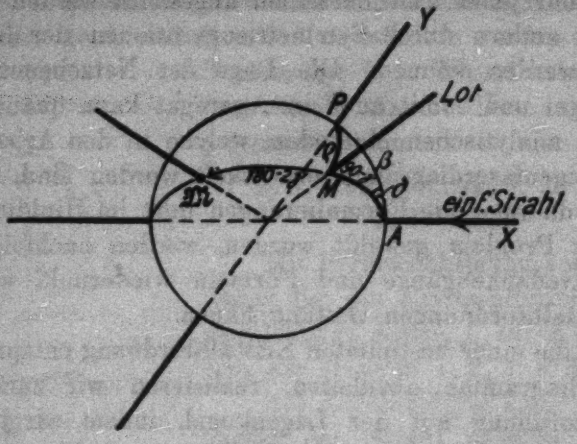


Fig. 4.

dem Größtkreis $A\mathfrak{M}$ einschließt, gemessen, dann folgt aus dem sphärischen Dreieck APM für $PM = \varrho$

(4) $$\cos\varrho = \cos\beta \sin\gamma_{(D\lambda)} + \sin\beta \cos\gamma_{(D\lambda)} \cos\delta$$

und

(5) $$AM = \tfrac{1}{2} A\mathfrak{M} = (90^\circ - \gamma_{(D\lambda)}).$$

Durch Gl. (4) u. (5) ist die Lage der Netzebenenschar, welche nach $\mathfrak{M}$ reflektiert, in bezug auf die gewählten Koordinatenachsen festgelegt; im allgemeinen wird man noch von diesem Koordinatensystem zu einem andern im Aggegrat ausgezeichneten mit Hilfe einer Koordinatentransformation übergehen.

Durch das oben gekennzeichnete Verfahren können alle Beugungseffekte jeder Kristallitordnung bestimmt und auch umgekehrt die räumlich quantitative Deutung aller möglichen Röntgenogramme vorgenommen werden.

Will man nun aus Röntgendiagrammen die Kristallitordnung bestimmen, so frägt es sich nun noch, nach welcher Methode man die Lagenkugel systematisch absuchen soll, um die dichtest belegten Netzebenen aller Kristallitlagen mit Sicherheit zur Reflexion zu bringen und so alle Kristallitlagen im Aggregat zu bestimmen. Als schematischer Weg empfiehlt sich hier

die Methode, das Aggregat während der Durchleuchtung um seine vorherbestimmenten Symmetrieachsen rotieren oder pendeln zu lassen und auf diese Weise Drehdiagramme zu erzeugen. Die Drehachse wird im allgemeinen schief zum Strahl gestellt werden, um die dichtest belegten Netzebenen zur Reflexion zu bringen.[1]) Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß mit einer endlichen, beschränkten Anzahl von Aufnahmen die Lagenkugel systematisch abgesucht werden kann, und daß hierbei auch die Netzebenen von größeren Kristalliten mit Sicherheit zur Reflexion gebracht werden.

III. Teil.

Anwendung auf Kristallitordnung in gewalzten Folien, insbesondere in gewalzter Cu-Folie.

A. Bestimmung der Anisotropieklasse.

Der beim Walzen auf einen Punkt in der Folie wirkende Spannungstensor hat zwei Spiegelebenen, und zwar:

1. die Walzebene,
2. die Ebene $\perp$ zur Querrichtung;

in Verbindung mit dem Symmetriezentrum würde aus 1. und 2. noch eine dritte Symmetrieebene $\perp$ zu beiden folgen, senkrecht zu diesen drei Ebenen müßten also geradzählige Achsen auftreten.

Gemäß den im zweiten Teil ausgeführten Überlegungen haben wir parallel zu diesen identische oder höherzählige Symmetrieelemente der Kristallitordnung zu erwarten.

Eine röntgenologische Prüfung dieser Überlegungen kann so durchgeführt werden, daß in Richtung der vermuteten Achsen, d. h. senkrecht zu den drei Spiegelebenen, die Folie durchleuchtet wird.

Fig. 5 zeigt ein Bild einer gewalzten Cu[2])-Folie $\perp$ zur Folie durchleuchtet, die Walzrichtung lag $\parallel$ zur vertikalen Mittellinie des Bildes.

---

1) M. Polanyi u. K. Weissenberg, Zeitschr. f. Phys. 10. S. 41. 1922.

2) Der Elementarkörper von Cu ist in flächenzentrierter Würfel; der innerste Kreis stammt von den Oktaederebenen, der zweite von den Würfelflächen.

Die zum Strahl ∥ Symmetrieelemente sind hier:

a) digonale Achse,

b) S. E. durch Strahl und Walzrichtung.

c) S. E. durch Strahl und Querrichtung.

Hieraus folgt somit:

Die Walzebenennormale ist digonale Achse der Kristallitordnung und die Walzebene selbst Spiegelebene der Kristallitordnung.

Die Walzrichtung ist geradzählige Achse der Kristallitordnung, die darauf ⊥-Ebene ist S. E. der Kristallitordnung.

Die Querrichtung ist geradzählige Achse der Kristallitordnung, die darauf ⊥-Ebene S. E. der Kristallitordnung.

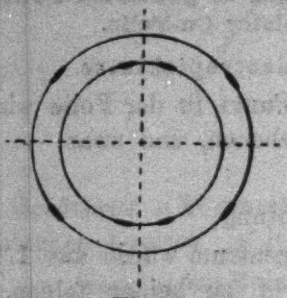


Fig. 5.

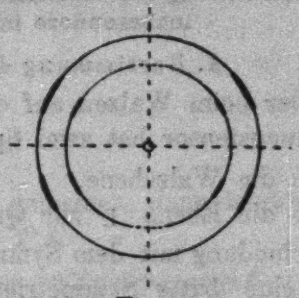


Fig. 6.

Die Zähligkeit von Walzrichtung und Querrichtung können nicht beide größer als zwei sein, da sonst auch gemäß Tab. III die Zähligkeit der Walzebenennormale größer als zwei wäre.

Zur Diskussion stehen also gemäß Tab. III1 die Kristallitordnungen der Klassen (3, 4, 5, 6, 7); durch Feststellung der Zähligkeit von Walzrichtung und Querrichtung wird nun die Anisotropieklasse eindeutig bestimmt.

Fig. 6 zeigt diese Aufnahme bei Durchleuchtung ∥ zur Querrichtung. Die Walzrichtung liegt ∥ zur vertikaten Achse des Bildes.

Es ergeben sich dieselben Symmetrieelemente wie bei Fig. 5 und insbesondere zeigt sich, daß die Querrichtung digonale mit der Walzrichtung *nichtidentische* Achse ist; gemäß Tab. III ist dies nur in der Klasse 4 möglich.

In gewalzten Metallfolien besteht somit eine Kristallitordnung der Klasse 4 und es finden sich die Symmetrieelemente des Spannungstensors in der Kristallitordnung identisch wieder.

Bestimmung der Kristallitordnung.[1])

Bei dem Absuchen der Lagenkugel hat sich gezeigt, daß im ganzen nur wenige Kristallitlagen vorkommen, indem bei Drehung der Folie um eine Achse bald Streifen auftraten, bald wieder verschwanden. — Zunächst ist die Frage, wieviel Kristallitlagen bei dieser Anisotropieklasse zu einer einfachen Gruppe zusammengefaßt sind, d. h. in wie weit die Eigensymmetrie des Gitters zum Aufbau der Kristallitanordnung ausgenutzt wurde. Bei der vorliegenden Symmetrieklasse sind folgende Möglichkeiten, die wir an der Lagenkugel veranschaulichen wollen.

Wir zeichnen zunächst die drei Spiegelebenen ein und teilen dadurch die Kugeloberfläche in acht Oktanten. Aus einer Kristallitlage werden somit durch Spiegelung an den drei Ebenen im ganzen acht Lagen erzeugt, die zu einer einfachen Kristallitgruppe der Klasse 4 zusammengefaßt werden. Bei Kristalliten mit Symmetriezentrum sind je zwei dieser Lagen (Antipoden) identisch, so daß nur vier voneinander verschiedene Lagen auftreten. Liegt außerdem noch eine Spiegelebene des Gitters ∥ zu einer S. E. der Kristallitordnung, so werden wieder je zwei dieser Lagen identisch und es tretsn nur zwei voneinander verschiedene Kristallitlagen auf; ist schließlich noch eine zweite Spiegelebene des Gitters einer zweiten der Kristallitordnung ∥, so liegt auch ∥ zur dritten S. E. der Kristallitordnung eine S. E. des Gitters und es resultiert eine einzige Kristallitlage. Somit wird sich die Kristallitordnung aus Gruppen von 4, 2 und 1 Kristallitlage zusammensetzen. Eine dieser Gruppen wurde bestimmt und ergab, daß sie zwei Kristallitlagen in Zwillingsstellung nach einer Oktaederebene enthält, so zwar daß

a) ∥ zur Querrichtung eine Raumdiagonale,
   ⊥ zur Querrichtung eine Oktaederebene;
b) ∥ zur Walzebenenormale liegen zwei Flächendigonalen,
   ⊥ dazu also ∥ zur Walzebene liegen zwei Rhombendodekaederebenen;
c) ∥ zur Walzrichtung liegt eine [112] Richtung,
   ⊥ dazu Walzrichtung, also eine (112) Ebene.

1) Die Kristallitordnung kann je nachdem, wie der Walzprozeß geleitet wird, verschieden sein, daher gelten die nachfolgend mitgeteilten Resultate zunächst nur für die speziell untersuchte Folie.

Fig. 7 zeigt die Rhombendodekaedenebene schraffiert im kubischen Elementarkörper eines Cu-Kristalls.

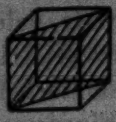


Fig. 7.

Fig. 8 zeigt ein schematisches Bild der Walzebene; die Kristallite der Gruppe liegen so, daß die Rhombendodekaederebenen, welche der Walzfläche parallel liegen, nun in den beiden in der Fig. 7 gezeichneten Lagen vorkommen.

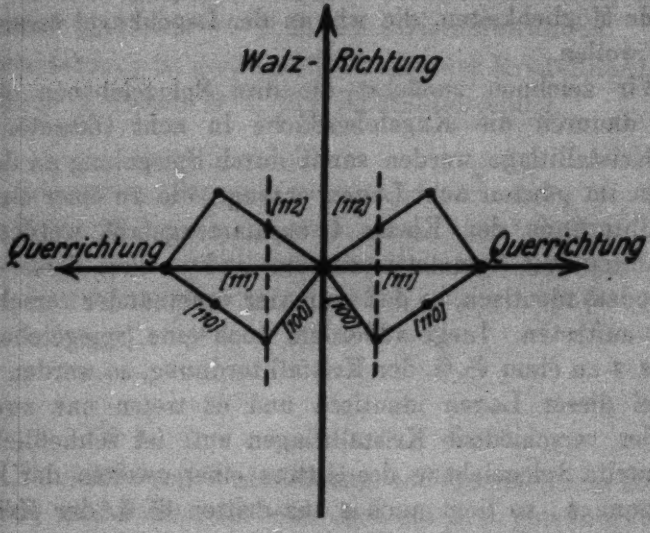


Fig. 8.

Zusammenfassung.

1. Die Anisotropie der natürlich gewachsenen Fasern, der plastisch deformierten Metalle, der Gußstücke aller Art, sowie der elektrolytisch abgeschiedenen Niederschläge, läßt sich als ein statistischer Effekt deuten, welcher durch eine bestimmte Anordnung der Mikrokriställchen im Aggregat zustande kommt.

2. Es wurden alle statistischen Anordnungsmöglichkeiten von Mikrokriställchen untersucht und in ein endliches Schema von Anisotropieklassen eingeordnet.

3. Es werden Formeln zusammengestellt, nach welchen alle Röntgendiagramme von Kristallitordnungen räumlich quantitativ gedeutet werden können.

4. Ein schematischer Weg zur röntgenologischen Bestimmung der Anisotropieklasse eines Aggregates wird abgeleitet und an mehreren Beispielen diskutiert.

5. Es wird eine Anwendung dieser Überlegungen auf die Kristallitanordnung in gewalzten Folien gemacht und festgestellt, daß Walzrichtung, Walzflächennormale und die zu beiden senkrechten Querrichtungen digonale Achsen der Kristallitanordnung sind, und daß senkrecht zu ihnen drei Spiegelebenen liegen.

6. In gewalzter Cu-Folie wurde eine Kristallitgruppe, bestehend aus zwei Kristallitlagen, in Zwillingsstellung nach einer Oktaederebene bestimmt, wobei sich ergab, daß die Walzebene eine Rhombendodekaederebene ist, ∥ zur Walzrichtung sich [112] und ∥ zur Querrichtung [111] einstellt.

7. Aus dem untersuchten Material kann geschlossen werden, daß wahrscheinlich bei allen Mikrokristallinenaggregaten parallel zu den Symmetrieelementen des bei einer plastischen Deformation angelegten Spannungstensors identische oder höherzählige Symmetrieelemente *der Kristallitordnung* auftreten, und daß

8. die Eigensymmetrie des Gitters im allgemeinen nicht oder nur unvollkommen für den Aufbau der Kristallitordnung ausgenutzt wird; wahrscheinlich stellen sich hier die dichtest belegten Ebenen oder die Gleitebenen und Richtungen annähernd parallel oder senkrecht zu den Achsen des Spannungstensors.

Kaiser Wilhelm-Institut für Faserstoffchemie
phys.-chem. Abt.

(Eingegangen 4. Juli 1922.)

2. *Bemerkung zu der Franz Seletyschen Arbeit „Beiträge zum kosmologischen System“;*

(Ann. d. Phys. 68. S. 281. 1922)

von A. Einstein.

Es ist zuzugeben, daß die Hypothese vom „molekularhierarchischen“ Charakter des Aufbaues der Sternenwelt vom Standpunkt der Newtonschen Theorie manches für sich hat, wenn auch die Hypothese von der Gleichwertigkeit der Spiralnebel mit der Milchstraße durch die letzten Beobachtungen als widerlegt zu betrachten sein dürfte. Diese Hypothese erklärt ungezwungen das Nichtbuchten des Himmelsgrundes und vermeidet den Seeligerschen Konflikt mit dem Newtonschen Gesetz, ohne die Materie als Insel im leeren Raum auffassen.

Auch vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Hypothese vom molekularhierarchischen Bau des Weltalls *möglich*. Aber vom Standpunkt dieser Theorie ist die Hypothese dennoch als unbefriedigend anzusehen. Dies sei im folgenden noch einmal kurz begründet. Wenn die geometrischen und die Inertialeigenschaften des Raumes durch die Materie beeinflußt, bzw. zum Teil bedingt sind, so drängt sich die Ansicht auf, daß diese Bedingtheit eine vollständige sei, wie dies nach der allgemeinen Relativitätstheorie der Fall ist, wenn die mittlere Dichte der Materie endlich und die Welt räumlich geschlossen ist. Ich will dies durch einen einfacheren fingierten Fall — wenn auch unvollkommen — zu illustrieren suchen.

Es sei angenommen, man würde die Gravitation nur durch das genaue Studium der Mechanik solcher Massen kennen, welche uns bei Laboratoriumsversuchen zur Verfügung stehen. Die Kugelgestalt der Erde sei uns unbekannt. Dann könnte man folgende Theorie aufstellen. Es existiert primär ein vertikales „kosmisches“ Schwerefeld, welches sich überall ins Unendliche erstreckt. Die Erde erstreckt sich unten ins Unendliche. Ihre Gravitationswirkung sei gegen das kosmische

Schwerefeld zu vernachlässigen.[1]) Das kosmische Schwerefeld wird modifiziert durch Gravitationswirkungen von der Erfahrung zugänglichen Massen an der Erdoberfläche.

Obwohl das angenommene kosmische Schwerefeld der Poissonschen Gleichung entspricht ebenso wie die Schwerefelder der dem Experiment zugänglichen Massen an der Erdoberfläche, wäre diese Auffassung deshalb unbefriedigend, weil man das kosmische Feld selbst ohne materielle Ursache angenommen hat. Die Idee, daß das Schwerefeld, welches in der Hauptsache den Fall der Körper an der Erdoberfläche bedingt, nicht selbständig existierend, sondern durch den Erdkörper verursacht sei, würde gewiß als großer Fortschritt empfunden werden.

Daß heute das Bedürfnis einer Zurückführung des metrischen und Inertialfeldes der Welt auf physikalische Ursachen nicht ähnlich intensiv gefordert wird, liegt nur daran, daß dieses letztere Feld als physikalische Realität nicht so deutlich gefühlt wird, wie im obigen Beispiel die physikalische Realität des „kosmischen Schwerefeldes". Einer späteren Generation wird aber diese Genügsamkeit unbegreiflich erscheinen.

Die „molekular-hierarchische Welt" erfüllt ebensowenig wie die „Inselwelt" das Machsche Postulat, nach welchem die Trägheitswirkung des einzelnen Körpers durch die Gesamtheit aller übrigen im gleichen Sinne bedingt sein soll, wie seine Gravitationskraft. Es ist mir schwer verständlich, wieso Hrn. Selety dieser Mangel seines Systems hat entgehen können. Dieser Mangel ist um so schwerwiegender, als man in der allgemeinen Relativitätstheorie auch ohne Betrachtungen kosmologischen Charakters zeigen kann, daß sich die Körper der ersten Näherung so verhalten, wie es nach dem Machschen Gedanken erwartet werden muß. Ich verweise hierüber auf die vierte meiner bei Vieweg erschienenen „Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie" (gehalten im Mai 1921 an der Universität Princeton).

Es sei endlich noch ein Punkt erwähnt, der nicht nur in der Seletyschen Abhandlung, sondern vielfach in der ein-

1) Daß diese Hypothese zum Newtonschen Gesetz nicht paßt, bitte ich zu entschuldigen.

schlägigen Literatur Verwirrung stiftet. Die Relativitätstheorie sagt: Die Naturgesetze sind unabhängig von jeder besonderen Koordinatenwahl zu formulieren, da dem Koordinatensystem nichts Reales entspricht; die Einfachheit eines hypothetischen Gesetzes ist nur nach seiner allgemein kovarianten Formulierung zu beurteilen. Daraus folgt aber nicht, daß man sich die Beschreibung durch passende Wahl des Bezugssystems nicht erleichtern dürfe, ohne gegen das Relativitätspostulat zu verstoßen. Wenn ich z. B. die wirkliche Welt durch die „Zylinderwelt" mit gleichmäßig verteilter Materie approximiere und dabei die Zeitachse parallel den Erzeugenden des „Zylinders" wähle, so bedeutet dies nicht die Einführung einer „absoluten Zeit". In der Welt gibt es nach wie vor kein Koordinatensystem, welches für die Formulierung der Naturgesetze bevorzugt wäre. Bezüglich der wirklichen Welt ist eine exakte Definition eines derartigen Koordinatensystems übrigens unmöglich, auch dann, wenn sich die wirkliche Welt *durch* jene Zylinderwelt roh approximieren läßt. Das Relativitätsprinzip behauptet nicht, daß die Welt gegenüber allen Koordinatensystemen in gleich einfacher oder gar in gleicher Weise zu beschreiben sei, sondern nur, daß die *allgemeinen Gesetze* der Natur bezüglich aller Systeme die gleichen seien (genauer: daß die hypothetisch möglichen Naturgesetze bezüglich ihrer Einfachheit nur in ihrer allgemein kovarianten Formulierung gegeneinander abzuwägen sind.

September 1922.

(Eingegangen 25. September 1922.)

3. *Einwellige gekoppelte Schwingungssysteme;* *von Alfred Kalähne.*

(Fortsetzung von Ann. d. Phys. 42. S. 1001. 1913.)

Durchgehends benutzte Bezeichnungen:

δ_1, δ_2 und b_1, b_2: Dämpfungskonstanten und logar. Dekremente der freien (ungekoppelten) Teilsysteme;

n_1, n_2: Kreisfrequenzen der ungedämpften freien Systeme;

ν_1, ν_2: Kreisfrequenzen der gedämpften freien Systeme;

δ', δ'' und b', b'': Dämpfungskonstanten und logar. Dekremente (der Hauptschwingungen) des gekoppelten Systems;

ν', ν'': Kreisfrequenzen der Hauptschwingungen des gedämpften Koppelungssystems;

ϱ_1, ϱ_2; σ_1, σ_2; ϑ_1, ϑ_2: Wiensche Koppelungskoeffizienten:

K_ϱ, K_σ, K_ϑ: Koppelungsparameter (magnetischer, galvanischer, elektrischer);

h: Verstimmung (Frequenzverhältnis) n_2/n_1;

s: Verhältnis der Dämpfungen δ_2/δ_1;

F: Vgl. Gl. (66) auf S. 447.

x: Koeffizient zur Unterscheidung der drei Fälle A, B und C;

Fall A ($x = 1$): gleiche Frequenzen und Dämpfungen } der Hauptschwingungen des gekoppelten Systems.
Fall B ($x > 1$): ungleiche Frequenzen, gleiche Dämpfung }
Fall C ($x < 1$): gleiche Frequenz, ungleiche Dämpfungen }

Einleitung. Meine unter gleichem Titel im Jahre 1913 in dieser Zeitschrift[1]) erschienene Abhandlung ist bisher unvollendet geblieben. Von den dort angekündigten drei Teilen ist nur der erste, mathematische vollständig erschienen, von dem zweiten, allgemeinphysikalischen Teil nur der erste Abschnitt der Systeme mit rein magnetischer bzw. Beschleunigungskoppelung behandelt. Der dritte speziell physikalische Teil, der Anwendung der abgeleiteten Sätze auf einzelne besondere Systeme bringen sollte, fehlt ganz.

Die hier vorliegende Arbeit soll nun die Fortsetzung und Ergänzung der früheren bilden. Jedoch wird der angekündigte dritte, spezielle physikalische Teil hier wegfallen und in anderer

1) A. Kalähne, Ann. d. Phys. 42. S. 1001. 1913 (im folgenden als A. K. I. bezeichnet.

Form erscheinen. Der Grund für diese Beschränkung ist darin zu suchen, daß bei den elektrischen Schwingungen, auf die die Ergebnisse ganz besonders anwendbar sind, gegenwärtig die freien, also gedämpften Eigenschwingungen, die hier behandelt werden, weniger im Vordergrund des Interesses stehen als die dauernd unterhaltenen ungedämpften.[1]) Es erübrigt sich daher, die Arbeit so ausführlich zu gestalten, wie ursprünglich beabsichtigt war.

Um die Übersicht zu erleichtern, ist die Numerierung der Abschnitte und Paragraphen, sowie der Gleichungen einfach weitergeführt, und es werden die gleichen Bezeichnungen benutzt, soweit nicht neue nötig werden (vgl. Verzeichnis am Eingang).

Leitender Grundgedanke der Arbeit, der noch einmal kurz angedeutet werden möge, ist folgender. Jedes aus mehreren Teilsystemen bestehende Schwingungssystem besitzt mehrere Eigenschwingungen (Koppelungsschwingungen), im allgemeinen mit verschiedenen Frequenzen. Und zwar sind so viel Frequenzen möglich, wie Freiheitsgrade vorhanden sind, bei einem aus zwei Teilsystemen aufgebauten Koppelungssystem also zwei. Die Frequenzen, sowie alle sonstigen Bestimmungsstücke der Schwingungen erhält man aus der *charakteristischen Gleichung* (auch Säkulargleichung genannt), die bei der Integration der simultanen Differentialgleichungen des Koppelungssystems auftritt; sie ist eine algebraische Gleichung vom Grade $2m$, wenn m die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist. In besonderen Fällen verringert sich die Anzahl der Koppelungsfrequenzen, indem einige oder schließlich alle einander gleich werden. Dasselbe gilt für die resultierenden Dämpfungen.

Bei einem aus zwei Teilsystemen von je einem Freiheitsgrad zusammengekoppelten System ist die charakteristische Gleichung vom 4. Grade, und die Zahl der verschiedenen Frequenzen beträgt im allgemeinen zwei. Ziel der Arbeit ist nun, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen bei einem solchen aus zwei Teilsystemen bestehenden Schwingungssystem die beiden Frequenzen bzw. auch die beiden Dämpfungen der

1) Vgl. dazu z. B. F. Harms, Ann. d. Phys. 66. S. 25. 1921.

Koppelungsschwingungen sich auf eine einzige reduzieren, so daß „*Einwelligkeit*" vorhanden ist. Voraussetzung der Rechnung ist, daß die Teilsysteme ungekoppelt, jedes für sich, freie exponentiell gedämpfte Sinusschwingungen auszuführen vermögen, und daß die Koppelung durch lineare Glieder erfolgt. Diese Voraussetzungen sind streng bei quasistationären elektrischen Schwingungskreisen erfüllt, weswegen auch elektrische Systeme die besten Anwendungsbeispiele liefern.

§ 9. Die Rechnungsgrundlagen.

Die Differentialgleichung der Bewegung für ein derartiges Koppelungssystem sind die Gleichungen (24) von A K I, die hier als Grundlage der Rechnung mit einigen weiteren Gleichungen vorangestellt werden

$$(24)\quad \begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\delta_1\frac{dx_1}{dt} + n_1^2 x_1 + \varrho_1\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\delta_1\sigma_1\frac{dx_2}{dt} + n_1^2\vartheta_1 x_2 = 0, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\delta_2\frac{dx_2}{dt} + n_2^2 x_2 + \varrho_2\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\delta_2\sigma_2\frac{dx_2}{dt} + n_2^2\vartheta_2 x_1 = 0. \end{cases}$$

Die letzten drei Glieder jeder dieser Gleichungen sind die Koppelungsglieder, und zwar bewirkt das Glied mit ϱ die Beschleunigungskoppelung, das Glied mit σ die Geschwindigkeits- oder Reibungskoppelung, das Glied mit ϑ die Lage- oder Kraftkoppelung; bei elektrischen Systemen hat man in derselben Reihenfolge mit ϱ magnetische (induktive), mit σ galvanische (konduktive), mit ϑ elektrische (kapazitive) Koppelung.

Die drei ersten Glieder allein genommen ergeben die Gleichungen der freien gedämpften Eigenschwingungen beider Teilsysteme, deren Frequenzen sind

$$(26)\qquad \nu_1 = \sqrt{n_1^2 - \delta_1^2}, \qquad \nu_2 = \sqrt{n_2^2 - \delta_2^2}.$$

x_1 und x_2 sind die mit der Zeit t veränderlichen Schwingungsvariablen (Verschiebung eines Systempunktes, elektrische Stromstärke, Spannung u. dgl.).

Die Frequenzen ν' und Dämpfungen δ' der Koppelungsschwingungen ergeben sich aus dem Ansatz für x_1 und x_2.

$$(27)\qquad x_1 = A_1 e^{\mu t}; \qquad x_2 = A_2 e^{\mu t}.$$

$$(28)\qquad \mu = -\delta' \pm i\nu'; \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Für μ gilt die biquadratische Gleichung

$$(31)\qquad \mu^4 + a_3\mu^3 + a_2\mu^2 + a_1\mu + a_0 = 0$$

mit

$$(32)\quad \begin{cases} a_3 = \dfrac{2(\delta_1 - \varrho_2\,\delta_1\,\sigma_1 + \delta_2 - \varrho_1\,\delta_2\,\sigma_2)}{1 - \varrho_1\,\varrho_2}, \\ a_2 = \dfrac{n_1^2 - \varrho_2\,n_1^2\,\vartheta_1 + 4\,\delta_1\,\delta_2 - 4\,\delta_1\,\delta_2\,\sigma_1\sigma_2 + n_2^2 - \varrho_1\,n_2^2\,\vartheta_2}{1 - \varrho_1\,\varrho_2}, \\ a_1 = \dfrac{2(\delta_2\,n_1^2 - \delta_2\,\sigma_2\,n_1^2\,\vartheta_1 + \delta_1\,n_2^2 - \delta_1\,\sigma_1\,n_2^2\,\vartheta_2)}{1 - \varrho_1\,\varrho_2}, \\ a_0 = \dfrac{n_1^2\,n_2^2(1 - \vartheta_1\,\vartheta_2)}{1 - \varrho_1\,\varrho_2}. \end{cases}$$

Im allgemeinen hat die Gleichung (31) *vier verschiedene* Wurzeln μ_{I}, μ_{II}, μ_{III}, μ_{IV}. Da für Schwingungen nur komplexe Wurzeln μ von der Form der Gleichung (28) in Betracht kommen, so ergibt sich also, daß im allgemeinen zwei verschiedene Frequenzen ν_1' und ν_2' und zwei verschiedene Dämpfungen δ_1' und δ_2' im Koppelungssystem vorhanden sind, wobei die Dämpfung δ_1' zur Frequenz ν_1' und δ_2' zu ν_2' gehört.

In besonderen Fällen können die vier Wurzeln in ihren reellen oder in den imaginären Teilen, oder in beiden einander gleich werden. Diese besonderen Fälle werden hier behandelt unter den Bezeichnungen

A, beide Wurzelpaare identisch, $\delta_1' = \delta_2'$, $\nu_1' = \nu_2'$,

B, reelle Teile identisch, $\delta_1' = \delta_2'$,

C, imaginäre Teile identisch, $\nu_1' = \nu_2'$.

Alle drei Fälle ergeben eine Ausartung der biquadratischen Gleichung (31), genauer ihrer reduzierten Form, in eine quadratische.

Die Bedingung für die Ausartung ist die Gleichung:

$$(13)\qquad a_1 - \frac{a_3}{2}\left(a_2 - \frac{a_3^2}{4}\right) = 0.$$

Die drei Fälle A (Frequenzen ν' und Dämpfungen δ' einander gleich), B (Frequenzen ungleich, Dämpfungen gleich), C (Frequenzen gleich, Dämpfungen ungleich) werden durch besondere Bedingungen unterschieden, die in Form von Gleichungen bzw. Ungleichungen auftreten, sich aber durch Einführung eines Koeffizienten $\varkappa$ in eine einzige Gleichung verwandeln lassen, nämlich

$$(14\,\mathrm{b})\qquad 4\varkappa^2 a_0 = \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4}\right)^2 + a_3\left[a_1 - \frac{a_3}{2}\left(a_2 - \frac{a_3^2}{4}\right)\right],$$

wobei gilt

$\varkappa = 1$, Fall A; $\varkappa > 1$, Fall B; $\varkappa < 1$, Fall C.

Mit Rücksicht auf die in allen drei Fällen gültige Bedingung (13) läßt sich (14b) auch umformen in

$$4\varkappa^2 a_0 = \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4}\right)^2 \tag{15}$$

oder schließlich

$$\varkappa^2 a_0 = \frac{a_1^2}{a_3^2} \,. \tag{16}$$

Statt (13) und (14b) kann man natürlich zur Festlegung eines der Fälle A, B, C auch diese beiden neuen Gleichungen (15) und (16) oder überhaupt irgendein Paar von den vier Gleichungen (13), (14b), (15), (16) benutzen. Diese so ausgewählten beiden Gleichungen ergeben durch Einsetzen der Werte a_0 bis a_3 aus (32) zwei Beziehungen zwischen den physikalischen Konstanten der Teilschwingungssysteme, die erfüllt sein müssen, damit die Wurzelpaare μ und damit die Frequenzen und Dämpfungen der Koppelungsschwingungen oder wenigstens die Frequenzen bzw. die Dämpfungen für sich allein einander gleich werden. Ich habe diese Erscheinungen hier unter dem Namen *„Einwelligkeit"* zusammengefaßt, der in engerer Bedeutung nur für Gleichheit der Frequenzen gilt.

Die erforderlichen Bedingungen, denen jene Konstanten (Dämpfungen, Eigenschwingungsfrequenzen und Koppelungskoeffizienten) der Teilsysteme genügen müssen, beschränken diese auf gewisse Gebiete, innerhalb deren sie liegen müssen, damit überhaupt Einwelligkeit [bei freien Eigenschwingungen solcher gekoppelter Systeme] erzielt werden kann. Diese Bedingungen sind in der ersten Veröffentlichung für den Fall I der reinen magnetischen oder Beschleunigungskoppelung ausführlich behandelt worden und sollen nun hier, jedoch kürzer, für andere Koppelungsarten behandelt werden, so daß sich folgende Einteilung ergibt:

I. nur magnetische oder Beschleunigungskoppelung,
II. nur elektrische oder Kraftkoppelung,
III. nur galvanische oder Reibungskoppelung,
IV. gleichzeitig magnetische und galvanische (Beschleunigungs- und Reibungskoppelung),

V. gleichzeitig magnetische und elektrische (Beschleunigungs- und Kraftkoppelung),

VI. gleichzeitig galvanische und elektrische (Reibungs- und Kraftkoppelung),

VII. gleichzeitig alle drei Koppelungen.

In dieser Reihenfolge werden mit Ausnahme des schon in A. K. I. behandelten Falles I die drei Koppelungsarten und ihre Kombinationen behandelt werden.

Um die Ergebnisse der Rechnung ohne weiteres auf den wichtigsten Fall, nämlich elektromagnetische Schwingungskreise anwenden zu können, seien hier noch die beiden Bewegungsgleichungen für ein elektromagnetisches Koppelungssystem mit allen drei Koppelungsarten angegeben

$$(57)\quad \begin{cases} \frac{d^2J_1}{dt^2} + \frac{w_1}{L_1}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{J_1}{L_1C_1} + \frac{L_{12}}{L_1}\frac{d^2J_2}{dt^2} + \frac{w_{12}}{L_1}\frac{dJ_2}{dt} + \frac{J_2}{L_1C_{12}} = 0, \\ \frac{d^2J_2}{dt^2} + \frac{w_2}{L_2}\frac{dJ_2}{dt} + \frac{J_2}{L_2C_2} + \frac{L_{12}}{L_2}\frac{d^2J_1}{dt^2} + \frac{w_{12}}{L_2}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{J_1}{L_2C_{12}} = 0. \end{cases}$$

Dabei sind J_1 und J_2 die Stromstärken in den beiden Kreisen, jeder in einem willkürlich wählbaren, dann aber festzuhaltenden Sinn (Pfeilrichtung in Fig. 7) als positiv gerechnet.

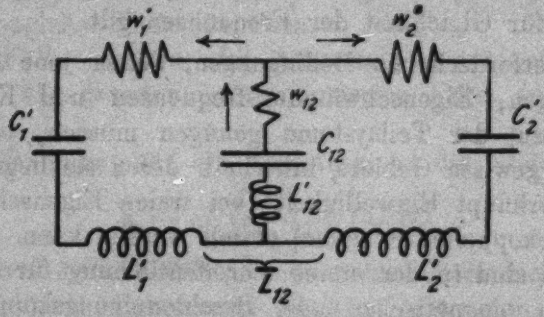


Fig. 7.

L_1 und L_2 sind die Selbstinduktionskoeffizienten der beiden Kreise einschließlich der den beiden Kreisen gemeinsamen Spulen oder Spulenteile, L_{12} Koeffizient der gesamten wechselseitigen Induktion, wiederum einschließlich der den beiden Kreisen gemeinsamen Spulen.

C_1 und C_2 die Gesamtkapazität der getrennten Schwingungskreise, C_{12} die Kapazität des gemeinsamen Kondensators; w_1

und w_2 die Gesamtwiderstände jedes Kreises, auch wieder zusammengesetzt aus den gesonderten und dem gemeinsamen Widerstand auf einem Stück des Leitungsweges. Im einzelnen also der Figur entsprechend

$$(58)\quad \begin{cases} L_1 = L_1' + L_{12}'; & L_2 = L_2' + L_{12}', \\ L_{12} = L_{12}' + L_{12}'', & \\ w_1 = w_1' + w_{12}; & w_2 = w_2' + w_{12}, \\ \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_{12}}; & \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_{12}}. \end{cases}$$

Vergleichung der Gleichung (57) mit (24) läßt sofort die Bedeutung der in (24) und am Kopf der Arbeit eingeführten Größen δ, n, ϑ, ϱ, σ erkennen, nämlich:

$$(59)\quad \begin{cases} \frac{w_1}{L_1} = 2\delta_1; & \frac{w_2}{L_2} = 2\delta_2, \\ \frac{1}{L_1 C_1} = n_1^2; & \frac{1}{L_2 C_2} = n_2^2, \\ \frac{L_{12}}{L_1} = \varrho_1; & \frac{L_{12}}{L_2} = \varrho_2, \\ \frac{w_{12}}{w_1} = \sigma_1; & \frac{w_{12}}{w_2} = \sigma_2, \\ \frac{C_1}{C_{12}} = \vartheta_1; & \frac{C_2}{C_{12}} = \vartheta_2. \end{cases}$$

Hiernach behandeln wir nun die Fälle I bis VII einzeln.

I. *Nur magnetische oder Beschleunigungskoppelung* (dieser Fall ist in der ersten Veröffentlichung behandelt).

II. *Nur elektrische oder Kraftkoppelung.*

§ 10. Die Bedingungsgleichungen bei Kraftkoppelung.

Die Koppelungskoeffizienten sind

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0; \qquad \vartheta_1 \neq 0, \quad \vartheta_2 \neq 0.$$

Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der biquadratischen Gleichung werden

$$(60)\quad \begin{cases} a_3 = 2(\delta_1 + \delta_2) & = 2\frac{\delta_1}{n_1}(1+\varepsilon)n_1, \\ a_2 = n_1^2 + 4\delta_1\delta_2 + n_2^2 = \left(1 + 4\frac{\delta_1^2\varepsilon}{n_1^2} + h^2\right) n_1^2, & \\ a_1 = 2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2) & = 2\frac{\delta_1}{n_1}(h^2+\varepsilon)\, n_1^3, \\ a_0 = n_1^2 n_2^2(1 - \vartheta_1\vartheta_2) = n_1^2 n_2^2(1 - K_\phi^2) & = h^2(1 - K_\phi^2) n_1^4. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden

$$(61)\qquad 2\varkappa n_1 n_2 \sqrt{1 - K_\phi^2} = n_1^2 + n_2^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2.$$

(62) $$2\varkappa(\delta_1+\delta_2)n_1n_2\sqrt{1-K_\phi^2}=2(\delta_2 n_1^2+\delta_1 n_2^2),$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen $\varepsilon=\delta_2/\delta_1$, $h=n_2/n_1$

(61a) $$2\varkappa h n_1^2\sqrt{1-K_\phi^2}=n_1^2(1+h^2)-\delta_1^2(1-\varepsilon)^2,$$

(62a) $$2\varkappa h n_1^2\sqrt{1-K_\phi^2}=\frac{2n_1^2(h^2+\varepsilon)}{1+\varepsilon}.$$

Hieraus ergibt sich Koppelungskoeffizient K_ϕ und Dämpfung des ersten Teilsystems δ_1 (im Verhältnis zur ungedämpften Frequenz n_1):

(63) $$K_\phi=\sqrt{1-\frac{(h^2+\varepsilon)^2}{\varkappa^2h^2(1+\varepsilon)^2}}=\sqrt{1-\frac{F^2}{\varkappa^2}}.$$

(64) $$\frac{\delta_1}{n_1}=\sqrt{\frac{1-h^2}{1-\varepsilon^2}}.$$

K_ϕ ergibt sich also für die drei Fälle A, B, C ($\varkappa=1$, $\varkappa>1$, $\varkappa<1$) verschieden, dagegen ist δ_1 für alle drei Fälle gleich groß, unabhängig von $\varkappa$.

Weiter ergeben sich für alle drei Fälle A, B, C ($\varkappa\lessgtr 1$) aus (26) die gedämpften Frequenzen der ungekoppelten Teilsysteme

(65) $$\frac{\nu_1}{n_1}=\frac{\nu_2}{n_1}=\sqrt{\frac{h^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}},$$

und damit das bemerkenswerte einfache Resultat:

Die gedämpften Frequenzen der ungekoppelten Teilsysteme müssen in allen drei Fällen einander gleich sein.

Das ist eine einfachere Bedingung als die bei magnetischer Koppelung zu erfüllende. Legt man nicht die gedämpften, sondern die ungedämpften Frequenzen n_1 und n_2 zugrunde, so ist die Beziehung zwischen ihnen, nämlich der Wert des Verhältnisses h willkürlich. Zwischen h und dem Verhältnis ε der Dämpfungen muß jedoch eine aus (64) folgende Bedingung eingehalten werden, nämlich:

Für $\varepsilon<1$, also $\delta_2<\delta_1$, muß auch $h<1$, also $n_2<n_1$ sein;

für $\varepsilon>1$, also $\delta_2>\delta_1$, muß auch $h>1$, also $n_2>n_1$ sein, d. h.

das schwächer gedämpfte System muß die kleinere (ungedämpfte) Frequenz haben.

Im Fall I, bei magnetischer Koppelung galt im allgemeinen das Umgekehrte. Damit ist die Richtung der erforderlichen Verstimmung beider Systeme gegeneinander festgelegt.

Die Wurzeln μ und damit die Dämpfung δ' und die Frequenz ν' der Koppelungsschwingungen haben für die drei Fälle im allgemeinen ganz verschiedene Werte, die nicht bloß durch Hinzufügung des Koeffizienten $\varkappa$ als Faktor aus einander hervorgehen; sie müssen daher getrennt behandelt werden.

§ 11. Die Grenzwerte der Verstimmung und Dämpfung.

Aus (63) folgt, daß in allen drei Fällen

$$F = \frac{h^2 + \varepsilon}{h(1 + \varepsilon)} \gtrless \varkappa \tag{66}$$

sein muß, da sonst K_ϕ imaginär wird. Daraus ergeben sich für h gewisse Grenzwerte als Funktionen von ε, oder umgekehrt Grenzwerte von ε als Funktionen von h, indem man $F = \varkappa$ setzt. Diese mit h' bzw. ε' bezeichneten Werte sind

$$h' = \frac{\varkappa(1 + \varepsilon')}{2} \pm \sqrt{\frac{\varkappa^2(1 + \varepsilon')^2}{4} - \varepsilon'}\,. \tag{67}$$

Im Fall II A ($\varkappa = 1$) werden diese Grenzen

$$h_1' = 1 \quad \text{und} \quad h_2' = \varepsilon. \tag{67}$$

Für h_1' wird $K_\phi = 0$ und $\frac{\delta_1}{n_1} = 0$,

für h_2' wird $K_\phi = 0$ und $\frac{\delta_1}{n_1} = 1$.

Nur innerhalb dieser Grenzwerte kann und braucht die zahlenmäßige Berechnung zu erfolgen. Praktisch kommt übrigens meist nur die Grenze $h_1 = 1$ in Betracht, außer wenn ε annähernd gleich 1 ist, denn sonst liegt die Grenze $h_2' = \varepsilon$ zu weit von der Resonanzstelle entfernt.

Der äußere Grenzwert $h_2' = \varepsilon$ ist jedoch noch zu weit gesteckt, wie (74) zeigt, da für $h = \varepsilon$ die resultierende Frequenz ν' bereits imaginär wird. Die eigentlichen Grenzwerte erhält man also aus (74), indem man darin $\nu' = 0$ setzt. Es ergibt sich eine quadratische Gleichung für h mit der Lösung

$$h_\varepsilon = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)^2 - 4\varepsilon(1 - \varepsilon)}{4 + (1 - \varepsilon)^2}}\,. \tag{68}$$

Daraus erhält man für $\varepsilon = 0,\ 0{,}5,\ 1,\ 2,\ \infty$ die zugehörigen Grenzwerte 0,4472, 0,545, 1, 1,840, 2,236, also Werte, die weit außerhalb der praktisch allein in Betracht kommenden in der Nähe der Resonanz $h = 1$ gelegenen Werte liegen. Die Bedingungen der Einwelligkeit sind also grundsätzlich immer erfüllbar.

Für die Berechnung können wieder zur Ersparung einer Hälfte der Rechnung die Reziprozitätsformeln benutzt werden.

$$
\left\{\begin{aligned}
&F(\bar h, \bar\varepsilon) = F(h, \varepsilon)\,,\\
&K_\Phi(\bar h, \bar\varepsilon) = K_\Phi(h, \varepsilon)\,,\\
&\delta_1(\bar h, \bar\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{h}\cdot\delta_1(h, \varepsilon) = \frac{1}{h}\cdot\delta_2(h, \varepsilon)\,,\\
&\delta_2(\bar h, \bar\varepsilon) = \bar\varepsilon\cdot\delta_1(\bar h, \bar\varepsilon) = \frac{1}{h}\cdot\delta_1(h, \varepsilon)\,,\\
&\nu_1(\bar h, \bar\varepsilon) = \frac{1}{h}\nu_2(h, \varepsilon)\,,\\
&\nu_2(\bar h, \bar\varepsilon) = \frac{1}{h}\nu_1(h, \varepsilon)\,,\\
&\delta'(\bar h, \bar\varepsilon) = \frac{1}{h}\delta'(h, \varepsilon)\,,\\
&\nu'(\bar h, \bar\varepsilon) = \frac{1}{h}\nu'(h, \varepsilon)\,,\\
&\mathfrak{b}_1(\bar h, \bar\varepsilon) = \varepsilon\cdot\mathfrak{b}_1(h, \varepsilon) = \mathfrak{b}_2(h, \varepsilon)\,,\\
&\mathfrak{b}_2(\bar h, \bar\varepsilon) = \mathfrak{b}_1(h, \varepsilon)\,,\\
&\mathfrak{b}'(\bar h, \bar\varepsilon) = \mathfrak{b}'(h, \varepsilon)\,,
\end{aligned}\right. \tag{69}
$$

wobei

$$
\bar h = \frac{1}{h}\,,\quad \bar\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \tag{70}
$$

gesetzt ist.

Praktisch kommt übrigens nur die Berechnung in der Nähe der Grenze $h' = 1$ in Betracht, außer wenn ε annähernd $= 1$ ist; denn die andre Grenze h_e liegt im allgemeinen so weit von der Resonanzstelle entfernt, daß dort wegen zu starker Verstimmung überhaupt keine merkliche gegenseitige Beeinflussung der beiden Teilsysteme mehr möglich ist.

§ 12. Der Unterfall II A. ($\varkappa = 1$).

Indem man $\varkappa = 1$ setzt, erhält man aus (63)

$$
K_{\Phi A} = \sqrt{1 - F^2} = \sqrt{1 - \frac{(h^2 + \varepsilon)^2}{h^2(1 + \varepsilon)^2}}\,. \tag{71}
$$

Dämpfung δ_1 des Teilsystems 1 und gedämpfte Kreisfrequenzen der umgekoppelten Systeme ν_1 und ν_2 sind durch die unveränderten Gleichungen (64) und (65) gegeben. Mit diesen Werten von $K_{\phi A}$ und δ_1/n_1 ergibt sich aus (60):

$$(72)\quad \begin{cases} a_3 = 2\sqrt{\dfrac{(1-h^2)(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}}\, n_1\,, \\ a_2 = \left(1 + h^2 + \dfrac{4\varepsilon(1-h^2)}{1-\varepsilon^2}\right) n_1^2\,, \\ a_1 = 2\,(h^2+\varepsilon)\sqrt{\dfrac{1-h^2}{1-\varepsilon^2}}\, n_1^3\,, \\ a_0 = \dfrac{(h^2+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2}\, n_1^4\,. \end{cases}$$

Durch Einsetzen dieser Größen in Gl. (44), die die Wurzeln μ für Fall A ($\varkappa = 1$) allgemein darstellt,

$$(44)\quad \begin{cases} \mu_{\mathrm{I}} = \mu_{\mathrm{II}} = -\dfrac{a_3}{4} + i\sqrt{\sqrt{a_0} - \dfrac{a_3^2}{16}} = -\delta_A' + i\nu_A', \\ \mu_{\mathrm{III}} = \mu_{\mathrm{IV}} = -\dfrac{a_3}{4} - i\sqrt{\sqrt{a_0} - \dfrac{a_3^2}{16}} = -\delta_A' - i\nu_A' \end{cases}$$

erhält man Dämpfung δ' und Kreisfrequenz ν' der hier einwelligen Koppelungsschwingung:

$$(73)\quad \frac{\delta'_A}{n_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-h^2)(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}} = \frac{\delta_1}{n_1}\cdot\frac{1+\varepsilon}{2}\,,$$

$$(74)\quad \begin{cases} \dfrac{\nu'}{n_1} = \sqrt{\dfrac{h^2+\varepsilon}{(1+\varepsilon)} - \dfrac{(1-h^2)(1+\varepsilon)}{4(1-\varepsilon)}} \\ \quad = \sqrt{h\sqrt{1-K_\phi^2} - \dfrac{\delta_1^2(1+\varepsilon)^2}{4n_1^2}}\,. \end{cases}$$

Mittels der hier angegebenen Gleichungen und der bekannten Definition für das logarithmische Dekrement der Dämpfung

$$(75)\qquad \mathfrak{d}_1 = \frac{2\pi\delta_1}{\nu_1}\,,\qquad \mathfrak{d}_2 = \frac{2\pi\delta_2}{\nu_2}\,,\qquad \mathfrak{d}' = \frac{2\pi\delta'}{\nu'}\,,$$

sind die Zahlenwerte der Tab. III berechnet worden, deren Anlage vollständig der Tab. I der ersten Veröffentlichung entspricht. Gegeben sind die Werte

$$h = \frac{n_2}{n_1} \quad\text{und}\quad \varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1}\,.$$

Als Funktionen derselben findet man die Werte $K_{\phi A}$, δ_1/n_1, δ_2/n_1, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, ν_1/n_1, ν_2/n_1, δ'/n_1, $\mathfrak{d}'$, ν'/n_1. Die Werte dieser

Größen für einen und denselben konstanten Wert ε sind jeweils in einer von zwei Horizontallinien eingerahmten Gruppe zusammengefaßt Sieben solcher Gruppen sind berechnet, von gleich großer Dämpfung beider Teilsysteme $\varepsilon = 1$ angefangen, bis zu sehr verschieden starker Dämpfung $\varepsilon = 0$ bzw. $\varepsilon = \infty$. Die Werte h reichen in jeder Gruppe von $h = 1$ (Einklang, Resonanz der ungedämpften ungekoppelten Schwingungen) bis $h = 0{,}98$ bzw. $h = 1{,}02$, d. h. bis zu einer Verstimmung von zwei Hundertsteln.

Die Zahlen der Tabelle lehren, daß bezüglich der Herstellbarkeit einwelliger Systeme ganz ähnliche, sehr einschränkende Bedingungen gelten wie bei magnetischer (Beschleunigungs-) Koppelung:

1. *Nur Teilsysteme, deren Dämpfungen δ_1 und δ_2 sehr verschieden sind (ε sehr groß oder sehr klein), geben gekoppelte Systeme, die einen einigermaßen ausreichenden Koppelungsgrad mit genügend kleiner Dämpfung δ' vereinigen.*

Am deutlichsten wird dies durch Betrachtung der logarithmischen Dekremente $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}'$.

2. *Wird wieder ein Dekrement $\mathfrak{d}' = 0{,}2$ als oberste Grenze zugelassen, so ist bei sehr verschiedenen Dämpfungen ($\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = \infty$) ein Koppelungsgrad von etwa 0,06, d. h. etwa 6 Hundertstel des Höchstwertes 1 erreichbar. Die erforderliche Verstimmung der Teilsysteme gegeneinander (d. h. der ungedämpften Frequenzen*[1]*) muß dabei etwa 2 Tausendstel betragen.*

3. *Ein Dämpfungsunterschied der Teilsysteme im Verhältnis 1 : 10 ($\varepsilon = 0{,}1$ oder $\varepsilon = 10$) ist dabei nach der Tabelle bereits als sehr groß anzusehen. Mit Annäherung des Verhältnisses ε an den Wert 1 wird das Bild aber schnell ungünstig. Schon bei einem Verhältnis der Dämpfungen von 1 : 2 (also $\varepsilon = 0{,}5$ oder $\varepsilon = 2$) ist der erreichbare Koppelungsgrad nur etwa 2 Hundertstel, wenn $\mathfrak{d}' \gtreqless 0{,}2$ bleiben soll.*

Bei vollkommener Gleichheit beider Dämpfungen ($\varepsilon = 1$) versagt das gekoppelte System ganz und gar, indem die zulässige Koppelung Null wird (für Resonanz $h = 1$), dagegen imaginär für alle anderen Werte der Verstimmung h, wie sich aus (63) leicht ergibt.

---

1) Die gedämpften müssen nach § 10 einander gleich sein.

Tabelle III.

Elektrische oder Kraftkoppelung.

	$k = \frac{n_2}{n_1}$	K_ϑ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	ϑ_1	ϑ_2	$\frac{\nu_1}{n_1} = \frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	ϑ'	$\frac{\nu'}{n_1}$
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0$	0,98	0,1990	0,1990	0	1,2758	0	0,98	0,0995	0,6412	0,975
	0,99	0,1411	0,1411	0	0,8953	0	0,99	0,0705	0,4487	0,9875
	0,998	0,0632	0,0632	0	0,3980	0	0,998	0,0316	0,1991	0,9975
	0,999	0,0447	0,0447	0	0,2812	0	0,999	0,0224	0,1406	0,99875
	0,9998	0,0200	0,0200	0	0,1257	0	0,9998	0,0100	0,0628	0,99975
	0,9999	0,0141	0,0141	0	0,0889	0	0,9999	0,00707	0,0444	0,99988
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0{,}1$	0,98	0,1800	0,2	0,02	1,2826	0,1283	0,97980	0,11	0,7083	0,97566
	0,99	0,1276	0,1418	0,01418	0,8999	0,0900	0,98990	0,0780	0,4960	0,98784
	0,998	0,0572	0,0635	0,00635	0,4000	0,0400	0,99798	0,0349	0,2201	0,99757
	0,999	0,0404	0,0449	0,00449	0,2826	0,0283	0,99899	0,0247	0,1554	0,99879
	0,9998	0,0181	0,0201	0,00201	0,1263	0,0126	0,99980	0,0111	0,0695	0,99976
	0,9999	0,0128	0,0142	0,00142	0,0893	0,00893	0,99990	0,00782	0,0491	0,99988
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0{,}5$	0,98	0,1141	0,2298	0,1149	1,4835	0,7418	0,97824	0,1723	1,1146	0,97154
	0,99	0,0812	0,1629	0,0814	1,0373	0,5187	0,98664	0,1222	0,7787	0,98580
	0,998	0,0383	0,0730	0,0365	0,4599	0,2299	0,99733	0,0547	0,3451	0,99716
	0,999	0,0258	0,0516	0,0258	0,3248	0,1624	0,99867	0,0387	0,2436	0,99858
	0,9998	0,0116	0,0231	0,0115	0,1451	0,0726	0,99973	0,0173	0,1089	0,99972
	0,9999	0,00817	0,0163	0,00817	0,1026	0,0513	0,99987	0,0122	0,0770	0,99986
	1		0	0	0	0	1	0	0	1

Tabelle III. (Fortsetzung).

	$h = \frac{n_2}{n_1}$	K_ϕ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	b_1	b_2	$\frac{r_1}{n_1} = \frac{r_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	b'	$\frac{r'}{n_1}$
$s = 1$	< 1	imaginär	∞	∞						
	1	0								
	> 1	imaginär	∞	∞						
$s = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 2$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	1,0001	0,00817	0,00817	0,0163	0,0513	0,1026	0,99997	0,0122	0,0770	0,99996
	1,0002	0,0116	0,0115	0,0231	0,0726	0,1451	0,99993	0,0173	0,1089	0,99992
	1,001	0,0258	0,0258	9,0517	0,1624	0,3248	0,99967	0,0388	0,2436	0,99958
	1,002	0,0383	0,0366	0,0731	0,2299	0,4599	0,99933	0,0549	0,3451	0,99915
	1,0101	0,0812	0,0823	0,1645	0,5186	1,0373	0,99661	0,1234	0,7787	0,99576
	1,0204	0,1141	0,1172	0,2344	0,7417	1,4835	0,99309	0,1759	1,1146	0,99136
$s = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 10$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	1,0001	0,0128	0,00142	0,0142	0,00893	0,0893	1,00000	0,00782	0,0491	0,99998
	1,0002	0,0181	0,00201	0,0201	0,0126	0,1263	1,00000	0,0111	0,0695	0,99996
	1,001	0,0404	0,00450	0,0450	0,0283	0,2826	0,99999	0,0247	0,1554	0,99979
	1,002	0,0572	0,00637	0,0637	0,0400	0,4000	0,99998	0,0350	0,2201	0,99956
	1,0101	0,1276	0,01432	0,1432	0,0900	0,8999	0,99995	0,0788	0,4960	0,99782
	1,0204	0,1800	0,02041	0,2041	0,1288	1,2826	0,99959	0,1122	0,7083	0,99556
$s = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 8$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	1,0001	0,0141	0	0,0141	0	0,0889	1	0,00707	0,0444	0,99998
	1,0002	0,0200	0	0,0200	0	0,1257	1	0,0100	0,0628	0,99995
	1,001	0,0447	0	0,0448	0	0,2812	1	0,0224	0,1406	0,99975
	1,002	0,0632	0	0,0633	0	0,3980	1	0,0317	0,1991	0,99950
	1,0101	0,1411	0	0,1425	0	0,8953	1	0,0713	0,4487	0,99748
	1,0204	0,1990	0	0,2031	0	1,2758	1	0,1015	0,6412	0,99489

§ 13. Die Unterfälle II B ($\varkappa > 1$) und II C ($\varkappa < 1$).

In beiden Fällen hat nach (64) die Dämpfung δ_1 des freien ersten Teilsystems denselben Wert wie im Falle II A. Nur die Koppelung K_ϕ wird eine andere. Es ist also zu untersuchen, ob sie größer oder kleiner als im Falle II A zu nehmen ist.

Die Antwort erhält man wie früher aus der Betrachtung des Differentialquotienten von K_ϕ nach $\varkappa$. Es wird

$$\frac{dK_\phi}{d\varkappa} = \frac{F^2}{\varkappa^3 \cdot K_\phi} = \frac{(h^2+\varepsilon)^2}{\varkappa^3 K_\phi h^2 (1+\varepsilon)^2}. \tag{76}$$

Da dieser Quotient immer positiv ist, so erfolgt der Übergang von Fall B zu C durch A hindurch in der Weise, daß mit wachsendem $\varkappa$ auch K_ϕ wächst. Also im Gegensatz zur magnetischen Koppelung (Fall I) gilt hier:

Zur Verwirklichung des Falles II B (gleiche Dämpfungen ungleiche Frequenzen) muß die Koppelung fester sein als im Fall II A, zur Verwirklichung von Fall C (ungleiche Dämpfungen, gleiche Frequenzen) muß sie loser sein.

Dieses Ergebnis läßt sich übrigens auch unmittelbar aus (63) ablesen, wenn man berücksichtigt, daß nach (64) δ_1 und damit auch δ_2, ν_1, ν_2 beim Übergang von A nach B oder C unverändert bleiben, wenn h und ε konstant gehalten werden.

Die durch (64) geforderte Unabhängigkeit der Dämpfung δ_1 von $\varkappa$ engt den Bereich, aus dem die charakteristischen Systemwerte entnommen werden können, mehr ein als im Fall I bei magnetischer Koppelung, erleichtert aber andererseits die Übersicht und die Berechnung derselben. Denn mittels (64) ist von den vier Größen δ_1, δ_2, n_1, n_2 immer die vierte durch drei von ihnen für alle Unterfälle II A, B, C einheitlich bestimmt. Willkürlich wählbar bleibt noch der Koppelungskoeffizient K_ϕ. Durch ihn wird dann festgelegt, in welchem der drei Gebiete A, B, C man sich befindet. Zu jedem Wertepaar h, ε gehört ein einziger Wert $K_{\phi A}$ (vgl. Tab. III) für den Fall A ($\varkappa = 1$), dagegen beliebig viele Werte K_ϕ für die beiden anderen Fälle B und C ($\varkappa \gtrless 1$).

Koppelungsfrequenz ν' und Dämpfung δ' sind mittels der Gleichungen (20b) und (20c) des ersten Teiles zu berechnen, wobei zu dem reellen Teil, der δ' ergibt, hinzuzufügen ist:

$$-\frac{a_3}{4} = -2\delta_1(1+\varepsilon) = -2n_1(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{1-h^2}{1-\varepsilon^2}}.$$

Somit hat im Fall B ($\varkappa > 1$; gleiche Dämpfungen, aber ungleiche Frequenzen der Koppelungsschwingungen) diese resultierende Dämpfung δ' denselben Wert wie im Falle A (bei gleichem h und ε); im Falle C ($\varkappa < 1$; gleiche Frequenzen aber verschiedene Dämpfungen der Koppelungsschwingungen) unterscheiden sich diese von der Dämpfung δ' des Falles A um ein und denselben Betrag nach oben und unten. Das Auseinandergehen der Frequenzen im Falle B ($\varkappa > 1$) erfolgt zunächst auch linear und gleichmäßig nach beiden Seiten hin, solange $\sqrt{\varkappa^2 - 1}$ klein ist gegen 1; bei größerer Entfernung vom Falle A wird die Abweichung der Frequenzen vom Werte ν_A' verschieden groß.

III. Nur galvanische oder Widerstands- (Reibungs-) Koppelung.

§ 14. Die Bedingungsgleichungen. Die Koppelungskoeffizienten sind:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0; \quad \sigma \neq 0, \quad \sigma \neq 0.$$

Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung sind:

$$(77)\quad \begin{cases} a_3 = 2(\delta_1 + \delta_2) = \dfrac{2\delta_1}{n_1}(1+\varepsilon)n_1, \\ a_2 = n_1^2 + 4\delta_1\delta_2(1 - \sigma_1\sigma_2) + n_2^2 \\ \qquad\qquad = \left[1 + h^2 + \dfrac{4\delta_1^2\varepsilon}{n_1^2}1 - K_\sigma^2\right] n_1^2, \\ a_1 = 2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2) = 2\dfrac{\delta_1}{n_1}(h^2+\varepsilon)n_1^3, \\ a_0 = n_1^2 n_2^2 = h^2 n_1^4. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden:

$$(78)\quad 2\varkappa n_1 n_2 = n_1^2 + 4\delta_1\delta_2(1 - K_\sigma^2) + n_2^2 - (\delta_1 + \delta_2)^2,$$

$$(79)\quad 2\varkappa(\delta_1 + \delta_2)n_1 n_2 = 2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2),$$

oder durch Einsetzen der Hilfsgrößen ε und h und einfachste Umformung:

$$(78\,a)\quad 2\varkappa h n_1^2 = n_1^2(1+h^2) - 4\delta_1^2\varepsilon K_\sigma^2 - \delta_1^2(1-\varepsilon)^2,$$

$$(79\,a)\quad 2\varkappa h n_1^2\delta_1(1+\varepsilon) = 2\delta_1 n_1^2(h^2+\varepsilon).$$

Hier ergibt sich die eigentümliche Tatsache, daß die Größen h und ε, d. h. das Verhältnis der Dämpfungen der Teilsysteme und ihre gegenseitige Verstimmung nicht von-

einander unabhängig sind, sondern durch die Hilfsgröße $\varkappa$ miteinander eng verbunden sind. Denn aus (79a) folgt durch Wegheben der gleichen Faktoren beiderseits:

(79b) $$\varkappa h(1+\varepsilon) = h^2 + \varepsilon .$$

Man kann also, wenn $\varkappa$ gegeben ist, nur eine der beiden Größen h oder ε willkürlich wählen, die andere ist durch (79b) bestimmt. Außerdem sind noch zwei von den drei Größen n_1, δ_1, K_σ frei verfügbar. Die dritte ist dann mittels (78a) vollkommen bestimmt.

§ 15. Der Unterfall IIIA ($\varkappa = 1$). Für den Fall gleicher Frequenzen und gleicher Dämpfungen der beiden Koppelungsschwingungen wird (79b), indem man $\varkappa = 1$ setzt, zu

(80) $$\varepsilon(1-h) = h(1-h).$$

Also muß sein

(a) entweder: $\varepsilon = h$

(b) oder: $h = 1$ und ε beliebig.

Die Lösung b) scheidet aber aus, weil sich mit ihr aus (78a) ein negativer Wert für das Quadrat des Koppelungskoeffizienten K_σ^2 ergeben würde, nämlich $K_\sigma^2 = -\frac{(1-\varepsilon)^2}{4\varepsilon}$. Nur für $\varepsilon = 1$, würde hier K_σ zwar reell, aber zugleich Null werden, und dies fällt wieder unter a).

Mit Benutzung der allein brauchbaren Lösung a) ergibt sich aus (78a):

(81) $$K_\sigma = \sqrt{\frac{\left(\frac{n_1^2}{\delta_1^2} - 1\right)(1-\varepsilon)^2}{4\varepsilon}} .$$

Für $\varepsilon = h = 1$ wird $K_\sigma = 0$. Also muß $\varepsilon = h$ von 1 verschieden gewählt werden. Damit aber K_σ immer < 1 bleibt, wie es die Natur dieses Koeffizienten erfordert, darf ε und damit auch h offenbar von 1 nicht sehr verschieden sein, oder man muß sehr große Dämpfungen in Kauf nehmen. Die Zahlen der Tab. IV geben dafür die nötige Erläuterung. Diese ist etwas abweichend von der Tabelle für Fall I und II, so eingerichtet, daß immer Gruppen von konstanter Dämpfung δ_1 des einen der freien Teilsysteme, also auch von konstantem Dekrement $\mathfrak{d}_1$ zusammengefaßt sind. Es sind Teildämpfungen von $\delta = 0{,}01$ und $0{,}001$, d. h. von mittlerer und sehr geringer

Dämpfung vorgesehen. Von dieser Dämpfung der Teilsysteme — δ_2 ist mittels ε durch δ_1 festgelegt — ist die resultierende Dämpfung des Koppelungssystems δ' abhängig. Wie man sieht, ist sie etwas mehr als halb so groß wie δ_1.

Die zulässige Verstimmung ist hier durch den Wert des Koppelungskoeffizienten bedingt, der sich aus (81) ergibt; er darf keinesfalls größer als 1 werden, und daraus folgt, daß bei kleiner Dämpfung des einen Teilsystems (z. B. δ_1) der Verstimmungsbereich auch sehr klein ist. Die Tabelle IV ist im übrigen sehr einförmig. Es wird sich kaum lohnen, sie noch genauer anzulegen, da der Fall der einfachen galvanischen (Widerstands-) Koppelung ohne Hinzutritt einer anderen Koppelungsart sich schwerlich verwirklicht finden

Tabelle IV.

Galvanische oder Widerstandskoppelung.

$h = \frac{n_2}{n_1} = \varepsilon$	K_σ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	$b_1 = b_2$	$\frac{\nu_1}{n_1}$	$\frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	δ'	$\frac{\nu'}{n_1}$
0,99	0,50249	0,01	0,0099	0,06284	0,99995	0,98995	0,00995	0,062886	0,99494
0,999	0,05002	0,01	0,00999	0,06284	0,99995	0,99895	0,01000	0,062885	0,99945
0,9999	0,00500	0,01	0,009999	0,06284	0,99995	0,99985	0,01000	0,062885	0,99990
1	0	0,01	0,01	0,06284	0,99995	0,99995	0,01	0,062885	0,99995
1,0001	0,00500	0,01	0,010001	0,06284	0,99995	1,00005	0,01000	0,062885	1,00000
1,001	0,04997	0,01	0,01001	0,06284	0,99995	1,00095	0,01000	0,062885	1,00045
1,01	0,4975	0,01	0,0101	0,06284	0,99995	1,00995	0,01005	0,062886	1,00494
0,99	> 1	0,001	0,00099	0,006288	0,999995	—	0,000995	—	—
0,999	0,50025	0,001	0,000999	0,006288	0,999995	0,99990	0,0009995	0,006288	0,9994994
0,9999	0,05000	0,001	0,0009999	0,006288	0,999995	0,99990	0,0009995	0,006288	0,9999496
1	0	0,001	0,001	0,006288	0,999995	1,00000	0,001	0,006288	0,9999995
1,0001	0,05000	0,001	0,0010001	0,006288	0,999995	1,00010	0,0010005	0,006288	1,0000495
1,001	0,49974	0,001	0,001001	0,006288	0,999995	1,00100	0,0010005	0,006288	1,0005000
1,01	> 1	0,001	0,00101	0,006288	0,999995	—	0,001005	—	—

wird, jedenfalls nicht bei elektrischen Schwingungskreisen. Charakteristisch ist das außerordentlich schnelle Ansteigen des erforderlichen Koppelungsgrades mit wachsender Verstimmung schon bei sehr geringer Verstimmung beider Systeme, wenn die Dämpfungen klein sind. Zum Beispiel ist nach der Tabelle bei einer Dämpfung der Teilsysteme $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}001$ (Dekrement $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2 = 0{,}00628$), wozu eine resultierende Dämpfung δ' gehört, die ebenfalls annähernd 0,001 ist (Dekrement $\mathfrak{d}' =$ rund 0,00628), der erforderliche Koppelungsgrad 5 Hundertstel des Höchstwertes, wenn die Verstimmung 1 Zehntausendstel beträgt, dagegen schon 50 Hundertstel, wenn die Verstimmung 1 Tausendstel beträgt; für die Verstimmung 1 Hundertstel müßte der Koppelungsgrad schon mehr als 100 Hundertstel sein, also über dem möglichen Höchstwert liegen.

§ 16. Die Unterfälle III B ($\varkappa > 1$) und III C ($\varkappa < 1$). Gleichung (78a) ergibt hier:

$$K_\sigma = \sqrt{\frac{\frac{n_1^2}{\delta_1^2}(1-\varkappa h)(1-s)-(1-s)^2}{4s}}, \tag{82}$$

wobei aber zwischen h, s und $\varkappa$ die Beziehung (79b) gilt. Durch Einsetzen des Wertes s aus (79b) wird (82) zu:

$$K_\sigma = \sqrt{\frac{\frac{n_1^2}{\delta_1^2}(1+h^2-2\varkappa h)(1-\varkappa h)^2-(1+h^2-2\varkappa h)^2}{4h(\varkappa-h)(1-\varkappa h)}}. \tag{83}$$

Die Differentiation dieses Ausdrucks nach $\varkappa$ ergibt die notwendige Veränderung von K_σ mit wachsendem $\varkappa$,

$$\frac{dK_\sigma}{d\varkappa} = \frac{1}{2K_\sigma}\frac{dK_\sigma^2}{d\varkappa}.$$

Uns interessiert hauptsächlich der Wert dieses Ausdrucks für $\varkappa = 1$, das heißt für den Übergang vom Fall A ($\varkappa = 1$) zum Fall B ($\varkappa > 1$) bzw. zum Fall C ($\varkappa < 1$). Hierfür ergibt sich durch Einsetzen von $\varkappa = 1$:

$$\left(\frac{dK_\sigma}{d\varkappa}\right)_{\varkappa=1} = \frac{(1+h)^2-\frac{n_1^2}{\delta_1^2}[2-(1-h)^2]}{8hK_\sigma}. \tag{84}$$

Da h annähernd 1, also $(1-h)^2 \ll 2$, so wird das zweite Glied des Zählers negativ, und da dieses wegen $\frac{n_1^2}{\delta_1^2} > (1+h)^2$ das erste überwiegt, so ist die ganze rechte Seite negativ. Also

folgt: *Beim Übergang vom Fall IIIC ($x < 1$) zu IIIB ($x > 1$) durch Fall A ($x = 1$) hindurch muß der Koppelungskoeffizient K_ϱ abnehmen. Dieser Abfall von K_ϱ ist sehr steil, denn der absolute Wert des Differentialquotienten ist groß gegen 1.* Das Gebiet $x = 1$, d. h. das Gebiet, in dem der Fall IIIA verwirklicht ist (gleiche Dämpfungen und gleiche Frequenzen beider Koppelungsschwingungen) ist offenbar ein Gebiet wenig stabiler Zustände.

IV. Gleichzeitig magnetische und galvanische (Beschleunigungs- und Widerstands-) Koppelung.

§ 17. Die Bedingungsgleichungen.

Die Koppelungskoeffizienten ϱ_1, ϱ_2, σ_1, σ_2 sind von Null verschieden; $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$.

Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung:

$$
(85)\quad \begin{cases} a_3 = \dfrac{2(\delta_1 + \delta_2 - \varrho_1\delta_2\sigma_2 - \varrho_2\delta_1\sigma_1)}{1 - \varrho_1\varrho_2} \\ \quad = \dfrac{\delta_1}{n_1}\,\dfrac{2(1 + \varepsilon - \varrho_2\sigma_1 - \varrho_1\sigma_2\varepsilon)}{1 - K_\varrho^2}\,n_1\,, \\ a_2 = \dfrac{n_1^2 + n_2^2 + 4\delta_1\delta_2 - 4\delta_1\delta_2\sigma_1\sigma_2}{1 - \varrho_1\varrho_2} \\ \quad = \dfrac{1 + h^2 + 4\varepsilon\dfrac{\delta_1^2}{n_1^2}(1 - K_\sigma^2)}{1 - K_\varrho^2}\,n_1^2\,, \\ a_1 = \dfrac{2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2)}{1 - \varrho_1\varrho_2} = \dfrac{2\delta_1}{n_1}\,\dfrac{h^2 + \varepsilon}{1 - K_\varrho^2}\,n_1^3\,, \\ a_0 = \dfrac{n_1^2 n_2^2}{1 - \varrho_1\varrho_2} = \dfrac{h^2}{1 - K_\varrho^2}\,n_1^4\,. \end{cases}
$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden:

$$
(86)\quad \begin{cases} \dfrac{2\varkappa n_1 n_2}{\sqrt{1 - \varrho_1\varrho_2}} = \dfrac{n_1^2 + n_2^2 + 4\delta_1\delta_2(1 - \sigma_1\sigma_2)}{1 - \varrho_1\varrho_2} \\ \qquad - \dfrac{(\delta_1 + \delta_2 - \varrho_1\delta_2\sigma_2 - \varrho_2\delta_1\sigma_1)^2}{(1 - \varrho_1\varrho_2)^2}\,. \end{cases}
$$

$$
(87)\quad \begin{cases} \dfrac{2\varkappa(\delta_1 + \delta_2 - \varrho_1\delta_2\sigma_2 - \varrho_2\delta_1\sigma_1)}{1 - \varrho_1\varrho_2}\cdot\dfrac{n_1 n_2}{\sqrt{1 - \varrho_1\varrho_2}} \\ \qquad = \dfrac{2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2)}{1 - \varrho_1\varrho_2}\,, \end{cases}
$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen ε und h

$$(86\,a)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\varkappa h n_1^2}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} = \dfrac{n_1^2(1+h^2)+4\varepsilon\delta_1^2(1-K_\sigma^2)}{1-K_\varrho^2} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\delta_1^2(1+\varepsilon-\varrho_2\sigma_1-\varrho_1\sigma_2\varepsilon)^2}{(1-K_\sigma^2)^2}, \end{cases}$$

$$(87\,a)\qquad \frac{\varkappa h(1+\varepsilon-\varrho_2\sigma_1-\varrho_1\sigma_2\varepsilon)}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} = h^2+\varepsilon.$$

Hierin sind außer ε, h, K_ϱ und K_σ noch die Produkte $\varrho_1\sigma_2$ und $\varrho_2\sigma_1$ vorhanden. Diese lassen sich aber auf K_ϱ und K_σ zurückführen, wenn man die Werte von ϱ_1, ϱ_2, σ_1, σ_2 genauer ansieht. Für elektromagnetische Schwingungen gelten z. B. die Werte (59). Mit ihrer Hilfe läßt sich leicht ableiten:

$$(88)\qquad \varrho_1\sigma_2\varepsilon = \varrho_2\sigma_1 = \sqrt{\varrho_1\varrho_2\sigma_1\sigma_2\varepsilon} = K_\varrho K_\sigma\sqrt{\varepsilon}.$$

Mit Benutzung dieser Beziehung, die übrigens auch für mechanische Systeme gilt, werden die Gleichungen (86) und (87)

$$(86\,b)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\varkappa h n_1^2}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} = \dfrac{n_1^2(1+h^2)+4\varepsilon\delta_1^2(1-K_\sigma^2)}{1-K_\varrho^2} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\delta_1^2(1+\varepsilon-2K_\varrho K_\sigma\sqrt{\varepsilon})}{(1-K_\varrho^2)^2}, \end{cases}$$

$$(87\,b)\qquad \varkappa h(1+\varepsilon-2K_\varrho K_\sigma\sqrt{\varepsilon}) = (h^2+\varepsilon)\sqrt{1-K_\varrho^2}.$$

Hier sind also zwei Gleichungen zwischen den 5 Größen h, ε, δ_1/n_1, K_ϱ, K_σ vorhanden. Daher sind drei von diesen willkürlich wählbar, z. B. h, ε, K_ϱ; die beiden anderen, δ_1/n_1 und K_σ, sind durch deren Werte festgelegt, nämlich

$$(89)\qquad \begin{cases} K_\sigma = \dfrac{1}{2K_\varrho\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\varepsilon-\dfrac{h^2+\varepsilon}{\varkappa h}\sqrt{1-K_\varrho^2}\right), \\ \dfrac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{\dfrac{h^2+1-2\varkappa h\sqrt{1-K_\varrho^2}}{\dfrac{(h^2+\varepsilon)^2}{h^2\varkappa^2}-4\varepsilon(1-K_\sigma^2)}}. \end{cases}$$

§ 18. Der Unterfall IV A. ($\varkappa = 1$).

Die Werte von K_σ und δ_1/n_1 für den Fall der vollkommenen Einwelligkeit erhält man aus der Gleichung (89), indem man darin $\varkappa = 1$ setzt. Es ist unnötig, diese von (89) nur durch Fehlen des Faktors $\varkappa$ unterschiedenen Gleichungen noch besonders hinzuschreiben.

Aus ihnen folgt weiter für Dämpfung und Frequenz der Koppelungsschwingung, da allgemein $\delta' = \sigma_3/4$ ist,

$$(90)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta'}{n_1} = \dfrac{\delta_1}{n_1}\,\dfrac{1+\varepsilon-\varrho_2\sigma_1-\varrho_1\sigma_2\,\varepsilon}{2(1-K_\varrho^2)} = \dfrac{\delta_1}{n_1}\,\dfrac{h^2+\varepsilon}{2h\sqrt{1-K_\varrho^2}}, \\ \dfrac{\nu'}{n_1} = \dfrac{1}{n_1}\sqrt{\sqrt{a_0}-\dfrac{a_2^2}{16}} = \sqrt{\dfrac{h}{\sqrt{1-K_\varrho^2}}-\dfrac{\delta_1^2}{n_1^2}\,\dfrac{(h^2+\varepsilon)^2}{4h^2}}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten nur für Fall IV A, nicht auch für Fall IV B und C.

Um die Wirkung des Hinzutritts der zweiten Koppelung sicher zu erkennen, berechnet man am besten eine Reihe von Werten dieser Größen für verschiedene h und ε unter Zugrundelegung gewisser Werte von K_ϱ; als solche nimmt man zweckmäßigerweise Werte, die bei einfacher Koppelung (in der Tabelle I) vorkommen.

Das Verfahren ist jedoch umständlich, weil sehr viele Einzelwerte berechnet werden müssen. Es soll an dieser Stelle davon abgesehen werden und versucht werden, durch Berechnung der Werte K_σ nur für gewisse ausgezeichnete Werte von h, ε und K_ϱ einen Überblick über das allgemeine Verhalten der in Rede stehenden Größen unter der Wirkung der Mischkoppelung zu erlangen.

1. *Dämpfungen der Teilsysteme sehr verschieden.*

a) $\varepsilon = 0$ (erster Grenzfall).

Gleichung (87 b) ergibt für diesen Fall, daß sein muß

$$K_\varrho = \frac{1}{h}\sqrt{h^2-1}.$$

Damit wird weiter

$$(91)\quad \begin{cases} K_\sigma = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{\varepsilon=0} \dfrac{1+\varepsilon-\dfrac{h^2+\varepsilon}{h}\sqrt{1-K_\varrho^2}}{2K_\varrho\,\varepsilon} \\ \qquad = \lim \dfrac{1-\dfrac{1}{h}\sqrt{1-K_\varrho^2}}{\dfrac{2K_\varrho}{\sqrt{\varepsilon}}} = 0. \end{cases}$$

Das bedeutet: für $\varepsilon = 0$ fällt die galvanische Koppelung weg, man hat also den schon behandelten Fall der reinen magnetischen Koppelung mit den Werten der Tabelle I.

b) $\varepsilon = \infty$ (zweiter Grenzfall).

Eine ähnliche Untersuchung mit Grenzübergang zeigt, daß auch für diesen Fall die galvanische Koppelung $K_\sigma = 0$ weg-

fällt, also auch wieder nur rein magnetische Koppelung zulässig ist mit den Werten von Tabelle I.

Geht man nun von diesen Grenzfällen extrem verschiedener Dämpfung zu solchen Fällen verschiedener Dämpfung über, wo das Verhältnis ε endliche kleine oder große Werte hat (z. B. 0,1 oder 10), so wird die erforderliche zusätzliche galvanische Koppelung $K_g > 0$, und man kann die so entstehenden Systeme mit den Systemen einfacher Koppelung von Tabelle I bzw. IV vergleichen und abschätzen, ob sie günstiger wirken, insbesondere auch, wie sich ihre Dämpfung verhält.

Durch eine einfache, an Gleichung (89) anschließende Betrachtung ergibt sich: *wenn im Falle I (Tabelle I) $h^2 > \varepsilon$ ist, so muß bei gleichbleibendem K_e für gemischte Koppelung h kleiner als im Falle I genommen werden; wenn $h^2 < \varepsilon$ ist, so muß h größer als im Falle I genommen werden.*

Dies ergibt sich daraus, daß $K_g > 0$ werden muß.

Die Dämpfung δ_1 und damit auch δ', nimmt bei gleichbleibendem h, ε und K_e gemäß (89) zu, wenn man K_g von 0 an wachsen läßt. Dasselbe scheint auch zuzutreffen, wenn h dabei nicht konstant bleibt, sondern die soeben besprochene Veränderung erfährt, und ein einfaches Zahlenbeispiel scheint dies zu bestätigen.

Nach Tabelle I mit rein magnetischer Koppelung gehören z. B. bei $\varepsilon = 0{,}1$ folgende Werte zusammen: Verstimmung $h = 1{,}002$, Koppelungskoeffizient $K_e = 0{,}05714$, Dämpfungen $\delta_1 = 0{,}0636\, n_1$, $\delta_2 = 0{,}00636\, n_1$, $\delta' = 0{,}2198\, n_1$, also $\mathfrak{d}_1 = 0{,}4004$, $\mathfrak{d}_2 = 0{,}0399$, $\mathfrak{d}' = 0{,}2198$. Hier bei gemischter, magnetischer und galvanischer Koppelung erhält man für dieselbe Koppelung ($K_e = 0{,}05714$), aber mit der Verstimmung $h = 1$ folgendes: $K_g = 0{,}1985$, $\delta_1 = 0{,}1257\, n_1$, $\delta_2 = 0{,}01257\, n_1$, $\delta' = 0{,}0696\, n_1$, also $\mathfrak{d}_1 = 0{,}7959$, $\mathfrak{d}_2 = \ldots$, $\mathfrak{d}' = 0{,}4371$. Man hat also ein sehr starkes Anwachsen der Gesamtkoppelung, da die hinzukommende galvanische Koppelung nahezu 20 Hundertstel der möglichen Maximalkoppelung ($K = 1$) beträgt; dafür steigt aber auch die Dämpfung gewaltig, so daß man kaum von einem nutzbringenden Ergebnis der Hinzufügung der galvanischen Koppelung sprechen kann. Nimmt man die Verstimmung h der Verstimmung von Tabelle I ähnlicher an, z. B. 1,0002 statt 1, so werden K_g und

und δ' weniger groß, wenn auch größer als in Tabelle I. Doch ist der sichtbare Nutzen hier in jedem Falle gering.

2. *Dämpfungen der Teilsysteme einander gleich*, ($\varepsilon = 1$).

Im Fall I A war dies ein Grenzfall, bei dem die Koppelung sehr klein ist und die Dämpfung ganz plötzlich (unstetig) von Null auf den endlichen Wert 0,7 emporschnellt, wenn man die Verstimmung h von Null an wachsen läßt. In unmittelbarer Nähe dieser Stelle $h = 0$ sind die Verhältnisse also sehr labil.

Auch im Fall III A war $\varepsilon = 1$ ein Grenzfall, bei dem die Koppelung Null ist. (Da für III A immer $\varepsilon = h$ sein muß, so ist für $\varepsilon = 1$ auch $h = 1$ zu setzen.)

Hier im Fall IV A liegen die Verhältnisse nicht viel günstiger. Setzt man bei $\varepsilon = 1$ auch die Verstimmung $h = 1$, so wird

$$(92)\qquad \begin{cases} K_o = \frac{1}{K_e}\left(1 - \sqrt{1 - K_e^2}\right) \\ \quad = \frac{K_e}{2}\left(1 + \frac{1}{4}K_e^2 + \frac{1}{8}K_e^4 + \ldots\right), \\ \frac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{\frac{K_e}{2K_o}}; \qquad \frac{\delta'}{n_1} = \sqrt{\frac{K_e}{2K_o}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - K_e^2}}. \end{cases}$$

Also: K_o wächst von 0 bis 1, wenn K_e von 0 bis 1 zunimmt, wobei es für kleine K_e annähernd gleich $1/2\,K_e$ ist. Infolgedessen bewegt sich δ_1/n_1 dabei zwischen den Grenzen 1 (für $K_e = 0$) und $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$ (für $K_e = 1$); δ'/n_1 ebenso zwischen den Grenzen 1 und ∞. Es ergeben sich also außerordentlich starke Dämpfungen, die die resultierenden Systeme unbrauchbar machen.

Ähnliche Werte erhält man auch, wenn h nicht genau gleich 1 ist. Vollen Aufschluß über das Verhalten aller Größen kann jedoch nur eine nähere Untersuchung bringen, die hier zu weit führen würde.

Da die gemischte magnetische und galvanische Koppelung sehr vielfach angewandt wird (offenbar immer, wenn beide Kreise auf längere Strecken leitend miteinander verbunden sind), so ist eine besondere Untersuchung wohl angebracht.

V. Gleichzeitig magnetische und elektrische (Beschleunigungs- und Kraftkoppelung).

§ 19. Die Bedingungsgleichungen. Die Koppelungskoeffizienten sind

ϱ_1, ϱ_2, ϑ_1, ϑ_2 von Null verschieden; $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung

$$(93)\quad \begin{cases} a_3 = \dfrac{2(\delta_1+\delta_2)}{1-\varrho_1\varrho_2} = \dfrac{2\delta_1}{n_1}\dfrac{1+\varepsilon}{1-K_\varrho^2}n_1, \\ a_2 = \dfrac{n_1^2+n_2^2+4\delta_1\delta_2-\varrho_2 n_1^2\vartheta_1-\varrho_1 n_2^2\vartheta_2}{1-\varrho_1\varrho_2} \\ \quad = \dfrac{1+h^2+\dfrac{4\varepsilon\delta_1^2}{n_1^2}-\varrho_2\vartheta_1-h^2\varrho_1\vartheta_2}{1-K_\varrho^2}n_1^2, \\ a_1 = \dfrac{2(\delta_2 n_1^2+\delta_1 n_2^2)}{1-\varrho_1\varrho_2} = \dfrac{2\delta_1}{n_1}\dfrac{h^2+\varepsilon}{1-K_\varrho^2}n_1^3, \\ a_0 = \dfrac{n_1^2 n_2^2(1-\vartheta_1\vartheta_2)}{1-\varrho_1\varrho_2} = \dfrac{h^2(1-K_\vartheta^2)}{1-K_\varrho^2}n_1^4. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden

$$(94)\quad \begin{cases} \dfrac{2\varkappa n_1 n_2\sqrt{1-\vartheta_1\vartheta_2}}{\sqrt{1-\varrho_1\varrho_2}} = \dfrac{n_1^2+n_2^2+4\delta_1\delta_2-\varrho_2 n_1^2\vartheta_1-\varrho_1 n_2^2\vartheta_2}{1-\varrho_1\varrho_2} \\ \qquad\qquad -\dfrac{(\delta_1+\delta_2)^2}{(1-\varrho_1\varrho_2)^2}, \end{cases}$$

$$(95)\quad \frac{2\varkappa n_1 n_2\sqrt{1-\vartheta_1\vartheta_2}}{\sqrt{1-\varrho_1\varrho_2}} = \frac{2(\delta_2 n_1^2+\delta_1 n_2^2)}{\delta_1+\delta_2},$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen ε und h

$$(94\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{2\varkappa h n_1^2\sqrt{1-K_\vartheta^2}}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} = \\ \dfrac{(1+h^2)n_1^2+4\varepsilon\delta_1^2-(\varrho_2\vartheta_1+h^2\varrho_1\vartheta_2)n_1^2}{1-K_\varrho^2} - \dfrac{\delta_1^2(1+\varepsilon)^2}{n_1^2(1-K_\varrho^2)^2}, \end{cases}$$

$$(95\,a)\quad \frac{2\varkappa h n_1^2\sqrt{1-K_\vartheta^2}}{\sqrt{1-K_\varrho^2}} = \frac{2(h^2+\varepsilon)n_1^2}{1+\varepsilon}.$$

Hier sind außer ε, h, K_ϱ und K_ϑ auch wieder Produkte der Wienschen Koeffizienten vorhanden, nämlich $\varrho_2\,\vartheta_1$ und $\varrho_1\,\vartheta_2$. Diese lassen sich auch wieder auf die gewöhnlichen Koppelungskoeffizienten zurückführen, wenn man die Gleichungen (59) benutzt, die für elektromagnetische Schwingungs-

kreise abgeleitet sind, aber auch für analoge mechanische Systeme gelten. Danach wird

$$\varrho_2 \vartheta_1 = \varrho_1 \vartheta_2 h_2 = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2 \vartheta_1 \vartheta_2 h^2} = h K_\varrho K_\phi . \tag{96}$$

Mit Benutzung dieser Beziehung ergibt sich weiter

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2 \varkappa h \sqrt{1 - K_\phi^2}}{\sqrt{1 - K_\varrho^2}} &= \frac{1 + h^2 - 2 h K_\varrho K_\phi + \frac{4 \varepsilon h_1^2}{n_1^2}}{1 - K_\varrho^2} \\ &\quad - \frac{\delta_1^2 (1 + \varepsilon)^2}{n_1^2 (1 - K_\varrho^2)} , \end{aligned} \right. \tag{94 b}$$

$$\frac{2 \varkappa h \sqrt{1 - K_\phi^2}}{\sqrt{1 - K_\varrho^2}} = \frac{2 (h^2 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon} . \tag{95 b}$$

Wie im Fall IV ist auch hier außer h und ε noch einer der Koppelungskoeffizienten (K_ϱ oder K_ϕ) willkürlich wählbar; am zweckmäßigsten wohl wieder K_ϱ. Dann wird der andere

$$K_\phi = \sqrt{1 - \frac{(h^2 + \varepsilon)^2 (1 - K_\varrho^2)}{\varkappa^2 h^2 (1 + \varepsilon)^2}} . \tag{97}$$

Zur Berechnung von δ_1/n_1 hat man diesen Wert von K_ϕ in (94 b) einzusetzen; man kann jedoch letztere Gleichung vorher noch durch Kombination mit (95 b) zweckentsprechend umformen und erhält

$$\frac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{\frac{(1 - K_\varrho^2)^2}{(1 + \varepsilon)^2 - 4 \varepsilon (1 - K_\varrho^2)} \left(\frac{1 + h^2 - 2 h K_\varrho K_\phi}{1 - K_\varrho^2} - \frac{2 (h^2 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon} \right)} . \tag{98}$$

§ 20. Der Unterfall VA ($\varkappa = 1$). Der Unterfall völliger Einwelligkeit mit gleichen Frequenzen und Dämpfungen beider Koppelungswellen ist hier leicht zu verwirklichen. Die erforderlichen Werte K_ϕ und δ_1/n_1 erhält man aus den allgemeinen Gleichungen (97) und (98), indem man daselbst überall $\varkappa = 1$ setzt. Dazu kommen die Werte der Dämpfung und der Frequenz dieser Koppelungsschwingungen, die besonders zu berechnen sind und ergeben:

$$\frac{\delta'}{n_1} = \frac{\delta_1}{n_1} \frac{1 + \varepsilon}{2 (1 - K_\varrho^2)} , \tag{99}$$

$$\frac{\nu'}{n_1} = \sqrt{\frac{h^2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} - \frac{\delta_1^2 (1 + \varepsilon)^2}{n_1^2 4 (1 - K_\varrho^2)^2}} = \sqrt{\frac{h^2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} - \frac{\delta'^2}{n_1^2}} . \tag{100}$$

Diese beiden Werte gehen natürlich in die Werte (45) des Falles I (nur magnetische Koppelung) über, wenn $K_\phi = 0$ gemacht wird, indem man K_ϱ gleich dem Werte von Gleichung

(41) der ersten Veröffentlichung wählt; sie gehen ebenso in die Werte (73) und (74) des Falles II (nur elektrische Koppelung) über, wenn man $K_e = 0$ wählt, wodurch K_ϑ den Wert von Gleichung (71) erhält.

Um für diejenigen Fälle, wo beide Koppelungen nebeneinander mit endlichen Werten vertreten sind, einen Überblick über den Verlauf der charakteristischen Systemgröße zu gewinnen, bleibt hier im allgemeinen nichts anderes übrig, als die Zahlenwerte derselben für eine Anzahl von unabhängig variablen Werten zu berechnen; das bedeutet natürlich eine große Rechenarbeit, da drei unabhängige Variablen zu berücksichtigen sind, z. B. ε, h und K_e. Eine Anzahl so berechneter Werte sind in den Tabellen V bis VI enthalten, Die Anordnung derselben ist derjenigen der früheren Tabellen für einfache Koppelung möglichst ähnlich gemacht. Als Eingang ist in der ersten Spalte auch wieder die Verstimmung (das Frequenzverhältnis) $h = n_2/n_1$ der ungedämpften Frequenzen der Teilsysteme gewählt; die folgenden Spalten enthalten in der gleichen Aufeinanderfolge wie dort den Koppelungskoeffizienten (hier den elektrischen K_ϑ), Dämpfungen δ, Dekremente $\mathfrak{d}$ und Kreisfrequenzen ν der ungekoppelten Teilsysteme und des Koppelungssystems. Während aber früher eine und dieselbe Tabelle Untergruppen für verschiedene Werte von ε (des Verhältnisses der Dämpfungen δ_2 und δ_1 der Teilsysteme) enthielt, ist jetzt umgekehrt für jedes ε eine besondere Tabelle erforderlich mit Untergruppen für je einen konstanten Wert des magnetischen Koppelungskoeffizienten K_e, der als dritte unabhängige Variable benutzt wird.

Von den in den früheren Tabellen (z. B. Tab. I oder III) der Rechnung zugrunde gelegten Werten ε (nämlich 0; 0,1; 0,5; 0,99; 1; 1,01; 2; 10; ∞) sind hier aber nur die Werte $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ als Extremwerte benutzt worden (sehr verschiedene Dämpfung und gleiche Dämpfung der Teilsysteme). Aus den Werten für $\varepsilon = 0$ lassen sich übrigens die für $\varepsilon = \infty$ leicht ableiten. Um zu zeigen, daß man hier die Gesamtkoppelung viel fester nehmen kann als bei einfacher Koppelung, ohne zu starke Dämpfungen zu bekommen, sind für die einzelnen Tabellen, die eine Gruppe mit konstantem ε bilden, die K_e-Werte (magnetische Koppelung) 0,1 und 0,2 gewählt.

Die hier mitgeteilte kleine Auswahl von Tabellenwerten lehrt folgendes:

§ 21. Möglichkeit geringer Dämpfung bei fester Koppelung.

1. *Ist $\varepsilon = \delta_2/\delta_1$ von 1 verschieden, so kann man zwar die Systeme vom Einklang aus nach beiden Seiten hin verstimmen, d. h. man kann h größer oder kleiner als 1 wählen, jedoch nach der einen Seite nur so weit, bis K_ϱ Null wird.* Darüber hinaus müßte K_ϱ nach Gl (97) imaginär werden, was physikalisch unzulässig ist; nach der anderen Seite ist die Verstimmung beliebig weit möglich.

Für Werte $\varepsilon < 1$ liegt diese Grenze auf der Seite der h, die > 1 sind; für $\varepsilon > 1$ würde sie auf der Seite der $h < 1$ liegen. Mit anderen Worten:

Das schwächer gedämpfte Teilsystem kann beliebig kleinere Frequenz erhalten als das andere ($0 < h \leqq 1$); größere Frequenzen ($h > 1$) sind für dasselbe aber nur bis zu einem Grenzwert zulässig, der von dem Wert des Koppelungskoeffizienten K abhängt und mit diesem selber wächst.

Beispielsweise liegt für $K_e = 0{,}02$ der Grenzwert der Verstimmung zwischen 1,0002 und 1,0003, also in allernächster Nähe der Resonanzstelle $h = 1$, während er für $K_e = 0{,}2$ erst zwischen 1,020 und 1,021 liegt, wenn die Dämpfungen δ_2 und δ_1 extrem verschieden sind ($\varepsilon = 0$).

2. Der elektrische Koeffizient K_ϱ steigt vom Werte Null, der an dieser Grenzstelle gilt, bei fortschreitender Verstimmung nach entgegengesetzter Richtung dauernd an; bei $h = 1$ ist er gleich dem magnetischen K_e und steigt dann weiter über diesen. Doch werden wesentlich höhere Werte als der angenommene Wert K_e erst bei Verstimmungen erreicht, die über das gewöhnliche Maß hinausgehen. *Man kann normalerweise mit einem K_ϱ von gleicher Größenordnung rechnen wie K_e.*

3. *Die bei gegebenem ε und gegebenem K_e zu wählenden Dämpfungen der Teilsysteme sind für $h = 1$ sämtlich gleich Null*; mit dieser Einstellung der Frequenzen (Einklang) ist also kein einwelliges System herstellbar. *Mit wachsender Verstimmung (beiderseits) nimmt die erforderliche Dämpfung für beide Teilsysteme zu.* In dem extremen Fall $\varepsilon = 0$ bleibt δ_2 allerdings zahlenmäßig gleich Null; das bedeutet aber nur, daß δ_2 hier

Tabelle V.

Magnetische und elektrische (Beschleunigungs- und Kraftkoppelung). $s = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0$.

K_ϱ	$h = \frac{n_2}{n_1}$	K_φ	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	b_1	b_2	$\frac{\nu_1}{n_1}$	$\frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	b'	$\frac{\nu'}{n_1}$
0,1	0,98	0,2218	0,12320	0	0,78004	0	0,992382	0,98	0,06222	0,39974	0,978023
	0,99	0,1723	0,07330	0	0,46181	0	0,997310	0,99	0,03702	0,23513	0,989308
	0,998	0,1181	0,01824	0	0,11464	0	0,999834	0,998	0,00921	0,05800	0,997958
	0,999	0,1094	0,00950	0	0,05969	0	0,999955	0,999	0,00480	0,03018	0,998989
	0,9998	0,1020	0,00197	0	0,01238	0	0,999998	0,9998	0,00100	0,00625	0,999795
	0,9999	0,1010	0,00099	0	0,00622	0	0,999999	0,9999	0,00050	0,00314	0,999900
	1	0,1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1,0001	0,0990	0,00100	0	0,00628	0	0,999999	1,0001	0,00051	0,00317	1,000100
	1,0002	0,0980	0,00201	0	0,01263	0	0,999998	1,0002	0,00102	0,00638	1,000200
	1,001	0,0895	0,01050	0	0,06596	0	0,999945	1,001	0,00530	0,03328	1,000986
	1,002	0,0777	0,02240	0	0,14075	0	0,999749	1,002	0,01131	0,07093	1,001936
	1,005	0,0087	0,09137	0	0,57649	0	0,995809	1,005	0,04614	0,28880	1,003940
	1,006	imaginär	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,2	0,98	0,2793	0,08163	0	0,51462	0	0,996663	0,98	0,04252	0,27284	0,979077
	0,99	0,2431	0,04420	0	0,27800	0	0,999023	0,99	0,02302	0,14615	0,989732
	0,998	0,2094	0,00957	0	0,06015	0	0,999954	0,998	0,00499	0,03132	0,997988
	0,999	0,2047	0,00484	0	0,03042	0	0,999988	0,999	0,00252	0,01585	0,998970
	0,9998	0,2010	0,00098	0	0,00614	0	0,999999	0,9998	0,00051	0,00320	0,999800
	0,9999	0,2005	0,00049	0	0,00307	0	1,000000	0,9999	0,00025	0,00160	0,999900
	1	0,2	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1,0001	0,1995	0,00049	0	0,00308	0	1,000000	1,0001	0,00026	0,00160	1,000100
	1,0002	0,1990	0,00098	0	0,00618	0	0,999999	1,0002	0,00051	0,00322	1,000200
	1,001	0,1951	0,00496	0	0,03116	0	0,999988	1,001	0,00258	0,01621	1,000997
	1,002	0,1901	0,01005	0	0,06312	0	0,999950	1,002	0,00523	0,03281	1,001988
	1,01	0,1439	0,05694	0	0,35833	0	0,998378	1,01	0,02965	0,18466	1,009564
	1,02	0,0849	0,16571	0	1,05591	0	0,986064	1,02	0,08631	0,53357	1,016837
	1,021	imaginär	—	—	—	—	—	—	—	—	—

immer sehr klein gegen δ_1 bleibt, es wächst aber mit wachsendem δ_1.

In unmittelbarer Umgebung der Resonanzstelle $h = 1$ sind beide Dämpfungen sehr klein, und zwar um so kleiner, je kleiner die vorgegebene Koppelung K_e ist.

Wegen der Kleinheit der erforderlichen Dämpfungen beider Teilsysteme ist es hier schwierig, mit sehr geringer Verstimmung und loser Koppelung Einwelligkeit zu erzielen. Dies wird um so leichter, je fester man die Koppelung K_e macht und je weiter man verstimmt. Hier zeigen sich bedeutende Vorteile der gemischten Koppelung gegenüber den einfachen Koppelungen.

Die resultierende Dämpfung δ' des Koppelungssystems ist von derselben Größenordnung wie die der Teilsysteme; im besonderen bei $\varepsilon = 0$ ist sie näherungsweise halb so groß wie die des Teilsystems 1 (b' annähernd $= {}^1/_2\, b_1$),

Tabelle VI.

Magnetische und elektrische (Beschleunigungs- und Kraft-) Koppelung.

$$\varepsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 1.$$

K_e	$h = \frac{n_2}{n_1}$	K_e	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	b_1	b_2	$\frac{\nu_1}{n_1}$	$\frac{\nu_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	b'	$\frac{\nu'}{n_1}$
0,1	0,99	0,099499	0,04981	0,04981	0,31338	0,31652	0,998758	0,988771	0,05032	0,31814	0,993739
	0,999	0,099995	0,00498	0,00498	0,03127	0,03131	0,999988	0,998988	0,00503	0,03161	0,999487
	1	0,1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1,001	0,099995	0,00498	0,00498	0,03131	0,03127	0,999988	1,000988	0,00503	0,03161	1,000487
	1,01	0,099509	0,04981	0,04981	0,31385	0,31022	0,998759	1,008746	0,05031	0,31494	1,003752
0,2	0,99	0,199757	0,02450	0,02450	0,15401	0,15555	0,999700	0,989697	0,02552	0,16123	0,994685
	0,999	0,199998	0,00247	0,00247	0,01549	0,01551	0,999997	0,998997	0,00257	0,01614	0,999497
	1	0,2	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1,001	0,199998	0,00245	0,00245	0,01540	0,01538	0,999997	1,000997	0,00255	0,01603	1,000497
	1,01	0,199762	0,02450	0,02450	0,15399	0,15245	0,999700	1,009700	0,02552	0,15979	1,008532

für $\varepsilon = \infty$ würde dasselbe mit Bezug auf Teilsystem 2 gelten.

4. *Ist $\varepsilon = 1$, sind also beide Teilsysteme gleich stark gedämpft, so haben die Koppelungskoeffizienten und die Dämpfungen annähernd dieselben Werte wie für $\varepsilon = 0$ bei gleichem K_ϱ.* In der Umgebung der Resonanzstelle hat K_ϑ annähernd den Wert wie K_ϱ und die Dämpfungen steigen von Null an. Bei einer Verstimmung von $^1/_{100}$ (ein Hundertstel) ist das log. Dekrement der beiden Teilsysteme etwa 0,15 und das resultierende Dekrement ebenfalls, bei $^1/_{1000}$ (ein Tausendstel) Verstimmung ist es etwa 0,016.

VI. Gleichzeitig galvanische und elektrische (Widerstands- und Kraftkoppelung) vorhanden.

§ 22. Die Bedingungsgleichungen. Die Koppelungskoeffizienten sind $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, σ_1, σ_2, ϑ_1, ϑ_2 von Null verschieden. Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung:

$$(101)\quad \begin{cases} a_3 = 2(\delta_1 + \delta_2) = \dfrac{\delta_1}{n_1}(1+\varepsilon)n_1, \\ a_2 = n_1^2 + n_2^2 + 4\delta_1\delta_2(1 - \sigma_1\sigma_2) \\ \qquad\quad = \left[1 + h^2 + \dfrac{4\delta_1^2\varepsilon}{n_1^2}(1 - K_\sigma^2)\right] n_1^2, \\ a_1 = 2(\delta_2 n_1^2 + \delta_1 n_2^2 - \delta_2\sigma_2 n_1^2\vartheta_1 - \delta_1\sigma_1 n_2^2\vartheta_2), \\ a_0 = n_1^2 n_2^2(1 - \vartheta_1\vartheta_2) = h^2(1 - K_\vartheta^2) n_1^4. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) geben:

$$(102)\quad 2\varkappa n_1 n_2 \sqrt{1 - K_\vartheta^2} = n_1^2 + n_2^2 + 4\delta_1\delta_2(1 - K_\sigma^2) - (\delta_1 + \delta_2)^2,$$

$$(103)\quad 2\varkappa n_1 n_2(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{1 - K_\vartheta^2} = 2(\delta_2 n_1^2 + \delta_1 n_2^2 - \delta_2\sigma_2 n_1^2\vartheta_1 - \delta_1\sigma_1 n_2^2\vartheta_2).$$

Diese Gleichungen werden bei Einführung der Bezeichnungen $K_\sigma = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, $K_\vartheta = \sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}$, $\delta_2 = \varepsilon\delta_1$, $n_2 = h n_1$:

$$(102a)\quad \begin{cases} 2\varkappa h n_1^2 \sqrt{1 - K_\vartheta^2} = n_1^2(1 + h^2) + 4\varepsilon\delta_1^2(1 - K_\sigma^2) \\ \qquad\qquad - \delta_1^2(1+\varepsilon)^2, \end{cases}$$

$$(103a)\quad 2\varkappa h n_1^2\delta_1(1+\varepsilon)\sqrt{1 - K_\vartheta^2} = 2\delta_1 n_1^2\left[h^2 + \varepsilon - 2h\sqrt{\varepsilon}K_\sigma K_\vartheta\right].$$

Auch hier ist wieder außer h und ε noch eine dritte Größe, etwa K_ϑ frei wählbar. Und damit folgt:

$$K_\sigma = \frac{h^2 + \varepsilon - \varkappa h(1+\varepsilon)\sqrt{1-K_\varphi^2}}{2h K_\varphi \sqrt{\varepsilon}}, \tag{104}$$

$$\frac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{\frac{2\varkappa h\sqrt{1-K_\varphi^2} - (h^2+1)}{4\varepsilon(1-K_\sigma^2) - (1+\varepsilon)^2}}. \tag{105}$$

Aus (104) folgt, daß in allen drei Fällen A, B und C, also für $\varkappa \gtreqless 1$, ε weder Null noch ∞ sein darf, daß also die Teilsysteme nicht sehr verschieden starke Dämpfungen haben dürfen, wenn nicht noch zwischen h, $\varkappa$ und K_φ bestimmte Beziehungen bestehen. Diese sind:

$$\begin{cases} \text{für } \varepsilon = 0 \quad \text{muß } h - \varkappa\sqrt{1-K_\varphi^2} = 0, \\ \text{für } \varepsilon = \infty \text{ muß } 1 - \varkappa h\sqrt{1-K_\varphi^2} = 0 \end{cases} \tag{106}$$

sein. Dabei wird dann nach einigen Umformungen

$$\text{für } \varepsilon = 0 \qquad \frac{\delta_1}{n_1} = \sqrt{1-\varkappa^2+\varkappa^2 K_\varphi^2},$$

$$\text{für } \varepsilon = \infty \qquad \frac{\delta_1}{n_1} = 0.$$

Für $K_\varphi = 0$ erhält man aus den Gleichungen wieder den Fall III der alleinigen galvanischen Koppelung, für $K_\sigma = 0$ dagegen den Fall II der elektrischen Koppelung.

§ 23. Der Unterfall VI A ($\varkappa = 1$). Für vollkommene Einwelligkeit erhält man aus (104) und (105) die Bedingungen:

$$K_\sigma = \frac{h^2 + \varepsilon - h(1+\varepsilon)\sqrt{1-K_\varphi^2}}{2h K_\varphi \sqrt{\varepsilon}}, \tag{107}$$

$$\frac{\delta_1}{n_1} = \frac{\left(h + \frac{1}{h}\right) - 2\sqrt{1-K_\varphi^2}}{\frac{1}{h}[(1-\varepsilon)^2 + 4\varepsilon K_\sigma^2]}. \tag{108}$$

Weiter folgt aus den bekannten Gleichungen:

$$\frac{\delta'}{n_1} = \frac{\delta_1}{n_1}\,\frac{1+\varepsilon}{2}, \tag{109}$$

$$\frac{\nu'}{n_1} = \sqrt{h\sqrt{1-K_\varphi^2} - \frac{\delta_1^2}{n_1^2}\,\frac{(1+\varepsilon)^2}{4}}. \tag{110}$$

Um kleine Dämpfungen δ_1 und damit auch kleine resultierende Dämpfungen δ' zu bekommen, muß man den Zähler von (108) klein machen. Er wird Null in einem Grenzfall, nämlich wenn $h + \frac{1}{h} = 2\sqrt{1-K_\varphi^2}$ ist. Dies kann aber nur

geschehen, wie sich leicht nachweisen läßt, wenn gleichzeitig $K_\phi = 0$ und $h = 1$ ist, denn $h + \frac{1}{h}$ hat seinen *kleinsten* Wert 2 für $h = 1$, sonst ist es größer, $2\sqrt{1 - K_\phi^2}$ dagegen hat seinen *größten* Wert 2 für $K_\phi = 0$, sonst ist es kleiner; nur am Punkte $h = 1$, $K_\phi = 0$ kommen beide Werte zusammen.

Verhältnismäßig einfach lassen sich die Koppelungen K_ε und die Dämpfungen δ_1 der Größenordnung nach für den Fall bestimmen, wenn die Verstimmung der Teilsysteme gleich Null gemacht wird, d. h. für $h = 1$. Man erhält:

$$\text{Größenordnung von } K_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} K_\phi, & \text{wenn } \varepsilon < 1, \\ \frac{1}{2} K_\phi, & \text{wenn } \varepsilon = 1, \\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4} K_\phi, & \text{wenn } \varepsilon > 1, \end{cases}$$

$$\text{Größenordnung von } \frac{\delta_1}{n_1} = \begin{cases} K_\phi, & \text{wenn } \varepsilon < 1, \\ \sqrt{1 + \frac{1}{4} K_\phi^2}, & \text{wenn } \varepsilon = 1, \\ \frac{K_\phi}{\varepsilon}, & \text{wenn } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Einen vollständigen Überblick erhält man durch zahlenmäßige Berechnung bestimmter Fälle, wie dies z. B. in den Tabellen der vorhergehenden Paragraphen für die anderen Koppelungsarten geschehen ist. Es dürfte aber kaum lohnen, diese umständliche Arbeit in größerer Ausdehnung auszuführen, da der Fall der galvanisch-elektrischen Koppelung ohne gleichzeitige magnetische Koppelung kaum praktisch verwirklicht ist und zurzeit keine besondere Bedeutung hat.

VII. Gleichzeitig alle drei Koppelungen (magnetische, galvanische, elektrische).

§ 24. Zweifellos birgt dieser allgemeinste Koppelungsfall interessante und wichtige, für die Praxis bedeutungsvolle Einzelheiten in sich. Da man aber bei seiner Behandlung die unverkürzten Werte der Koeffizienten $a_0 \ldots a_3$ von Gleichung (32) mit allen drei Koppelungsparametern K_ε, K_σ, K_ϕ zu benutzen hat, so werden die Verhältnisse sehr unübersichtlich. Die Mannigfaltigkeit der möglichen Veränderungen ist wegen der

5 Variablen (ε, δ, K_φ, K_σ, K_ϑ) die auch nur durch die bisherigen zwei Bedingungsgleichungen (15) und (16) zusammengehalten werden, so groß, daß eine kurze Behandlung unmöglich erscheint. Man kann nur folgendes feststellen:

Sind die drei Koppelungen annähernd gleich stark, so gilt das soeben Gesagte in vollem Umfange.

Ist aber eine oder sind gar zwei Koppelungen wesentlich schwächer vertreten, so nähert sich das System jeweils einem der in dieser Arbeit behandelten Systeme mit gemischter oder einfacher Koppelung und man kann die hier aufgestellten Gesetze mit gewisser Annäherung auf das allgemeine System anwenden. Wie weit das berechtigt ist, muß die Erfahrung lehren.

Zusammenfassung.

Auf Grund der in der ersten Veröffentlichung abgeleiteten Bedingungen für die Einwelligkeit gekoppelter, aus zwei Teilsystemen zusammengesetzter Schwingungssysteme werden außer der magnetischen (Beschleunigungs-) Koppelung andere mögliche Koppelungsarten, insbesondere auch gemischte Koppelungen bezüglich der Herstellung einwelliger Systeme untersucht. Formeln und Zahlenmaterial in Tabellenform zur Beurteilung der Wirkungsweise derselben werden mitgeteilt.

Danzig-Langfuhr, Technische Hochschule, Juli 1922.

(Eingegangen 17. Juli 1922.)

4. *Über Dampfdruckmessungen an reinem Argon; von Fritz Born.*[1])

Dampfdruckmessungen an festem und flüssigem Argon sind früher bereits von Ramsay und Travers[2]) und dann genauer von C. A. Crommelin[3]) angestellt worden. Die Messungen von Ramsay und Travers haben nur provisorischen Charakter. Jedoch auch die Resultate Crommelins sind offenbar — auch noch in der zweiten Arbeit — durch eine Fehlerquelle entstellt; denn die aus seiner Dampfdruckkurve errechneten Verdampfungswärmen des festen Argons sind mit den hierfür von Eucken kalorimetrisch bestimmten Werten (Verdampfungswärme + Schmelzwärme) nicht in Einklang zu bringen. Da der Fehler sich hauptsächlich bei den tiefsten von ihm erreichten Temperaturen (— 205°) bemerkbar macht, so ist, wie W. Nernst in einer eingehenden Untersuchung der Crommelinschen Resultate[4]) bemerkt, eine Verunreinigung durch ein Gas mit hohem Dampfdruck, vielleicht Neon, wahrscheinlich. Es erschien daher bei dem großen theoretischen Interesse, das die einatomigen Gase bieten, erwünscht, die Messungen an Argon von hoher Reinheit zu wiederholen,[5]) um die Unstimmigkeit in der Verdampfungswärme des Argons aufzuklären und um festzustellen, ob die wahre chemische Konstante, deren Wert sich aus den Crommelinschen Messungen und den Euckenschen Atomwärmen des Argons noch stark abweichend von der Theorie ergibt, mit dem aus der Stern-Sackurschen Theorie folgenden Werte übereinstimmt.

1) Inaugural-Dissertation, Berlin 1922.

2) W. Ramsay u. M. W. Travers, Zeitschr. f. physikal. Chem. 38. (6.) S. 641 ff. 1901.

3) C. A. Crommelin, Communications of the University of Leyden, Nr. 138c und Nr. 140a.

4) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. 23. S. 185 ff. 1916.

5) W. Nernst, a. a. O. S. 189.

I. Reinigung des Argons durch Leiten über glühendes Calcium.

Bei der Aufstellung der Apparatur standen mir die Erfahrungen von L. Hock zur Verfügung, der eine weitgehende Reinigung von Argon bereits im Jahre 1913 in Angriff genommen hatte.[1])

Mit der in Fig. 1 schematisch dargestellten Apparatur wurde der erste Teil der Reinigung durchgeführt.

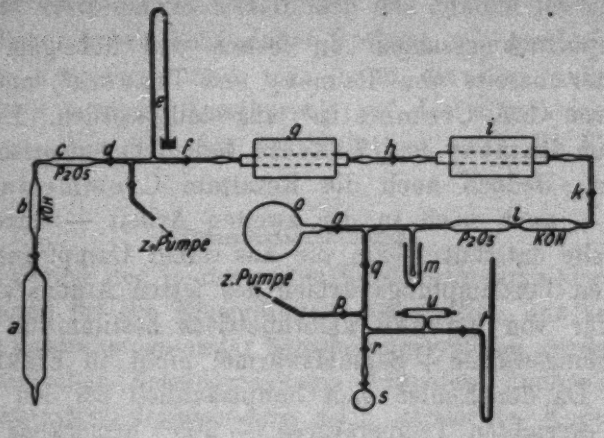


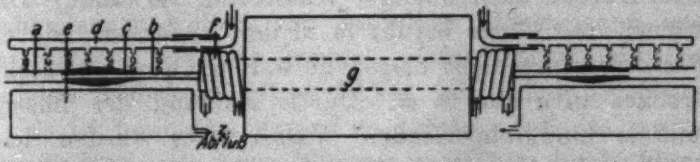
Fig. 1.

Von der Firma Griesheim-Elektron wurde ein Rohgas bezogen, das frei ist von anderen Edelgasen, insbesondere von Neon. Das Gas wird hergestellt nach einem Patentverfahren, D. R. P. 295572, bei dem durch Rektifikation flüssiger Luft erhaltener Sauerstoff, der etwa 2 Proz. Argon und 1 Proz. Stickstoff enthält, mit Wasserstoff oder anderen Brennstoffen in geschlossenen Räumen verbrannt wird. Das Gas hatte die Dampfdichte 37,30, so daß also noch argonfremde Gase darin enthalten sein mußten. Es wurde festgestellt, daß dies in der Hauptsache Sauerstoff war, und zwar etwa 20 Proz.

Dieses Gas wurde nun aus dem Glasballon (*a*, Fig. 1), in dem es geliefert war, zwecks Trocknung durch je ein Rohr mit Ätzalkali und Phosphorpentoxyd (*b* und *c*) geleitet. Hinter dem Hahn *d* befindet sich der Anschluß zur Pumpe (Quecksilber-Diffussionspumpe nach Vollmer). Das Eintauchmano-

1) Er mußte seine Arbeiten bei Ausbruch des Weltkrieges aufgeben.

meter *e* gestattet die Prüfung des Gasdrucks beim Eintritt in den mit Calciumspänen gefüllten elektrisch geheizten Ofen *g*, den Fig. 2 mit Einzelheiten zeigt und in dem nun die Absorption von Stickstoff und Sauerstoff vor sich geht. Die Calciumspäne befinden sich in einem Stahlrohr (*g*, Fig. 2), das aus dem Ofen beiderseits etwa 5 cm herausragt. Um die herausragenden Enden ist eine Bleirohrschlange (*f*) gelegt, durch die Kühlwasser strömt. Die Calciumspäne wurden auf etwa 550 bis 600° C erhitzt. (Als Thermometer diente ein Thermoelement Pt-PtRh.) Über dem glühenden Calcium verblieb das Gas etwa 10—15 Minuten unter einem Druck von anfangs 650, zuletzt 200 mm. Am Manometer (*e*, Fig. 1) war, während das Gas



Die Pfeile zeigen die Richtung des fließenden Wassers an.

Fig. 2.

sich in dem Ofen befand, stets die der Absorption des Stickstoffes und Sauerstoffes entsprechende Druckabnahme zu beobachten. Die Absorption ging ziemlich rasch vonstatten; nach 4 Minuten, also nach etwa $^1/_3$ der oben genannten Zeit des Verbleibens im Ofen, war eine Druckabnahme bereits nicht mehr merklich.

Schwierig war die vakuumdichte Verkittung von Glasrohr (*a*, Fig. 2) und dem in die Stahlröhre hineinführenden Kupferrohr (*b*). Eine Reihe von Kitten, auch mit Glyzerin angerührte Bleiglätte, erwies sich nicht als genügend vakuumdicht, so daß schließlich Picein Anwendung fand. Da die Kittstellen (*c*, Fig. 2) sich trotz der um die Enden des Stahlrohres gelegten Kühlschlange noch über den Schmelzpunkt des Piceins erwärmten, wurden sie mittels einer aus mehrfach durchbohrtem engen Messingrohr bestehenden Brausevorrichtung (*d*, Fig. 2) dauernd mit kühlem Wasser bespült, das in darunter befindlichen Wasserbehältern (*e*, Fig. 2) aufgefangen und zum Abfluß geleitet wurde.

Da erfahrungsgemäß metallisches Calcium beim Erhitzen noch lange Zeit Wasserstoff abgibt, wurde zu dessen Beseitigung ein ebenso gebauter Ofen (*i*, Fig. 1) mit Kupferoxydfüllung angeschlossen, von dem Calciumofen *g* durch den Hahn *h* getrennt. In dem Kupferoxydofen verblieb das Gas weitere 10—15 Minuten, strömte dann nach Passierung des Hahnes *k* über Ätzalkali und Phosphorpentoxyd (*l*) zwecks Befreiung von dem durch Oxydation des Wasserstoffes entstandenen Wasser und wurde schließlich in dem Rohransatz *m*, der in flüssige Luft tauchte, kondensiert. Um eine günstige Ausnutzung der Apparatur zu erreichen, mußte hier soweit gekühlt werden, daß sich über dem verflüssigten, bzw. erstarrten Argon ein möglichst geringer Dampfdruck einstellte. (Zum Teil wurde zu diesem Zwecke auch flüssiger Wasserstoff verwandt.) Denn das Strömen des Gases beruht ja in der Apparatur, da eine Zirkuliervorrichtung nicht eingebaut war, auf dem Unterschied des Druckes in *a* und in *m*. Durch Kühlung der flüssigen Luft mittels hindurchperlenden Wasserstoffes wurden leicht -201^0, d. h. ein Argondampfdruck von 70—80 mm (abgelesen am Manometer *t*, Fig. 1) und damit ein Druckgefälle von anfänglich 600, zuletzt 150 mm zwischen *a* und *m* erreicht. Endlich wurde das Gas durch Öffnen des Hahnes *n* (Fig. 1) und Wegziehen des Dewargefäßes unter *m* in den Glasballon *o* geleitet, in dem es aufbewahrt wurde.[1])

Zur Orientierung über den Reinheitsgrad des einmalig so behandelten Argons wurden Dichtebestimmungen ausgeführt, die die Dichte 39,76 ergaben, und Dampfdruckmessungen angestellt.[2])

1) Anfänglich war an Stelle des Glasballons ein Gasometer benutzt worden, bei dem Paraffinöl als Sperrflüssigkeit diente. Trotzdem das Paraffinöl sorgfältig im Vakuum entlüftet worden war, stellte sich dennoch nach einiger Zeit heraus, daß das darüber aufbewahrte Gas wiederum Verunreinigungen enthielt, die hauptsächlich aus Sauerstoff bestanden. Es wurde durch Versuche qualitativ festgestellt, daß Sauerstoff in Paraffinöl sehr viel leichter löslich ist als Stickstoff und erst durch Erhitzen des Paraffinöls im Vakuum daraus entfernt, während Stickstoff durch Evakuieren bereits bei gewöhnlicher Temperatur praktisch völlig beseitigt werden kann.

2) Bevor das Griesheimer Gas zur Stelle war, war mit einem von der Firma Auer in einer kleinen Bombe unter etwa 4 Atm. Druck gelieferten Gase gearbeitet worden, das neben anderen Edelgasen 0,5 Proz.

II. Dichtebestimmung.

Die Dichtebestimmungen wurden in folgender Weise ausgeführt. An den Apparat war das Manometer *t* (Fig. 1), das zur Druckablesung bei der Einfüllung diente, und hinter dem Hahn *r* ein Schliff angeschmolzen, in den der mit Innenschliff und Hahn versehene Kolben *s* hineinpaßte. In Fig. 3 wird dieses Wägekölbchen noch einmal besonders dargestellt. Zur Erhöhung der Genauigkeit bei der Wägung ist bei möglichst großem Inhalt sein Eigengewicht möglichst gering zu halten. Zur Kompensierung des Luftauftriebs bei der Wägung wurde ein zugeschmolzener Kolben von denselben Dimensionen und fast dem gleichen Gewicht benutzt. Das Eigengewicht des verwendeten Kölbchens betrug 36,7 g, sein Inhalt 133,25 cm^3.

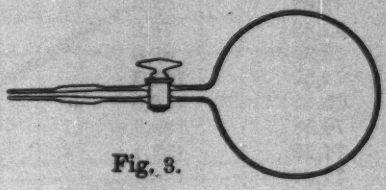


Fig. 3.

Es ist besonders darauf zu achten, daß das am Schliffe haftende Fett vor jeder Wägung sorgfältig durch Abwaschen mit Alkohol und Äther entfernt wird.

III. Orientierende Dampfdruckmessung.[1])

Die zur Orientierung über den erreichten Reinheitsgrad angestellten Dampfdruckmessungen ergaben eine gewisse Annäherung an die Werte Crommelins, und zwar waren die Dampfdrucke durchweg geringer als die von Crommelin gefundenen, wie Tab. 1 und Fig. 4 zeigen. Jedoch ist die Annäherung an die Crommelinsche Kurve bei den höheren Temperaturen unverkennbar.

Tab. 1 enthält die am Sauerstoffdampfdruckthermometer abgelesenen Dampfdrucke (Spalte 2) und die hieraus nach der

---

Sauerstoff und 19 Proz. Stickstoff enthielt. Die Dampfdichte wurde zu 37,53 ermittelt. Nachdem es in der beschriebenen Weise einmal über glühendes Calcium geleitet war, hatte es die Dampfdichte 39,52 bei einem Stickstoffgehalt von 2 Proz. Da dieser Stickstoff, sowie die übrigen Edelgase, sich in hohen Dampfdrucken bemerkbar machten, wurde mit dem Gase aus Griesheim weiter gearbeitet, das, wie weiter unten begründet werden wird, frei war von sonstigen Edelgasen, insbesondere von Neon.

1) Über die Ausführung vgl. Teil V und VI.

Tabelle 1.

1	2	3	4	5
T (0° C = 273,20°)	Dampfdruck des O_2-Thermometers mm	Argondampfdruck nach der ersten Reinigung mm	Argondampfdruck n. Crommelin (graph. interpoliert) mm	$p_{beob.} - p_{Cromm.}$ in %
71,67	63,0	74,4	76,8	− 3,1
72,82	76,8	92,4	96,0	− 3,7
73,30	83,0	100,6	104,4	− 3,8
74,50	101,3	126,0	129,5	− 2,6
75,42	116,8	145,1	150,6	− 3,2
76,58	139,7	176,5	180,5	− 2,2
77,29	155,1	197,5	201,0	− 1,6
77,93	170,1	217,8	221,0	− 1,5
78,57	186,6	239,4	241,8	− 1,0
80,78	252,5	331,9	333,7	− 0,54
81,44	275,4	366,1	368,0	− 0,52

v. Siemensschen Tabelle [1]) ermittelten Temperaturen (Spalte 1), wobei der Nullpunkt der absoluten Skala gemäß den neuen Untersuchungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt [2]) zu − 273,20° C. angenommen ist. In Spalte 3 stehen die Ergebnisse der Dampfdruckmessungen an dem einmal gereinigten Argon, in Spalte 4 die aus den Crommelinschen Messungen auf die gleiche Temperatur interpolierten Dampfdrucke. In Spalte 5 endlich finden sich die prozentischen Differenzen der in Spalte 3 und 4 verzeichneten Dampfdrucke.

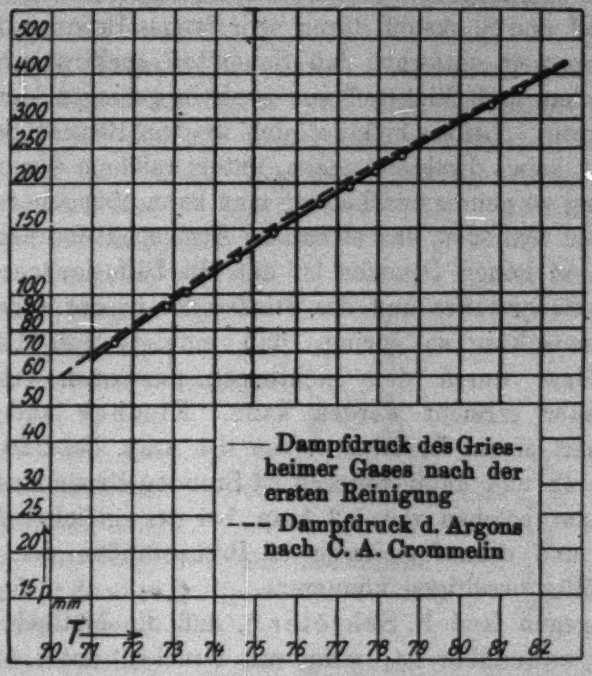
Die Form der Dampfdruckkurve ließ — neben dem genannten Ergebnis der Dichtebestimmung — vermuten, daß das Gas noch argonfremde Bestandteile enthielt. Es wurden deshalb Spektralaufnahmen des Gases bei verschiedenen Drucken gemacht, die die Anwesenheit von Sauerstoff und Stickstoff erwiesen. Dieser Befund ist ein neuer Beweis dafür, daß eine quantitative Absorption von Sauerstoff und Stickstoff durch glühendes Calcium nicht möglich ist.

---

1) H. v. Siemens, „Dampfdruckmessungen und Thermometrie bei tiefen Temperaturen". Berlin, bei Lonys u. Ann. d. Phys. 42. S. 871. 1913.

2) Zeitschr. f. Phys. 5. S. 285. 1921 und Tätigkeitsbericht der P.-T. R. in der Zeitschr. f. Elektrochem. 28. S. 249. 1922.

Es mußte nun also eine Methode gesucht werden, die die gänzliche Beseitigung des Stickstoffes und des Sauerstoffes ermöglichte.



Dampfdruckkurve des Argons nach einmaligem Überleiten über glühendes Calcium.

Fig. 4.

IV. Die Reinigung des Argons im Calciumlichtbogen.

Es ist bekannt, daß im Flammenbogen der Alkali- und Erdalkalimetalle Sauerstoff und Stickstoff sehr heftig absorbiert werden. Zur Reinigung von Edelgasen ist diese Erscheinung bisher nur selten verwandt worden. Die Herstellung von Natrium- und Kaliumelektroden ist sehr mühevoll und umständlich. Metallisches Calcium, das in der Industrie auf elektrochemischem Wege gewonnen wird, ist für diesen Zweck geeigneter, da es sich leicht zu stabförmigen Elektroden drehen läßt. Der Nachteil der weniger ausgiebigen Wirkung gegenüber den Alkalimetallen wird durch mancherlei Vorteile bei weitem aufgehoben.

Den Calciumlichtbogen haben schon Franz Fischer und George Iliovici zur Reinigung von Argon angewandt.[1]) In einem flaschenförmigen Gasometer von 6,71 Inhalt erzeugten sie einen Lichtbogen zwischen zwei Calciumstücken. Sie haben Sauerstoff und Stickstoff durch sehr langes Brennen des Lichtbogens so weit entfernt, daß Sauerstoff spektral nicht mehr nachweisbar und Stickstoff nur noch in geringen Mengen vorhanden war. Leider befindet sich in dem Bericht der beiden Forscher keine direkte Angabe, unter welchem Druck sie die Reinigung vorgenommen haben; man kann aber aus mancherlei Anzeichen schließen, daß es nahezu Atmosphärendruck gewesen ist. Bei so hohen Drucken ist nun die Diffusionsgeschwindigkeit des Sauerstoffes und des Stickstoffes in der vorwiegenden Argonatmosphäre so gering, daß eine restlose Beseitigung dieser Gase durch den Lichtbogen nur nach sehr langer Brenndauer erreicht werden kann. Fischer und Iliovici haben mit einem Lichtbogen von 0,4 Amp. bei 220 Volt mit zunächt 48 und dann weiteren 24 Stunden Brenndauer, darauf mit einem solchen von 1,2 Amp. bei der gleichen Spannung mit 24 und darauf weiteren 12 Brennstunden den Stickstoff nicht völlig beseitigen können.

Dagegen fand F. Schröter[2]), daß die Methode mit Vorteil nur anwendbar ist, wenn mit Drucken unter 15 mm gearbeitet wird, da die Stickstoffmoleküle dann eine größere mittlere Weglänge haben und das einzelne Stickstoffmolekül öfter in die Mitte der Zelle, zum Lichtbogen gelangt. Dann geht die Absorption auch verhältnismäßig rasch vor sich. Bei der vorliegenden Arbeit wurde der gesamte Reinigungsprozeß im Calciumlichtbogen bei 12—13 mm Druck mit einem Bogen von 2,0 Amp. und 220 Volt durchgeführt, der für die eine Stockthermometerfüllung 2 Stunden, für die andere 4 Stunden brannte. Die Dampfdruckmessungen an dem so gereinigten Gase beweisen, daß eine sehr weitgehende Absorption des Stickstoffes und Sauerstoffes erreicht worden ist.

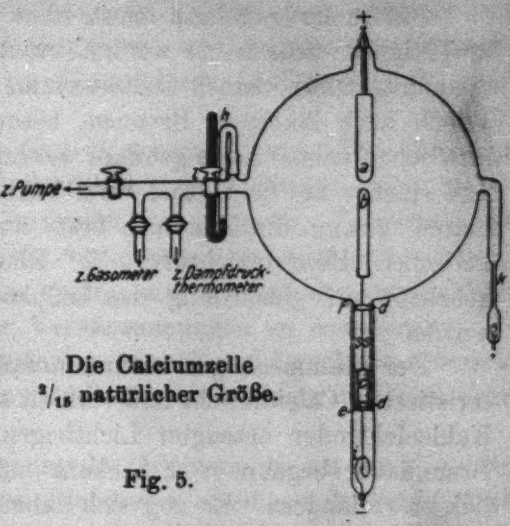
Da der Reinigungsprozeß unter dem genannten geringen Druck vorgenommen wurde, mußte der Zelle ein möglichst

1) F. Fischer u. G. Iliovici, Ber. d. Dtsch. Chem. Ges. 42. (1) S. 534—536. 1908.

2) Nach freundlichst gemachten mündlichen Mitteilungen.

großer Inhalt gegeben werden, um für die Füllung eines etwa 300 cm³ unter Normalbedingungen fassenden Dampfdruckthermometers nicht zu viele Füllungen der Zelle zu benötigen. Es wurde daher ein Glasballon von 5 l Inhalt gewählt, so daß vier Füllungen ausreichten.

Die Anode bestand aus einem Calciumstab von 15 mm Durchmesser und 8 cm Länge und hing an einem starken Messingdraht, auf den sie mittels eingeschnittener Gewinde aufgedreht war (*a*, Fig. 5). Ein angeschmolzenes enges Glasröhrchen, das den Messingdraht eng umschloß, verhinderte Pendelbewegungen der hängenden Anode. Die Kathode (*b*, Fig. 5) hatte dieselbe Länge bei 10 mm Stärke und war auf einen starken Messingdraht aufgesetzt, zunächst nur mit Hilfe eines Gewindes; da aber nach längerer Benutzung sich herausstellte, daß die Kathode infolge von starker Erwärmung sich trotz des Gewindes etwas senkte, wurde später ein kleiner Messingteller an den Messingdraht angelötet, auf den der Calciumstab aufgesetzt wurde. Die Kathode war mit Hilfe eines eingebauten Eisenkernes (*c*) nach Art der Differential-Bogenlampen mittels einer Magnetspule vertikal beweglich zwecks Zündung durch Berührung mit der Anode und Regulierung des Elektrodenabstandes nach längerer Brennzeit. Die Messingstäbchen, die Eisenkern und Kathode trugen, hatten zwei Führungen aus vier durchbohrten Messingplättchen, von denen je zwei eine starke Asbestplatte (*d*) einschlossen. Letztere waren genau und fest in die Glasröhre eingepaßt und dienten zur Befestigung des kleinen, durch vier Messingstäbchen (*s*) und die beiden Führungsplatten (*d*) gebildeten Führungsgestells in der Glasröhre. Ein unter die untere Platte gelegter Spann-



Die Calciumzelle
$^2/_{15}$ natürlicher Größe.

Fig. 5.

ring (*e*) verhinderte außerdem ein Senken, einige über die obere Platte greifende Glasnasen (*f*) ein Hineinstoßen des Gestells in den Zellenraum. Kupferlitzendraht (*i*) verband den beweglichen Teil mit dem eingeschmolzenen Platindraht.

An der Zelle war außerdem ein Manometer (*h*) angebracht und zwecks Vakuumprüfung und Spektraluntersuchung ein kapillar verengtes Geislerrohr (*k*) mit einer Elektrode. Als zweite Elektrode diente gleichzeitig die Kathode der Zelle. Als Verschluß der Zelle diente der Hahn *l* mit 4 mm Bohrung.

Die Zündung gelang meist, ohne daß die Hebevorrichtung in Tätigkeit gesetzt zu werden brauchte, durch Anlegen der Spannung eines kleinen Induktoriums an die Elektroden. Als jedoch nach längerem Brennen, besonders nachdem die Zelle inzwischen einmal hatte geöffnet werden müssen, die Elektroden sich stärker mit Oxyd und wohl auch etwas Hydroxyd bedeckt hatten, gelang die Zündung erst, wenn mit Hilfe der magnetischen Hebevorrichtung die Elektroden zur Berührung gebracht und gleichzeitig das Induktorium in Betrieb gesetzt wurde.

Der Flammenbogen brannte anfangs ruhig mit dem charakteristischen Calciumlicht und verhielt sich etwa wie ein zwischen Kohleelektroden erzeugter Lichtbogen. Nach einigen Stunden Brenndauer begann er zu flackern und sich gleichzeitig wesentlich zu verlängern. Er zog sich dabei an der Kathode herunter und wand sich unter dauernder Bewegung spiralförmig um diese herum — eine Erscheinung, die auch Kohlebogen bei zu großem Elektrodenabstand zeigen und durch Verringerung des Elektrodenabstandes beseitigt werden kann.

Auch die Farbe des Lichtbogens machte während des Brennens eine bemerkenswerte Veränderung durch. Das anfangs hellrote Licht zeigte im Spektrum alle Linien des Calciumbogens.[1]) Allmählich verbreitete sich von der Anode aus grünes Licht unter Verkleinerung des roten Teils des Bogens, bis nach etwa $1^1/_4$ stündiger Brennzeit ein stationärer Zustand erreicht war; jetzt zeigte der intensiv grüne Bogen das grüne Argon-

1) Die Spektralbeobachtungen und -aufnahmen wurden mit den Reproduktionen im Hagenbach und Konen, „Atlas der Emissionsspektren", verglichen.

spektrum, während Calciumlinien nicht mehr darin zu finden waren. Nur unmittelbar an der Kathodenwurzel des Bogens war noch das rote Calciumlicht sichtbar und als solches im Spektroskop nachweisbar. Eine Erklärung findet diese Erscheinung durch die Annahme, daß bei Gegenwart von Argon mit seiner geringen Anregungsspannung die Calciummoleküle nur dann emittieren, wenn sie reagieren. Dann wäre aus dem Aufhören der Calciumlicht-Emission zu schließen, daß die Sauerstoff- und Stickstoffverunreinigungen der Argonatmosphäre aufgezehrt sind. In der Tat war bei den zwei Stunden und vier Stunden lang dem Bogenlicht ausgesetzten Dampfdruckthermometerfüllungen ein Unterschied im Dampfdruck nicht mehr festzustellen.[1])

Nach Beendigung der Reinigung angestellte Versuche zeigten, daß diese Erscheinung auch bei Füllungen von höherem Druck auftrat. Der Zeitpunkt, an dem der Lichtbogen in seinem größten Teile nur das grüne Argonspektrum aufwies, trat dann entsprechend später ein, wie bei der verringerten mittleren Weglänge der Verunreinigungen zu erwarten.

Mit Füllungen unterhalb etwa 12 mm Druck zu arbeiten, empfiehlt sich nicht, da der Bogen bei geringerem Druck sehr unruhig brennt.

Eine starke Zerstäubung des Calciums, wie sie von Fischer und Iliovici bei ihrem Lichtbogen beobachtet wurde, trat nicht ein, und die Abnutzung der Elektroden war außerordentlich gering. Die gebildeten Nitride und Oxyde setzten sich an der Glaswandung ab. Die Erwärmung der Zellenwandung war nicht sehr stark, so daß eine Kühlung nicht erforderlich war.

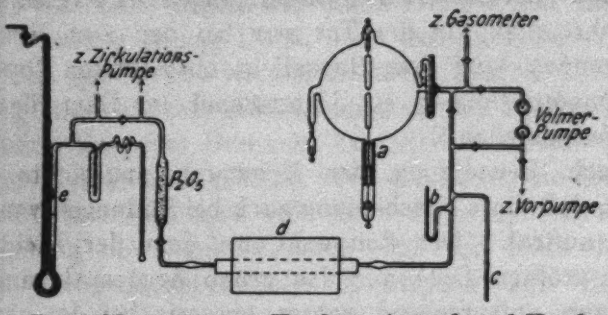
Infolge Erhitzung durch den Flammenbogen gab das Calcium anfangs sehr viel Wasserstoff ab, wie in der angeschmolzenen Geislerröhre spektrographisch festgestellt wurde. Im Spektrogramm zeigten sich — der Lichtbogen hatte erst zehn Minuten gebrannt — noch deutlich auch die Stickstoffbanden. Neonlinien traten — hier wie bei allen anderen Aufnahmen — auch bei längerer Belichtung nicht auf — ein

1) Als weiterer Beweis für die Reinheit des Gases sei angeführt, daß es Schallreuter bei seinen Versuchen über Entladungen in Edelgasen gelang, das Gas mit 220 Volt zur Anregung zu bringen, sowie auch Schwingungen darin zu erzeugen.

Beweis dafür, daß in dem Griesheimer Gase andere Edelgase in spektral bemerkbaren Mengen nicht enthalten sind.

Zur Beseitigung des für Dampfdruckmessungen sehr gefährlichen Wasserstoffs mußte das gereinigte Gas wiederum einen Kupferoxydofen, wie er im ersten Abschnitt beschrieben wurde, und dann zwecks Trocknung eine Phosphorpentoxydröhre passieren.

Fig. 6 zeigt die Anordnung dieses Teiles der Apparatur.



a Calciumzelle, *b* Manometer, *c* Kondensationsrohr, *d* Kupferoxydofen, *e* Dampfdruckthermometer.

Fig. 6.

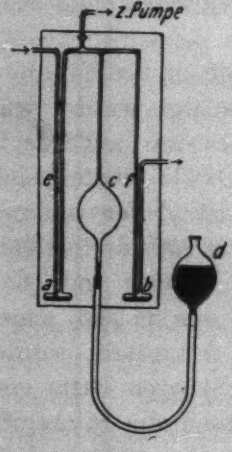


Fig. 7.

Das Überpumpen des Gases aus der Calciumzelle in das Dampfdruckthermometer geschah teils mit flüssigem Wasserstoff, teils mit Hilfe einer Zirkulationspumpe, deren Bau aus Fig. 7 ersichtlich ist. Um den Wirkungsgrad der Pumpe zu erhöhen, wurde den Quecksilbernäpfen (*a* und *b*) eine flache Form gegeben, da die Eintauchtiefe der Röhren *e* und *f* in das Quecksilber den Druck bestimmt, bis auf den man evakuieren kann. Zwecks Verkleinerung des dann noch vorhandenen störenden toten Raumes wurde das Glasgefäß *c* so groß gestaltet, wie es sich mit der leichten Bedienbarkeit vereinigen läßt, d. h. etwa 500 cm^3, und außerdem die Volmerpumpe durch eine aus Fig. 6 ersichtliche einfache Röhrenschaltung dazu benutzt, das in der Zelle gereinigte Gas vollständig in den Raum des Kupferoxydofens *d* (Fig. 6) überzuführen.

Vor dem Abschmelzen des Dampfdruckthermometers (*e*, Fig. 6) wurde das Gas durch Umdestillieren in das jenseits des Ofens *d* angebrachte Kondensationsrohr *c* mehrmals über das glühende Kupferoxyd geleitet und schließlich durch Kondensation mittels flüssigen Wasserstoffs an dem Fehlen eines meßbaren Dampfdrucks festgestellt, daß kein störender Wasserstoff mehr vorhanden war. Beim Umdestillieren wurde auch noch stets abgepumpt, um etwaige Spuren von Neon zu beseitigen.

V. Reinigung und Füllung der Dampfdruckthermometer.

Die schon von Stock beobachtete Tatsache, daß die Dampfdruckthermometer im Laufe der Zeit an Verläßlichkeit einbüßen, kann wohl darauf zurückgeführt werden, daß entweder die Glaswandungen oder das Quecksilber Gase abgegeben haben, die nunmehr den Dampfdruck störend beeinflussen.

Vor der Füllung der Dampfdruckthermometer mit dem gereinigten Argon wurde deshalb ganz besonderes Gewicht auf sorgfältigste Reinigung des verwendeten Quecksilbers sowie auch der inneren Glaswandungen gelegt. Zunächst wurde das Thermometer, wie üblich, mit heißer Kalilauge, darauf mit verdünnter Salpetersäure und schließlich mit Bichromatschwefelsäure unter jedesmaligem Nachspülen mit destilliertem Wasser mehrmals gründlich gereinigt, getrocknet und endlich alle Glasteile im Vakuum durch Befächeln mit der Bunsenflamme erhitzt.

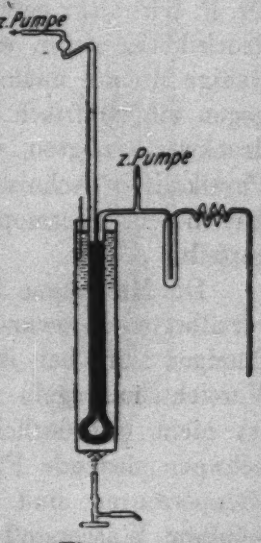


Fig. 8.

Das Quecksilber wurde vor der Einfüllung durch 3proz. Salpetersäure hindurchfiltriert, durch Erhitzen getrocknet und schließlich im Vakuum destilliert. Im Dampfdruckthermometer wurde es zunächst durch vorsichtiges Erwärmen mit der Bunsenflamme zum Sieden gebracht und, um etwa noch eingeschlossene Reste von Luft und Wasser zu beseitigen, unter stufenweiser Einfüllung in einem Ölbade (Fig. 8) mehrere Stunden lang auf 115 bis 120 Grad erhitzt, während

über dem Quecksilber in beiden Schenkeln ein hohes Vakuum gehalten wurde. Das Ölbad befand sich in einem Messingzylinder von geeigneten Abmessungen und wurde durch einen Bunsenbrenner geheizt.

Ob die angewandten Vorsichtsmaßregeln die dauernde Zuverlässigkeit der hergestellten Dampfdruckthermometer gewährleisten, kann erst nach Verlauf eines längeren Zeitraums festgestellt werden.[1])

Die derart gereinigten Dampfdruckthermometer wurden in der an Fig. 6 ersichtlichen Weise an die Apparatur angeschmolzen, in der oben beschriebenen Weise gefüllt und sodann an vorbereiteter verengter Stelle abgeschmolzen.

VI. Temperaturmessung.

Für die Temperaturmessungen standen zur Verfügung einige Dampfdruckthermometer nach Stock, und zwar ein von v. Siemens gefülltes Stickstoffthermometer und zwei von Dr. P. Günther gefüllte Sauerstoffthermometer. Da die Dampfdruckthermometer, wie bereits erwähnt, bisher immer schon wenige Monate nach ihrer Herstellung merkliche Abweichungen gegen die im frisch hergestellten Zustande gemessenen Dampfdruckwerte zeigten, wurde eins der Sauerstoffthermometer der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zur Eichung übergeben. Mit diesem Thermometer wurden dann die Temperaturen festgestellt.

Die Messungen in flüssiger Luft wurden in doppelwandigen versilberten (Dewar-) Gefäßen vorgenommen. Arbeiten mit flüssiger Luft bei ihrem Siedepunkt können ohne besondere Vorsichtsmaßregeln ausgeführt werden; eine Rührvorrichtung ist nicht erforderlich, da die emporperlenden Gasblasen die schwach siedende Flüssigkeit genügend durchrühren. Tiefere Temperaturen sind zu erreichen durch Einleiten von vorgekühltem Wasserstoff in die Flüssigkeit oder durch Abpumpen der Luft. Zwar besorgt der hindurchperlende Wasserstoff von selbst auch ein gewisses Durchrühren, doch kommt man ohne gleichzeitige mechanische Rührung nicht aus, und auch dann

1) Sollte die Reinigung des Quecksilbers sich als noch nicht ausreichend herausstellen, so wird Destillation des Quecksilbers in das evakuierte Thermometer empfohlen.

noch ist die Temperatur innerhalb der Flüssigkeit nicht mit Sicherheit überall gleichmäßig. Es zeigte sich nämlich, daß die Messungen unzuverlässig wurden, sobald die Wasserstoffbläschen beim Aufsteigen die Kondensationsröhre der Dampfdruckthermometer berührten. Auch durch Vorkühlen des eingeleiteten Wasserstoffs ließ sich dieser Übelstand nur vermeiden, wenn man streng darauf achtete, daß die Wasserstoffbläschen mit den Kondensationsrohren nicht in Berührung kamen. Aus diesem Grunde, und weil durch Abpumpen weit tiefere Temperaturen zu erzielen sind, wurden die meisten Messungen mit dem von v. Siemens[1]) angegebenen, völlig in die flüssige Luft eintauchenden Quecksilberblock ausgeführt. In den Quecksilberblock (v. Siemens hat auch einen Bleiblock benutzt) sind Stahlröhren eingebettet, die die Kondensationsrohre der Dampfdruckthermometer und eventuell auch ein Widerstandsthermometer aufnehmen können (Fig. 9). Es erwies sich als vorteilhaft, wenn die Kondensationsrohre der zu vergleichenden Dampfdruckthermometer in einem gemeinsamen Stahlrohr untergebracht wurden, da dann der Wärmeausgleich noch wesentlich schneller und sicherer von statten ging.

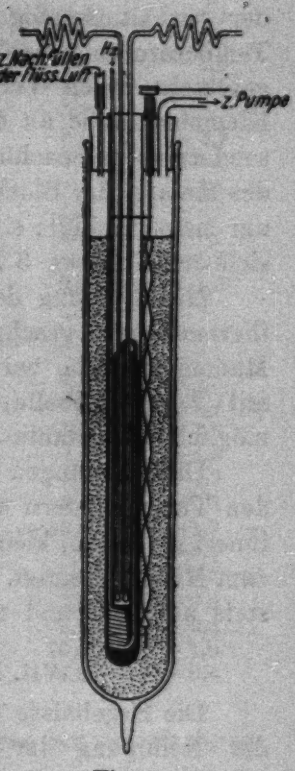


Fig. 9.

Der Quecksilberblock ist in ein Hartglasrohr eingegossen (Fig. 9). Der Raum innerhalb dieses Rohres wurde nach Angabe von v. Siemens mit Watteschnitzeln ausgefüllt und vorgekühlter Wasserstoff eingeleitet, der das Nachstürzen der sich kondensierenden Luft verhindert. Der Wasserstoff wurde nicht wie bei v. Siemens in einem besonderen Gefäß vorgekühlt, sondern durch eine ebenfalls in den Quecksilberblock eingebettete Stahlspirale und dann auf den Boden des Stahlrohres geleitet, das die Kondensationsrohre aufnahm. Der

1) H. v. Siemens, Ann. d. Phys. 42. S. 871. 1913.

Vorteil dieser Anordnung besteht darin, daß der Wasserstoff im Quecksilberblock genau die richtige Temperatur annimmt und nicht durch zu starke oder zu geringe Abkühlung zu störenden Nebenerscheinungen Anlaß gibt. Ein durch einen Motor betriebener Schraubenrührer sorgt für gehöriges Durchrühren der Flüssigkeit. Mit dieser Vorrichtung sind wiederum sehr gute Erfahrungen gemacht worden. Etwaige Temperaturunterschiede innerhalb des Metallblocks gleichen sich infolge der verhältnismäßig guten Wärmeleitfähigkeit bei so tiefen Temperaturen schnell aus. Die Regulierung der Temperatur geschieht durch Veränderung des Pumpenzugs mittels einer Klemmschraube an dem zur Pumpe führenden Schlauch. Besonders ist zu beachten, daß infolge der großen Wärmekapazität des Metalls der Block den Temperaturveränderungen des Bades nur langsam folgt; ein Temperaturunterschied von 1 Grad gleicht sich erst in etwa 3 Minuten aus.

Die Ablesung des Quecksilberstandes in den Dampfdruckthermometern geschah bei höheren Drucken direkt an der Manometerskala, bei geringeren Drucken mittels Kathetometer mit Fernrohrlibelle, und zwar stets erst dann, wenn eine möglichst konstante Temperatur sich eingestellt hatte.

Die Ablesungen wurden abwechselnd an den zu vergleichenden Thermometern ausgeführt und dann mehrere Ablesungen innerhalb eines kleinen Temperaturbereichs (bis zu $^1/_2$ Grad) zum Mittel vereinigt. Die gemessenen Quecksilberhöhen wurden stets auf 0° C und mittlere Breite reduziert.

VII. Ergebnisse der Messungen.

Die Ergebnisse der Dampfdruckmessungen am Argon nach der Reinigung im Calciumlichtbogen sind in Tab. 2 zusammengestellt. Dort sind neben den reduzierten beobachteten Quecksilberhöhen die durch graphische Interpolation auf dieselbe Temperatur aus der Crommelinschen Dampfdruckkurve erhaltenen Werte aufgeführt.

Die absoluten Abweichungen nehmen mit abnehmendem Druck etwas ab, während die prozentischen Differenzen bei den tieferen Temperaturen recht groß werden.

Fig. 10 stellt die Dampfdruckkurve des untersuchten Argons im Vergleich mit der Crommelinschen Kurve und der

Tabelle 2.

Dampfdrucke des festen Argons.

Dampfdruck des O_2-Thermometers	$T_{(-273.20)}$	$p_{beob.}$	p nach Crommelin in mm	$p_{beob.} - p_{Cromm.}$ in mm	$p_{beob.} - p_{Cromm.}$ in %
19,14	65,49	21,97	–	–	–
22,05	66,16	25,36	–	–	–
41,23	69,43	47,97	51,3	−3,3	−6,9
50,96	70,49	59,26	62,6	−3,3	−5,3
65,95	71,95	77,47	81,5	−4,0	−5,2
91,78	73,93	111,78	117,9	−6,1	−5,5
117,8	75,50	146,0	151,3	−5,3	−3,5
140,2	76,69	176,9	182,7	−5,8	−3,3
159,0	77,48	200,6	205,6	−5,0	−2,5
199,1	79,06	255,6	259,1	−3,5	−1,3
245,8	80,60	321,2	325,8	−4,6	−1,5
274,1	81,42	360,5	367,1	−6,4	−1,6
324,9	82,75	435,9	441,8	−5,9	−1,4
344,6	83,21	464,3	469,9	−5,6	−1,2
376,0	83,93	512,17	518,0	−5,8	−1,3
Dampfdrucke des flüssigen Argons.					
376,0	83,93	512,17	518,0	− 5,8	−1,3
381,2	84,04	518,7	525,9	− 7,2	−1,4
424,4	84,93	576,6	582,1	− 5,5	−1,0
447,9	85,39	605,5	613,2	− 7,7	−1,3
485,2	86,08	652,2	661,6	− 9,4	−1,3
524,3	86,76	703,9	710,1	− 6,2	−0,9
557,4	87,31	746,1	756,0	−10,0	−1,2
592,7	87,88	792,3	801,8	− 9,5	−1,2
690,4	89,28	918,0	924,0	− 6,0	−0,6
704,7	89,45	933,4	940,7	− 7,3	−0,8
748,8	90,07	993,4	1002,5	− 9,1	−0,9
755,2	90,15	1002,0	1012,0	−10,0	−1,0
771,4	90,35	1026,0	1030,2	− 4,2	−0,4

von Siemensschen Sauerstoffdampfdruckkurve dar, mittels derer nach Anbringung der Eichkorrektion an dem benutzten Sauerstoffdampfdruckthermometer die Temperatur bestimmt wurde. Ein Rückblick auf Tab. 1 und Fig. 4, die den Dampfdruck des Argons nach der ersten Reinigung aufzeichnen, zeigt deutlich, daß ein Fortschritt in der Reinigung erzielt worden ist. Die Differenzen der beobachteten gegen die Crommelinschen Werte sind durchweg größer geworden. Durch systematisches Beimengen kleiner Verunreinigungen zu dem untersuchten Argon ließe sich die Crommelinsche Kurve sehr wahrscheinlich mit

großer Annäherung reproduzieren, wie eine kurze Betrachtung des quantitativen Reinigungserfolges im Vergleich mit den in Tab. 1 verzeichneten Abweichungen gegen die Crommelinschen Werte lehrt.

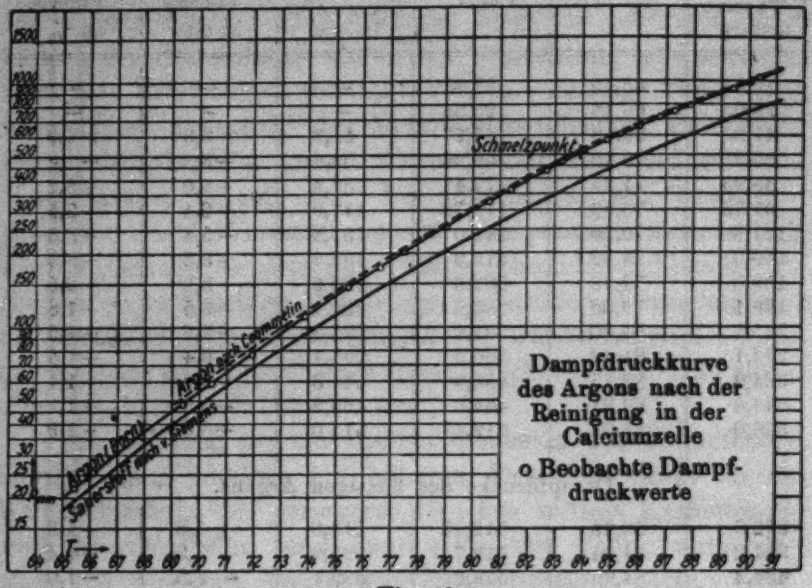


Fig. 10.

Die Schmelzpunktstemperatur des Argons wurde durch mehrere Messungen zu 83,93° in absoluter Zählung bestimmt, der Dampfdruck in diesem Punkte zu 512,17 mm festgestellt. Crommelin findet für die Schmelzpunkttemperatur 83,90° bei einem Sättigungsdruck von 515,65 mm.

Die Interpolation auf den Siedepunkt zwischen den beiden in Tab. 2 verzeichneten Punkten, die diesem zunächst liegen, sowie die Berechnung mittels der weiter unten zu besprechenden Interpolationsformel ergibt die Siedetemperatur zu 87,48°, während der aus den Crommelinschen Werten interpolierte Siedepunkt bei 87,36° liegt.

VIII. Theoretische Betrachtung.

Für die Abhängigkeit der Verdampfungswärme einer Substanz von der Temperatur gilt die bekannte Clausius-Clapeyronsche Gleichung

$$\lambda = R T^2 \frac{d \ln p}{d T} = 4{,}571\, T^2 \frac{d \log p}{d T} . \tag{1}$$

Ferner folgt aus dem ersten Hauptsatz für die Abhängigkeit der Verdampfungswärme von den Molekularwärmen von Gas und Kondensat

$$\lambda = \lambda_0 + \int_0^T (C_p - c)\, dT. \tag{2}$$

Integriert man Gleichung (1) und ersetzt λ durch den Ausdruck (3), so erhält man

$$\ln p = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{1}{R}\int_0^T \frac{dT}{T^2}\int_0^T (C_p - c)\, dT + i,$$

oder in gewöhnlichen Logarithmen

$$\log p = -\frac{\lambda_0}{4{,}571\, T} + \frac{1}{4{,}571}\int_0^T \frac{dT}{T^2}\int_0^T (C_p - c)\, dT + C. \tag{3}$$

Die Integrationskonstante $C = \frac{i}{2{,}303}$ bezeichnet man als „wahre chemische Konstante". Diese muß nach dem Nernstschen Wärmesatze unabhängig von der Natur des Kondensats und für die Substanz charakteristisch sein und läßt sich also, wie aus Gleichung (3) ersichtlich, berechnen aus dem Dampfdruck bei irgendeiner Temperatur, der Verdampfungswärme λ_0 beim absoluten Nullpunkt und dem Verlauf der Molekularwärmen. Kennt man die Verdampfungswärme am absoluten Nullpunkt nicht, so sind die Dampfdruckwerte bei zwei Temperaturen erforderlich.

Für einatomige Gase ist nun

$$C_p = \tfrac{5}{2} R.$$

Somit wird aus (2)

$$\lambda = \lambda_0 + 2{,}5\, RT - \int_0^T c\, dT, \tag{4}$$

und aus (3)

$$\log p = -\frac{\lambda_0}{4{,}571\, T} + 2{,}5 \log T - \frac{1}{4{,}571}\int_0^T \frac{dT}{T^2}\int_0^T c\, dT + C. \tag{5}$$

Es handelt sich nun also um die Berechnung der Integrale

$$\int_0^T c\, dT = E \quad \text{und} \quad \int_0^T \frac{E}{T^2}\, dT,$$

die z. B. mittels der Debyeschen Funktion

$$E = \frac{9R}{\nu^3}\int_0^{\nu} \nu^2 \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}\,d\nu = 9RT\left(\frac{T}{\beta\nu}\right)^3 \int_0^{\frac{\beta\nu}{T}} \frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^3 d\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}$$

erfolgen kann.[1]) Für die Auswertung der Integrale mittels dieser Funktion und die Bestimmung von $C_v = \frac{dE}{dT}$ sind Tabellen berechnet worden, die ein bequemes Arbeiten mit den Integralen ermöglichen.[2]) Natürlich gilt Formel (5) dann nur für Temperaturen, bei denen das Kondensat sich im festen Zustande befindet, da die Quantentheorie, die den Debyeschen Formeln zugrunde liegt, bisher nur erst bei der Anwendung auf die spezifischen Wärmen des festen Aggregatzustandes zu sicheren Ergebnissen geführt hat. Für das Gebiet, in dem der Bodenkörper als Flüssigkeit vorhanden ist, leitet W. Nernst in seiner soeben in der Anmerkung zitierten Monographie eine für die meisten Zwecke vollkommen ausreichende Nährungsformel ab, die übrigens auch, wie unten gezeigt werden wird, für tiefere Temperaturen, bei denen ein fester Bodenkörper zugegen ist, häufig sehr gut anwendbar ist. Die Formel lautet

$$(6) \qquad \log p = -\frac{\lambda_0}{4{,}571\,T} + 1{,}75\log T - \frac{\varepsilon}{4{,}571}T + C'.$$

C' wird als „konventionelle chemische Konstante" bezeichnet.

Wie gut in der Tat diese Nährungsformel den Verlauf der Dampfdruckkurve sowohl oberhalb wie unterhalb des Schmelzpunktes des Argons darstellt, zeigen die Tabb. 3 u. 4, in denen

---

1) Für Argon gibt der Wert $\beta\nu = 85$ die beste Übereinstimmung mit den Messungen. Vgl. A. Eucken, Verh. der Dtsch. Phys. Ges. 18. S. 4 (1916).

2) P. Debye, Ann. d. Phys. 39. S. 789 (1912), ferner Nernst und Lindemann, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. vom 12. Dez. 1912, sowie die Tabellen in der Monographie von W. Nernst „Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes", Halle 1918.

Tabelle 3.

$$\log p = -\frac{366{,}87}{T} + 1{,}75 \log T - 0{,}0028293\, T + 1{,}0698.$$

$T_{(273{,}20)}$	$p_{gef.}$ in mm	$p_{gef.}$ in Atm.	$p_{ber.}$	$p_{gef.} - p_{ber.}$ in mm	$p_{gef.} - p_{ber.}$ in %	$T_{gef.} - T_{ber.}$
65,49	21,97	0,02826	0,02824	+0,01	+0,05	−0,00
66,16	25,36	0,03337	0,03337	±0,00	±0,00	±0,00
69,43	47,97	0,06312	0,06321	−0,05	−0,10	+0,00
70,49	59,26	0,07797	0,07787	+0,08	+0,12	−0,01
71,95	77,47	0,10195	0,10208	−0,11	−0,15	+0,01
73,93	111,78	0,14714	0,14720	−0,06	−0,05	+0,00
75,50	146,0	0,1921	0,1921	±0,0	±0,00	±0,00
76,69	176,9	0,2328	0,2325	+0,2	+0,11	−0,01
77,48	200,6	0,2640	0,2640	±0,0	±0,00	±0,00
79,06	255,6	0,3363	0,3367	−0,3	−0,12	+0,01
80,60	321,2	0,4227	0,4227	±0,0	±0,00	±0,00
81,42	360,5	0,4744	0,4756	−0,9	−0,30	+0,02
82,75	435,9	0,5736	0,5733	+0,2	+0,05	−0,00
83,21	464,3	0,6109	0,6105	+0,3	+0,07	−0,01
83,93	512,17	0,6739	0,6739	±0,0	±0,00	±0,00

Tabelle 4.

$$\log p = -\frac{339{,}3}{T} + 1{,}75 \log T - 0{,}006737\, T + 1{,}0698.$$

$T_{(273{,}20)}$	$p_{gef.}$ in mm	$p_{gef.}$ in Atm.	$p_{ber.}$	$p_{gef.} - p_{ber.}$ in mm	$p_{gef.} - p_{ber.}$ in %	$T_{gef.} - T_{ber.}$
83,93	512,17	0,6739	0,6738	+0,1	+0,02	−0,00
84,04	518,7	0,6829	0,6833	−0,6	−0,12	+0,02
84,93	576,6	0,7561	0,7564	−0,3	−0,05	+0,01
85,39	605,5	0,7980	0,7955	+1,0	+0,16	−0,03
86,08	652,2	0,8582	0,8582	±0,0	±0,00	±0,00
86,76	703,9	0,9262	0,9256	+0,5	+0,07	−0,01
87,31	746,1	0,9819	0,9818	+0,2	+0,03	−0,00
87,88	792,3	1,043	1,044	−0,7	−0,09	+0,01
89,28	918,0	1,208	1,206	+1,1	+0,12	−0,01
89,45	933,4	1,228	1,229	−0,2	−0,02	+0,00
90,07	993,4	1,307	1,307	±0,0	±0,00	±0,00
90,15	1002,0	1,317	1,318	−0,6	−0,06	+0,00
90,35	1026,0	1,347	1,342	+5,8	+0,56	−0,02

die gemessenen und die nach der Nährungsgleichung berechneten Werte gegenübergestellt werden.[1]) Die Konstanten ergeben sich für das flüssige Argon zu

$$\lambda_0 = 1551{,}0; \quad \varepsilon = 0{,}030795; \quad C' = 1{,}0698,$$

für das feste Argon zu

$$\lambda = 1677{,}0; \quad \varepsilon = 0{,}012933; \quad C' = 1{,}0698,$$

wenn der Dampfdruck in Atmosphären ausgedrückt wird. Mißt man ihn in mm Quecksilberhöhe, so wird

$$C' = 1{,}0698 + \log 760 = 3{,}9506.$$

Die Formel (6) lautet also für Argon

$$(7) \quad \log p = -\frac{339{,}3}{T} + 1{,}75 \log T - 0{,}006737\, T + 1{,}0698 \Big]_{83{,}98^\circ}^{91^\circ}$$

und

$$(8) \quad \log p = -\frac{366{,}87}{T} + 1{,}75 \log T - 0{,}0028293\, T + 1{,}0698 \Big]_{65^\circ}^{83{,}98^\circ}.$$

In Tab. 5 sind für den thermometrischen Gebrauch die Dampfdruckwerte des Argons und ihre Differentialquotienten für die ganzen Grade im beobachteten Temperaturgebiet berechnet. Die absoluten Temperaturen in den Tabellen sind wiederum auf den bei $-273{,}20^\circ$ liegenden Nullpunkt bezogen.

Der gefundene Wert $C' = 1{,}07$ der konventionellen chemischen Konstanten liegt zwischen den für Helium (0,6) und für Wasserstoff (1,6) von W. Nernst angegebenen Werten[2]), wie für ein einatomiges Gas zu erwarten.

Die Verdampfungswärmen erhält man auf folgendem von W. Nernst bei seiner Untersuchung der Crommelinschen Ergebnisse[3]) eingeschlagenen Wege.

---

1) Die gebräuchliche Form der Dampfdruckthermometer nach Stock gestattet Messungen des Dampfdrucks bis zu etwa 1000 mm. Daß die Näherungsformel bis zum kritischen Punkt hinauf sehr gut brauchbar ist, hat Crommelin, dessen Messungen sich bis zu diesem Punkte erstrecken, in der ersten seiner eingangs zitierten Arbeiten gezeigt. Er findet für die konventionelle chemische Konstante den Wert 0,35.

2) Eine Zusammenstellung dieser Konstanten findet sich in dem bereits zitierten Werke von W. Nernst: „Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes", auf S. 112, sowie in dem Werke „Theoretische Chemie" vom gleichen Verfasser, 8.—10. Aufl., S. 799. 1921.

3) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. 23. S. 185 ff. 1916.

Tabelle 5.

T	$p_{mm\,Hg}$	$\frac{dp}{dT}$	T	$p_{mm\,Hg}$	$\frac{dp}{dT}$
65	19,72	4,35	80	294,8	43,4
66	24,51	5,25	81	341,1	49,1
67	30,25	6,28	82	392,4	55,1
68	37,14	7,50	83	450,7	61,8
69	45,32	8,90	83,93	512,17	68,8
70	54,99	10,50			
71	66,39	12,33	83,93	512,17	59,5
72	79,74	14,41	84	516,1	59,9
73	95,30	16,77	85	578,8	65,5
74	113,40	19,44	86	647,3	71,5
75	134,3	22,4	87	721,9	77,8
76	158,4	25,8	88	803,2	84,5
77	185,9	29,5	89	891,3	91,3
78	217,5	33,7	90	986,0	99,0
79	253,5	38,3	91	1085,0	106,4

Mit Einführung der Zustandsgleichung von D. Berthelot

$$p\,v = R\cdot T\cdot\left(1+\frac{p}{\pi_0}\cdot\frac{9}{128}\,\tau\,(1-6\,\tau^2)\right)$$

geht Gleichung (1) über in

$$(9)\quad \lambda = 4{,}571\,T^2\cdot\frac{d\log p}{dT}\left(1+\frac{p}{\pi_0}\cdot\frac{9}{128}\cdot\tau\,(1-6\,\tau^2)-\frac{v'}{v}\right).$$

Der kritische Druck π_0 des Argons beträgt nach Crommelin 48 Atmosphären, die kritische Temperatur $\vartheta_0 = T\cdot\tau$ 150,76°, v' für flüssiges Argon 0,03 l; v kann in dem Korrektionsglied nach den Gasgesetzen berechnet werden. In Tab. 6 sind zunächst die nach Gleichung (1) aus zwei benachbarten Dampfdruckwerten berechneten Verdampfungswärmen im Gebiet des flüssigen Argons zusammengestellt, wobei der von Nernst[1]) angegebene Kunstgriff benutzt wird, die Gleichung (1) in der Form

$$\lambda = -\,4{,}571\,\frac{d\log p}{d\left(\frac{1}{T}\right)} = 4{,}571\,\frac{T_1\,T_2}{T_1-T_2}\log\frac{p_2}{p_1}$$

darzustellen, da der Ausdruck $\frac{d\log p}{d\left(\frac{1}{T}\right)}$ sich nahezu linear ändert.

1) W. Nernst, a. a. O. S. 185.

Tabelle 6.

T	p	$-4{,}571 \cdot \frac{d \log p}{d\left(\frac{1}{T}\right)}$	Ausgeglichene Werte
90,07	1,307		
		1609	1614
89,28	1,207		
		1616	1617
87,31	0,9818		
		1625	1620
86,08	0,8582		
		1628	1623
85,39	0,7955		
		1613	1626
84,93	0,7564		
		1632	1628
83,93	0,6789		

Die so erhaltenen Zahlen (in der 3. Spalte) schwanken zwar etwas, zeigen aber doch deutlich den thermodynamisch geforderten Anstieg bei fallender Temperatur. Auch über die Größe dieses Temperaturganges läßt sich Sicheres aussagen. Da nämlich die Atomwärme des flüssigen Argons von A. Eucken [1]) in der Nähe des Siedepunktes zu konstant 10,5 cal. gefunden wurde, müßte die Verdampfungswärme in diesem Temperaturgebiet um 10,5 — 5,0 = 5,5 cal. pro Grad abnehmen, wenn auf den gesättigten Argondampf die Gasgesetze anwendbar wären. Die Abweichung des Verhaltens gesättigter Dämpfe von dem idealer Gase äußert sich in dem Jouleeffekt unvollkommener Gase, für den die Berthelotsche Gleichung den Ausdruck

$$c\,dT = \frac{27}{32}\left(\frac{\vartheta_0}{T}\right)^2 \cdot 1{,}985\,\frac{dp}{\pi_0}\,\vartheta_0 \tag{10}$$

liefert. Mit den bereits mitgeteilten Daten für ϑ_0 und π_0 berechnet sich für das zur Betrachtung stehende Temperaturgebiet, in dem der Dampfdruck um 0,1 Atm. pro Grad ansteigt, der Einfluß des Jouleeffektes zu 1,6 cal. pro Grad und Mol; mithin muß der Temperaturkoeffizient der Verdampfungswärme 5,5 + 1,6 = 7,1 cal., die Zunahme der Verdampfungswärme in dem Temperaturintervall der Tab. 6 (89,7—84,4°) also 38 cal. betragen. Nun ändert sich das Berthelotsche Korrektionsglied in Gleichung (9) von der höchsten bis zur tiefsten Temperatur von 0,053—0,036; also erfahren die Werte

1) A. Eucken, Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. 18. S. 4 ff. 1916.

der Verdampfungswärme von der höchsten zur tiefsten Temperatur hiernach eine Abnahme von 1,47 Proz. oder 24 cal., so daß sich insgesamt eine Zunahme um 38 — 24 = 14 cal. ergeben muß. Die Zahlen der 3. Spalte zeigen eine Zunahme von 23 cal. Wendet man daher nunmehr die Methode der kleinsten Quadrate an und fordert einerseits den eben berechneten Temperaturgang, während man andererseits den Zahlen ein der Temperaturdifferenz der beiden benachbarten Reihen proportionales „Gewicht" gibt, so erhält man die in der 4. Spalte stehenden Zahlen, die wohl die wahrscheinlichste Wiedergabe der Messungen darstellen.

Jetzt kann man die Werte auf den Schmelzpunkt extrapolieren und die Berthelotsche Korrektion nach Gleichung (9) anbringen. Dann erhält man für die Verdampfungswärme des festen Argons im Schmelzpunkt unter Benutzung der von Eucken[1]) gemessenen Schmelzwärme:

$$\lambda_{T_r} = 1630(1 - 0{,}036) + 268 = 1839 \text{ cal.}$$

Für den gewöhnlichen Siedepunkt (87,5°) ist aus der Zahlenreihe der 4. Spalte der Wert 1618 zu entnehmen. Es ergibt sich also mit der Korrektion der Gleichung (9) die Verdampfungswärme des Argons am Siedepunkt

$$\lambda_s = 1618(1 - 0{,}046) = 1544 \text{ cal.},$$

während Eucken[2]) kalorimetrisch 1500 cal. fand. Da Eucken selbst bemerkt, daß die Temperatur wahrscheinlich etwas höher lag als die Siedetemperatur und die Verdampfungswärme mithin zu klein sein muß, so erscheint die Abweichung von 3 Proz. gegen den aus den vorliegenden Messungen errechneten Wert durchaus erklärlich.

Ähnlich gestaltet sich die Berechnung der Verdampfungswärme des festen Argons im Tripelpunkt aus den Dampfdruckmessungen am festen Argon. Tab. 7 enthält in der 3. Spalte wiederum die nach Gleichung (1) aus zwei benachbarten Dampfdruckwerten berechneten Verdampfungswärmen. Der thermodynamisch geforderte Anstieg mit fallender Temperatur ist hier infolge der stärkeren Schwankungen der Zahlen nicht sofort deutlich. Er tritt erst in Erscheinung, wenn man wiederum

1) A. Eucken, a. a. O. S. 15.
2) A. Eucken, a. a. O. S. 17.

Tabelle 7.

T	p	$-4{,}571 \cdot \frac{d \log p}{d\left(\frac{1}{T}\right)}$
83,93	0,6739	
		1889
81,42	0,4756	
		1882
80,60	0,4227	
		1872
77,48	0,2640	
		1874
75,50	0,1921	
		1881
73,93	0,14720	
		1914
70,49	0,07787	
		1910
69,43	0,06321	
		1889
65,49	0,02824	

unter dem Gesichtspunkt, daß die Sicherheit jeder einzelnen Zahl der Temperaturdifferenz der beiden benachbarten Reihen proportional gesetzt wird, mehrere Werte zum Mittel vereinigt, was in der 2. Spalte der Tab. 8 geschehen ist. Bringt man an diesen Zahlen die Korrektion nach Gleichung (9) an, so folgen die Werte der 3. Spalte der Tab. 8. Extrapoliert man diese auf den Schmelzpunkt, so folgt

$$\lambda_{T_r} = 1830 \text{ cal.}$$

Tabelle 8.

T	$\lambda_{\text{gemittelt}}$	$\lambda_{\text{korrigiert}}$
82,2	1884	1836
75,3	1888	1860
67,8	1893	1885

Thermodynamisch stehen also die beiden Reihen der Verdampfungswärmen in Tab. 6 und 8 wohl genügend im Einklang. Die Schmelzwärme des Argons würde sich aus den beiden Reihen zu 259 cal. ergeben, während Eucken 268 cal. fand. In Anbetracht der Schwierigkeit der Messungen und im Hinblick darauf, daß der Korrektion auf den idealen Gaszustand die D. Berthelotsche Gleichung zugrunde gelegt wurde, die für gesättigte Dämpfe vielleicht keine strenge Gültigkeit mehr besitzt, ist die Übereinstimmung wohl als hinreichend zu bezeichnen.

Die von W. Nernst[1]) aus den Messungen Crommelins errechneten Zahlenreihen schwanken beim flüssigen Argon stärker als die Zahlen der Tab. 6, zeigen jedoch auch dort im ganzen den geforderten Temperaturgang. Dagegen tritt beim festen Argon unter großen Schwankungen ein thermodynamisch unzulässiger Abfall der Verdampfungswärmen mit der Temperatur auf, während die obigen Werte auch hier den richtigen Temperaturgang aufweisen.

Für die Verdampfungswärme des festen Argons am Schmelzpunkt berechnet Nernst aus den Crommelinschen Dampfdruckmessungen des flüssigen Argons $\lambda_{T_r} = 1821$ cal., aus denen des festen Argons $\lambda_{T_r} = 1819$ cal. Diese Zahlen zeigen also eine Abweichung von etwa 1 Proz. gegen die oben berechneten Werte, die sich daraus erklärt, daß die der obigen Berechnung zugrunde liegende Dampfdruckkurve in der Gegend des Schmelzpunktes — wegen der beträchtlichen Abweichungen im Dampfdruck bei tieferen Temperaturen — notwendig steiler verläuft als die Crommelinsche Kurve, wie auch aus Fig. 10 ersichtlich ist.

IX. Berechnung der „wahren chemischen Konstanten".

Zur Berechnung der in Gleichung (5) auftretenden Verdampfungswärme des Argons im absoluten Nullpunkt kann man nunmehr die Formel (4) benutzen in der Form

$$\lambda_0 = \lambda - 2{,}5\,RT + \int_0^T c_p\,dT.$$

Wenden wir diese Gleichung auf den Schmelzpunkt an und setzen für λ_{T_r} das Mittel aus den beiden oben berechneten Werten ein, so ist

$$\lambda_0 = 1835 - 4{,}863 \cdot 83{,}93 + \int_0^{83{,}93} c_p\,dT.$$

Der für das Integral zu setzende Wert kann entweder aus einer der oben erwähnten Tabellen entnommen werden, wobei bei Benutzung der Debyeschen Funktion die Korrektion auf c_p anzubringen ist, oder auch durch graphische Integration

1) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. 23. S. 189. 1916.

ermittelt werden. Da die von Nernst[1]) angegebene Formel zur Reduktion von c_v auf c_p

$$c_p = f\left(\frac{85}{T}\right) + 0{,}00039\,T^2, \tag{11}$$

wo für f die Debyesche Funktion zu setzen ist, nur eine Genauigkeit von etwa 1 Proz. beanspruchen kann, wurde zur Kontrolle außerdem auch der Weg der graphischen Integration eingeschlagen, zumal da für c_p die Messungen von A. Eucken[2]) vorliegen. Die daraus entnommenen Werte von c_p wurden bis zum absoluten Nullpunkt extrapoliert und dann sowohl mit Hilfe eines Polarplanimeters wie durch Auszählen der Felder übereinstimmend für das obige Integral der Wert 406 gefunden, während mittels der Reduktionsformel (11) sich 411 errechnet.

Nun ist noch dem Jouleeffekt unvollkommener Gase Rechnung zu tragen, der durch Gleichung (10) dargestellt wird. Man erhält so bei graphischer Ermittelung des Integrals

$$\lambda_0 = 1835 - 417 + 406 + 11 = 1835,$$

bei Anwendung der Reduktionsformel (11) und der Debyeschen Funktion

$$\lambda_0 = 1840.$$

Diese Werte sind nun in Gleichung (5) einzutragen und die Gleichung auf einen beliebigen Temperaturpunkt anzuwenden. Bei der Berechnung des Integrals $\int_0^T \frac{E}{T^2}\,dT$ kann man wiederum die betreffenden Tabellen benutzen, wobei man wieder, wenn man mit der Debyeschen Funktion arbeitet, die Korrektion auf c_p anbringen muß, die aus Gleichung (11) entsprechend berechnet werden kann. Zur Kontrolle wurde auch hier die graphische Integration angewandt. Aus der c_p-Kurve wurde eine genügende Anzahl von E-Werten graphisch ermittelt, die Kurve E/T^2 unter Extrapolation bis zum absoluten Nullpunkt mittels der Beziehung $\frac{E}{T^2} = a\,T^2$ gezeichnet, und diese dann wiederum graphisch integriert.

1) W. Nernst, „Grundlagen des neuen Wärmesatzes", S. 149; desgl. Zeitschr. f. Elektochem. 23. S. 189. 1916. Der dort angegebene Koeffizient von T^2 ist durch einen Druckfehler entstellt.

2) A. Eucken, Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. 18. S. 10. 1916.

In Tab. 9 sind die Ergebnisse dieser graphischen Integrationen zusammengestellt und zum Vergleich in Tab. 10 die von Frl. Miething[1]) angegebenen Werte aufgeführt.

Tabelle 9.

T	C_p	$\int_0^T C_p\,dT = E$	$\int_0^T \frac{E}{T^2}\,dT = \frac{F}{T}$	F
10	(0,80)	(2,2)	(0,108)	(1,08)
20	2,80	20,2	0,487	9,74
30	4,55	57,4	1,07	32,1
40	5,60	109	1,73	69,2
50	6,25	168	2,40	120
60	6,75	233	3,06	184
65	6,95	267	3,38	219
70	7,15	303	3,70	259
75	7,35	339	4,00	300
80	7,50	376	4,30	344
83,93	7,65	406	4,52	379

Tabelle 10.

T	C_p	$\int_0^T C_p\,dT = E$	$\int_0^T \frac{E}{T^2}\,dT = \frac{F}{T}$	F
10	(0,75)	(2,2)	(0,075)	(0,75)
20	2,87	19,9	0,422	8,44
30	4,53	57,6	1,00	30,0
40	5,55	108	1,67	66,7
50	6,16	167	2,34	117
60	6,50	231	3,00	179
70	7,01	298	3,62	254
83,79	8,45	408	4,67	391

Die Anwendung der Gleichung (5) auf denselben Temperaturpunkt ($T = 78{,}61°$), für den Nernst aus den Crommelinschen Daten die wahre chemische Konstante berechnet[2]), liefert

1) Hildegard Miething, Adhandl. d. Bunsenges., Nr. 9, Halle 1920, bei Knapp. Man gelangt sehr nahe zu den Zahlen der Tab. 10, wenn man die in der Zeitschr. f. Elektrochem. 23. S. 189. 1916 von W. Nernst angegebene Reduktionsformel anwendet, die jedoch, wie bereits in der Anm. 1. S. 500 erwähnt wurde, durch einen Druckfehler entstellt ist.

2) W. Nernst, a. a. O. S. 189, und „Grundlagen usw." S. 147ff.

nun bei Benutzung der graphisch ermittelten Werte von λ_0 und des Integrals $\int_0^T \frac{E}{T^2} dT$

$$-0{,}503 = -5{,}108 + 4{,}740 - 0{,}922 + C,$$

mithin

$$C = 0{,}787,$$

während sich mit der Formel (11) und der Debyeschen Funktion ergibt

$$-0{,}503 = -5{,}121 + 4{,}740 - 0{,}910 + C,$$

also

$$C = 0{,}788.$$

Nernst berechnet für diesen Punkt

$$-0{,}496 = -5{,}087 + 4{,}740 - 0{,}900 + C,$$

also

$$C = 0{,}751.$$

Die Fehlergrenzen können in folgender Weise abgeschätzt werden: Die Fehler in den Dampfdruckwerten werden auch bei tiefen Temperaturen kaum 0,5 Proz. übersteigen, liefern also im Logarithmus für die Fehlergrenze keinen merklichen Beitrag. Da λ_0 aus der Verdampfungswärme im Schmelzpunkt berechnet und diese aus den Dampfdruckmessungen des festen und des flüssigen Argons gemittelt wurde, wird λ_0 kaum einen Fehler über 0,3 Proz. enthalten, der in dem ersten Glied auf der rechten Seite Unsicherheiten von $\pm 0{,}015$ bis $\pm 0{,}018$ bewirken würde. Der Integralwert kann Unsicherheiten bis zu $\pm 0{,}02$ aufweisen. Mithin ergibt sich als maximaler, also schon sehr unwahrscheinlicher Fehler $\pm 0{,}04$, und die wahre chemische Konstante ist

$$C = 0{,}79 \pm 0{,}04.$$

Aus Crommelins Zahlen fand W. Nernst, wie schon erwähnt,

$$C = 0{,}75 \pm 0{,}06.$$

Sackur[1]) und Tetrode[2]) leiten auf Grund der Quanten-

1) O. Sackur, Nernst-Festschrift, S. 405. 1912; Ann. d. Phys. 40. S. 67. 1913.

2) H. Tetrode, Ann. d. Phys. 38. S. 434; 39. S. 255. 1912.

theorie für die wahre chemische Konstante den Ausdruck ab:

$$C = \log \frac{(2\pi m)^{3/2} R^{5/2}}{N_0^{5/2} h^3},$$

wo m die Masse eines Atoms, N_0 = Zahl der Moleküle im Mol, h das Plancksche Wirkungsquantum ist. Ersetzt man hierin m durch M/N_0, wenn man mit M das Molekulargewicht bezeichnet, so läßt sich C als Summe einer universellen Konstante C_0 und eines vom Molekulargewicht M abhängigen Gliedes darstellen:

$$C = C_0 + 1{,}5 \log M,$$

wo also

$$C_0 = \log \frac{(2\pi)^{3/2} R^{5/2}}{N_0^4 h^3}.$$

W. Nernst gibt für den Zahlenwert dieser Größe an[1]):

$$C_0 = -1{,}588.$$

Berechnet man den Wert dieser universellen Konstante aus der chemischen Konstante des Argons, so erhält man, da $1{,}5 \log M = 2{,}40$, unter Zugrundelegung des Wertes $C = 0{,}79 \pm 0{,}04$

$$C_0 = -1{,}61 \pm 0{,}04,$$

während aus dem von W. Nernst ermittelten Werte $C_0 = 1{,}65 \pm 0{,}06$ folgt. Der aus vorliegenden Messungen berechnete Wert liegt also dem theoretischen Werte merklich näher. Die Abweichung liegt im gleichen Sinne wie sie beim Quecksilber festgestellt worden ist.[2]) Hier können nur Messungen der spezifischen Wärme des festen Argons bei den tiefsten Temperaturen Aufklärung bringen.

Zusammenfassung.

1. Das in herkömmlicher Weise durch Leiten über glühendes Calcium von Sauerstoff und Stickstoff bis zu einem gewissen Grade befreite Argon wurde durch mehrstündige Behandlung im Calciumlichtbogen in einen Zustand höchster Reinheit übergeführt. Die Erfahrungen mit der Calciumzelle werden mitgeteilt.

1) W. Nernst, „Theoretische Chemie", 10. Aufl. S. 807. 1921. Vgl. auch M. Planck, „Vorlesung über Wärmestrahlung", 4. Aufl. Leipzig 1922.

2) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. 23. S. 185 ff. 1916.

2. Die Temperaturmessung mittels eines von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeichten Sauerstoffdampfdruckthermometers wurde mit dem v. Siemensschen Quecksilberblock ausgeführt, die Messungsergebnisse mit denen von C. A. Crommelin verglichen und die Abweichungen erklärt.

3. Die Dampfdruckkurve ließ sich durch die Nernstsche Näherungsformel befriedigend darstellen.

4. Die Schmelzpunktstemperatur wurde gemessen, die Siedetemperatur sowie die Verdampfungswärmen im Siedepunkt und im Schmelzpunkt errechnet und mit den entsprechenden Euckenschen und Crommelinschen Werten verglichen. Die von Nernst festgestellten thermodynamischen Unstimmigkeiten in dem Verlauf der Verdampfungswärme des Crommelinschen Argons wurden beseitigt.

5. Die konventionelle und die wahre chemische Konstante wurden errechnet; die letztere wurde in guter Übereinstimmung mit der Stern-Sackurschen Theorie gefunden; doch bleibt eine Abweichung im gleichen Sinne wie beim Quecksilber bestehen. Nur Messungen der spezifischen Wärme des festen Argons bei Heliumtemperaturen können hier die Entscheidung bringen.

6. Für den thermometrischen Gebrauch wurde eine Dampfdrucktabelle gegeben.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalisch-chemischen Institut der Universität Berlin in der Zeit von Oktober 1920 bis März 1922 ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Professor Dr. Nernst für die Anregung zu der Arbeit und das rege Interesse, das er ihr stets entgegenbrachte, meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Auch Hrn. Dr. P. Günther bin ich für seine wertvollen Ratschläge zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen 29. Juli 1922.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig

Physikalische Demonstrationen

Anleitung zum Experimentieren im Unterricht an höheren Schulen und technischen Lehranstalten

Von

Adolf F. Weinhold

6., umgearbeitete Aufl. herausgeg. von Lothar Weinhold

XII, 1022 Seiten mit 702 Abbildungen im Text und auf 7 Tafeln. 1921.* Grundzahl 30, geb. 36

Zeitschrift für Mathematik und Physik: Auf die praktischen Ratschläge, die W. in seinem Buche gibt, kann sich jeder Experimentator ganz verlassen; da ist jede Einzelheit oft und gewissenhaft durchprobiert, jeder Teil der Versuchsanordnung ist vollüberlegt.

Die physikalisch-technische Untersuchung keramischer Kaoline

Von

Dr. Johannes Stark

o. Universitätsprofessor für Physik

VI, 145 Seiten mit 40 Abbildungen. 1922. Grundzahl 4

Das Buch ist nach seinem Ursprunge sowohl für den Wissenschaftler, wie für den Praktiker bestimmt. Jenem, vor allem dem Physiker soll es ein neues fruchtbares Feld für seine Forschung erschließen helfen; diesem soll es eine Hilfe sein für die Urteilsbildung und Betriebsführung in der keramischen Praxis.

Die gegenwärtige Krisis in der deutschen Physik

Von

Dr. Johannes Stark

o. Universitätsprofessor für Physik

VI, 32 Seiten. 1922. Grundzahl 0,8

Die deutsche Physik macht gegenwärtig eine Krisis durch. Es kämpfen in ihr zwei Richtungen miteinander; die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins und der Dogmatismus der Quantentheorie. Die vorliegende Schrift hat die Aufgabe, durch die rückhaltlose Kritik von experimenteller Seite her die Entwicklung der gegenwärtigen Krisis in der deutschen Physik zu beschleunigen. Als aktuelles Thema wird die Schrift in Physikerkreisen großem Interesse begegnen.

* Der deutsche Verkaufspreis ergibt sich aus Multiplikation der Grundzahl mit der jeweils geltenden Schlüsselzahl. Letzterer betrug am 6. Dezbr. 1922 400. Lieferung nach dem Ausland zu der Währung des betr. Landes. Preis = Grundzahl = Schweiz. Fr.

Seite

[illegible] Jaus. Theorie der Elektronenröhrengeneratoren . . . 505

[illegible] Reichenapfel. Über das ionisierende Röntgenspektrum . . . 548

[illegible] Gerhard Dähnhardt. Beobachtungen über den Funkenschwund . . . 597

[illegible] Hildegard Stechler. Über den Einfluß von geringen Mengen Wasserdampf auf das Funkenpotential in Stickstoff . . . 626

Namenregister zum Jahrgang 1928 . . . 636

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien (Göttingen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 91.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in Korrekturen den beim Druck für die verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls umfangreichere mehr gewünscht werden, so muß dies spätestens bei Rücksendung der ersten Korrekturbogen an die Druckerei auf denen Rand bemerkt werden. Alle weiteren, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bitten wir an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Autorenkorrektur. Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist bedarf der Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Redaktionen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung der Abbildungen auf besonderen Wunsch bereitwilligst bereit, in den Manuskripten selbst auszuführen. Da die Figuren meist möglichst in den Text eingedruckt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Titel sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in den Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, des Ortes, Bandes und Jahrganges anzubringen.

1922. № 23/24.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 69.

1. *Theorie des Elektronenröhrengenerators;* von *Georg Joos.*

(Münchener Habilitationsschrift.)

Inhalt: 1. Einleitung. 2. Die Bedingungen für das Einsetzen der Schwingungen. 3. Berechnung der Amplitude im stationären Zustand unter Vernachlässigung des Gitterstroms. 4. Der Einfluß des Gitterstroms. 5. Übertragung der Ergebnisse auf andere Schaltungen.

1. Einleitung.

a) Die allgemeinen Eigenschaften der Glühkathodenröhren mit Gitter:

Die Elektronenröhre mit Gitter (schematische Darstellung Fig. 1) ist zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel nicht nur in der drahtlosen Telegraphie, sondern auch in den verschiedensten Zweigen der Experimentalphysik geworden. Betreffs eingehender Darstellung ihrer Eigenschaften sei auf die Arbeiten von Barkhausen[1]) und das Buch von Möller[2]) verwiesen. Für die vorliegende Untersuchung sind folgende Punkte von Wichtigkeit:

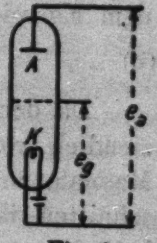


Fig. 1.

1. Der von der Glühkathode ausgehende Strom freier Elektronen, der Emissionsstrom i_e, ist eine Funktion der Steuerspannung e_{st}, welche sich aus der Gitterspannung e_g und der Anodenspannung e_a annähernd linear zusammensetzt:

$$(1)\quad e_{st} = e_g + De_a, \qquad (2)\quad i_e = f(e_{st}) = f(e_g + De_a).$$

Der Faktor D, der „Durchgriff" der Anode ist nahezu konstant, d. h. von e_g und e_a unabhängig und von der Größenordnung einiger Prozente. Die Kleinheit von D hat zur Folge, daß eine kleine Änderung von e_g einer vielmal größeren

1) H. Barkhausen, Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie 14. S. 27. 1919; 16. S. 82. 1920; 18. S. 402. 1921.

2) H. G. Möller, Die Elektronenröhren, Braunschweig 1920.

Änderung von e_a äquivalent ist, eine Tatsache, auf der alle Anwendungen der Röhre beruhen.

2. Ist die Steuerspannung so groß, daß alle von der Kathode ausgesandten Elektronen entweder das Gitter oder die Anode erreichen, so vermag eine weitere Steigerung der Steuerspannung kein Anwachsen des Stroms mehr hervorzurufen, man hat Sättigungsstrom, der mit J_s bezeichnet wird. Der Sättigungsstrom hängt nur ab von der Ergiebigkeit der Elektronenquelle und diese bei gegebenen Apparatdimensionen von der Temperatur des Glühdrahts. Solange sie konstant gehalten wird, bleibt der Sättigungsstrom unverändert.

3. Der größte Teil der emittierten Elektronen fliegt durch die Maschen des Gitters durch zur Anode und erzeugt den Anodenstrom i_a. Bei positivem Gitter, und insbesondere dann, wenn das Gitterpotential dem der Anode nahe kommt, wird jedoch ein wesentlicher Teil der Elektronen vom Gitter selbst aufgefangen und gibt Anlaß zu einem Gitterstrom i_g. Dabei muß immer die Summe von Anoden- und Gitterstrom gleich dem Emissionsstrom sein:

$$i_e = i_a + i_g. \tag{3}$$

Da der Gitterstrom die Verhältnisse beim Röhrengenerator ziemlich verwickelt gestaltet und er sich durch besondere Maßnahmen herabdrücken läßt, wollen wir in den ersten Abschnitten ihn vernachlässigen und erst nachher die Modifikationen untersuchen, welche er an den bis dahin gefundenen Ergebnissen hervorruft.

b) Analytische Darstellung der Abhängigkeit des Emissionsstroms von der Gitterspannung:

Die Gleichung (2):

$$i_e = f(e_g + De_a) = f(e_{st})$$

stellt in einem e_g, i_e-System eine Schar von Kurven („Kennlinien") dar, welche den in Fig. 2 dargestellten Verlauf haben. Wegen der linearen Zusammensetzung von e_{st} aus e_g und e_a erhält man die Kurven für verschiedene e_a aus einer einzigen durch Parallelverschiebung in Richtung der e_g-Achse. Als Normalkurve wollen wir diejenige auswählen, deren Wendepunkt in die i_e-Achse fällt, die zu ihr gehörige Anodenspannung

wollen wir mit E_a^* bezeichnen. Mit dieser Festsetzung wird die Gleichung unserer Schar, da im Wendepunkt $i_e = \frac{J_s}{2}$;

$$i_e = \frac{J_s}{2} + F[e_g + D(e_a - E_a^*)]. \tag{2a}$$

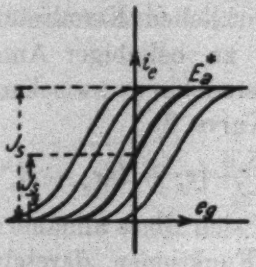


Fig. 2.

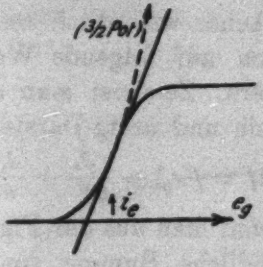


Fig. 3.

Es handelt sich nun darum, für den Verlauf der Kurven einen einfachen analytischen Ausdruck zu finden. Die von Langmuir und Schottky entwickelte Theorie gibt für kleinen Emissionsstrom:

$$i_e = \text{const}\, e_{at}^{3/2}. \tag{4}$$

Diese Gleichung, die der Form (2) entspricht, gilt aber, wie Fig. 3 zeigt, nur von $i_e = 0$ bis ungefähr zum Wendepunkt. Für größere Steuerspannungen ergibt sie statt eines Umbiegens zum Sättigungsstrom ein rasches Anwachsen ins Unendliche. Sie ist also für die Behandlung von Problemen, bei denen der obere Teil der Kennlinie benutzt wird — und dies ist beim Generator stets der Fall —, ganz unbrauchbar.

Vallauri[1]), der zum ersten Mal den Röhrengenerator analytisch untersuchte, ersetzte die Kennlinie durch ihre Tangente im Wendepunkt. Auch dieser Ansatz versagt, wie die Figur zeigt, sowohl nach der oberen als nach der unteren Grenze. Voraussetzung für eine Theorie des Röhrengenerators ist aber eine im ganzen Bereich gültige Darstellung der Kennlinie. Eine solche erhält man folgendermaßen: Der Verlauf der Kennlinie (Kurve 1 in Fig. 4) hat eine große Ähnlichkeit mit dem einer arctg-Funktion. Durch affine Transformation einer einfachen arctg-Funktion läßt sich nun immer eine solche herstellen, welche mit der Kennlinie gemeinsam hat: 1. die

1) G. Vallauri, Jahrbuch der drahtl. Telegraphie 12. S. 349. 1917.

Steigung im Wendepunkt S_0; 2. die Höhe J_s. Eine solche Funktion lautet, wie man sich leicht überzeugt:

$$(5) \qquad i_s = \frac{J_s}{2} + \frac{J_s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{S_0 \pi}{J_s} [e_g + D(e_a - E_a^*)].$$

Diese Darstellung (Kurve 2, Fig. 4) weicht nur in der Nähe der e_g-Achse wesentlich von der wirklichen Kennlinie ab. Sie läßt sich auf folgende Weise bis zu beliebiger Annäherung verbessern: Zeichnet man die Differenzkurve zwischen wahrer Kennlinie und arctg-Darstellung (Kurve 3):

$$\Delta f = f(e_g) - \left\{\frac{J_s}{2} + \frac{J_s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{S_0 \pi}{J_s} [e_g + D(e_a - E_a^*)]\right\},$$

so erkennt man aus der Figur, daß sich diese annähernd durch eine endliche Summe von arctg-Funktionen darstellen läßt, deren Wendepunkte in Richtung der Abszissenachse verschoben sind. Man erhält sie, wenn man die Mittelpunkte der arctg-Funktionen in die Wendepunkte der Differenzkurve legt (Abszisse l_i), ihre Steigung S_i in diesen Punkten gleich der der Differenzkurve und ihre Höhe h_i gleich dem Ordinatenunterschied der beiden Extrema, zwischen denen der betreffende Wendepunkt liegt, macht. In Fig. 4 sind so die Kurven a und b gefunden und zur Übersicht nach oben verschoben herausgezeichnet. Will man die Annäherung noch weiter treiben, so kann man eine zweite Differenzkurve zeichnen, welche den Unterschied zwischen der ersten Kurve und ihrer arctg-Darstellung gibt und für sie wieder eine Summe von arctg-Funktionen setzen. In dieser Weise kann man fortfahren, bis der gewünschte Genauigkeitsgrad erreicht ist. Bricht man dann ab und bringt rückwärts die durch arctg-Funktionen ausgedrückten Korrekturen an, so erhält man eine der Fourierreihe ähnliche Darstellung:

$$(6) \qquad i_s = \sum_0^\infty \frac{h_i}{2} + \frac{h_i}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{S_i \pi}{h_i} [e_g + D(e_a - E_a^*) - l_i],$$

wobei $$h_0 = J_s, \quad l_0 = 0.$$

Die Kurve 4 in Fig. 4, welche von der wirklichen Kennlinie nur noch wenig abweicht, wird im Maßstab der Figur dargestellt durch:

$$i_s = 8 + \frac{16}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2{,}58\,\pi}{16} e_g + 0{,}7 - \frac{1{,}4}{\pi} \operatorname{arctg} \pi\, 0{,}2\,(e_g + 7{,}2)$$
$$- 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} (e_g + 2{,}3).$$

Für die Koeffizienten der arctg-Reihe läßt sich aber keine den Ausdrücken für die Fourierkoeffizienten analoge Formel angeben, sie müssen nach der oben angegebenen Regel bestimmt werden; auch möge, was die Konvergenz des Verfahrens betrifft, der Hinweis auf das praktisch schon nach wenigen Gliedern eintretende enge Anschmiegen genügen.

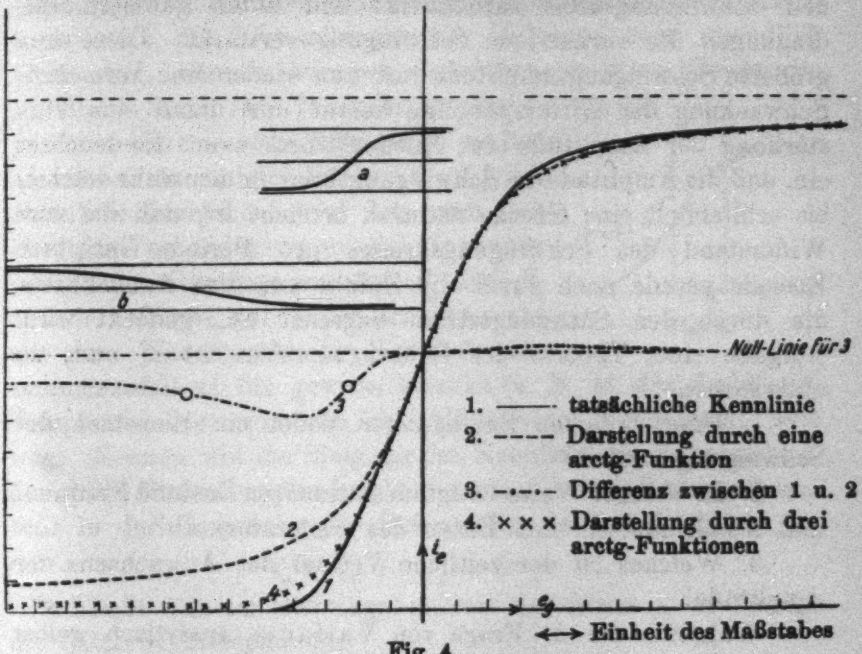


Fig. 4.

c) Die Wirkungsweise des Röhrengenerators:

Eine der wichtigsten Anwendungen der Elektronenröhre ist die zur Erzeugung elektrischer Schwingungen. Dabei sind zu diesem Zweck äußerlich sehr verschiedene Schaltungen in Gebrauch. Sie lassen sich aber fast alle aus der in Fig. 5 gezeichneten, physikalisch sehr durchsichtigen Schaltung[1]) ableiten, welche wir daher zunächst allein untersuchen wollen. Ihre Wirkungsweise ist folgende: Eine im Schwin-

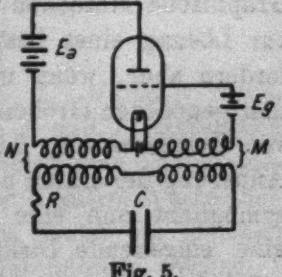


Fig. 5.

1) Erste Veröffentlichung von A. Meissner, The Electrician, 31. Juli 1914.

gungskreis, etwa durch Einschalten des Anodenstroms, entstandene Schwingung erzeugt infolge der Koppelung M eine wechselnde Gitterspannung e_g, durch welche der Anodenstrom i_a im Takt der Schwingung verstärkt oder geschwächt wird. Wir haben also auch im Anodenkreis einen Wechselstrom gleicher Frequenz, der seinerseits durch die Koppelung N wieder auf den Schwingungskreis zurückwirkt und unter gewissen Bedingungen die vorhandene Schwingung verstärkt. Diese vergrößerte Schwingungsamplitude ruft nun wieder eine vermehrte Schwankung der Gitterspannung hervor und damit eine Verstärkung der Amplitude des Anodenstroms usw. Es leuchtet ein, daß die Amplitude im Schwingungskreis immer mehr wächst, bis schließlich eine Grenze dadurch erreicht ist, daß die vom Widerstand des Schwingungskreises pro Periode verzehrte Energie gerade noch durch die Zufuhr aus dem Anodenkreis, die durch den Sättigungsstrom begrenzt ist, gedeckt wird. Aufgabe einer Theorie des Röhrengenerators ist es nun, zu untersuchen:

1. Unter welchen Bedingungen findet ein Einsetzen der Schwingungen statt?

2. In welcher Weise hängt im stationären Zustand Frequenz und Amplitude von den Daten des Generators ab?

3. Welches ist der zeitliche Verlauf des Anwachsens der Amplitude?

Während die 1. Frage von Vallauri analytisch gelöst wurde, gibt es für die Bestimmung der stationären Amplitude bisher nur graphische Methoden (z. B. die von Möller). Graphische Methoden sind nun, ganz allgemein gesprochen, zur Lösung eines bestimmten Einzelfalls sehr brauchbar, erfordern aber, wenn man die Abhängigkeit des Resultats von den gegebenen Größen diskutieren will, einen großen Aufwand von Zeichenarbeit, da man die ganze Konstruktion für jede Änderung der Daten neu durchführen muß. Unser arctg-Ansatz ermöglicht nun eine analytische Lösung des Problems, die eine eingehende Diskussion des Resultats gestattet und ermöglicht uns weiter auch, die dritte Frage zu beantworten. Ehe wir aber an die Lösung dieser Probleme herantreten, wollen wir für die zugrunde gelegte Schaltung die Bedingung des Einsetzens untersuchen.

2. Die Bedingung für das Einsetzen der Schwingungen.

a) Aufstellung der Differentialgleichungen:

Die Frage nach dem Einsetzen ist offenbar identisch mit folgender:

Unter welchen Bedingungen wächst eine im Schwingungskreis vorhandene unendlich kleine Amplitude zu endlicher Größe an? Da bei unendlich kleiner Amplitude im Schwingungskreis auch die Schwankungen der Gitterspannung unendlich klein sind, können wir zur Beantwortung dieser Frage die Kennlinie durch ihre Tangente im Ruhepunkt ersetzen. Als Ruhepunkt wollen wir dabei denjenigen Punkt $\{E_g, J_a\}$ der Kennlinie bezeichnen, auf dem man sich ohne das Vorhandensein von Schwingungen infolge der Gleichspannungen E_g und E_a befindet. Dieser Ruhepunkt braucht nicht mit dem Wendepunkt der Kennlinie zusammenzufallen; für gewisse Zwecke (z. B. in der drahtlosen Telephonie) legt man ihn absichtlich vom Wendepunkt weit weg. Nennen wir die Steigung der Kennlinie im Ruhepunkt S, den dabei fließenden Anodengleichstrom J_a, so wird unsere Kennlinie in der Umgebung des Ruhepunkts dargestellt durch:

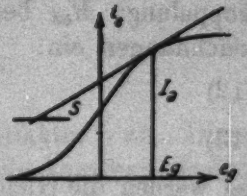


Fig. 6.

$$i_a = J_a + S(e_g + D e_a). \tag{7}$$

Fließt nun im Schwingungskreis der Strom i, so beträgt die Gitterwechselspannung

$$e_g = -M\frac{di}{dt} \tag{8}$$

und die Anodenwechselspannung:

$$e_a = -N\frac{di}{dt} - L_a\frac{di_a}{dt}. \tag{9}$$

Dabei ist über das Vorzeichen von L, L_a, M und N zu bemerken: Während die Selbstinduktionen L und L_a wesentlich positive Größen sind, kommt den wechselseitigen Induktionskoeffizienten M und N das positive oder negative Vorzeichen zu, je nachdem die beiden gekoppelten Spulen im gleichen oder entgegengesetzen Sinn vom Strom durchflossen werden.

Mit den für e_g und e_a gefundenen Werten wird der Anodenstrom:

$$i_a = J_a + S\left(-(M + DN)\frac{di}{dt} - DL_a\frac{di_a}{dt}\right). \tag{10}$$

Für den Schwingungskreis gilt die Beziehung:

$$L\frac{di}{dt} + N\frac{di_a}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0 \tag{11}$$

oder:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + N\frac{d^2i_a}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \tag{11a}$$

Wie man aus (10) und (11) erkennt, tritt in den Differentialgleichungen für Schwingungs- und Anodenkreis M nur in der Kombination $M + DN$ auf, die wir als „effektive Gitterkoppelung" M_{eff} bezeichnen wollen. Führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$SM_{\text{eff}} = b \tag{12}$$

$$SDL_a = c, \tag{13}$$

so werden die Gleichungen für Schwingungs- und Anodenkreis:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + N\frac{d^2i_a}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0, \tag{11a}$$

$$b\frac{di}{dt} + c\frac{di_a}{dt} + i_a - J_a = 0. \tag{10a}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist i als Funktion der Zeit zu ermitteln. Wir werden hierzu 2 Wege einschlagen, deren Ergebnisse sich ergänzen, einen rein mathematischen und einen mehr physikalischen.

b) 1. Lösung der Differentialgleichungen (10a) und (11a): Eliminiert man aus (10a) und (11a) i_a, so erhält man:

$$(Lc - Nb)\frac{d^2i}{dt^2} + (L + Rc)\frac{d^2i}{dt^2} + \left(R + \frac{c}{C}\right)\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \tag{14}$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\begin{cases} Lc - Nb = f, \\ L + Rc = g, \\ R + \frac{c}{C} = h, \end{cases} \tag{15}$$

so ergibt sich:

$$f\frac{d^3i}{dt^3} + g\frac{d^2i}{dt^2} + h\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \tag{14a}$$

Als Lösung setzen wir an:

$$i = \mathfrak{R}\{e^{(\varrho + j\omega)t}, \tag{16}$$

wobei ϱ und ω reell sein sollen. Dann bedeutet:

$\varrho > 0$ Anwachsen der Schwingung,
$\varrho < 0$ Erlöschen,
$\varrho = 0$ stationären Zustand.

Durch Einsetzen dieses Wertes für i in (14a) und Trennung des Reellen und Imaginären erhält man die beiden Gleichungen:

$$f\varrho^3 - 3f\varrho\omega^2 + g\varrho^2 - g\omega^2 + h\varrho + \frac{1}{C} = 0, \tag{17}$$

$$3f\varrho^2 - f\omega^2 + 2g\varrho + h = 0. \tag{18}$$

Aus der ersten findet man:

$$\omega^2 = \frac{f\varrho^3 + g\varrho^2 + h\varrho + 1/C}{3f\varrho + g}. \tag{19}$$

Die Frequenz hängt also von dem Zeitfaktor ϱ ab. Dieser ist während des Anschwingungsvorgangs nicht konstant, sondern nimmt, da sich ja schließlich eine stationäre Amplitude einstellt, zu null ab, infolgedessen muß die Frequenz während des Anschwingens etwas variieren. Dies kann von praktischer Bedeutung werden für die Schnelltelegraphie, wenn die Zeichen durch Unterbrechen gegeben werden. Soll nämlich, wie es hier der Fall ist, in etwa $^1/_{100}$ Sekunde die volle Amplitude, die beispielsweise das 1000-fache der beim Einschalten entstehenden Amplitude betrage, erreicht werden, so wird der Mittelwert von ϱ von der Größenordnung 10^3. Aber auch dann ergeben sich, wie eine Überschlagsrechnung mit den gebräuchlichen Dimensionen zeigt, infolge der Kleinheit der Koeffizienten f, g, h, gegenüber $1/C$ und von f gegen g, Änderungen, die 1 Promille kaum je übersteigen dürften. Im Grenzfall des stationären Zustands wird:

$$\omega^2_{\text{stat.}} = \frac{1}{Cg} = \frac{1}{LC\left(1 + \frac{RSDL_a}{L}\right)} = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{RSDL_a}{L}}. \tag{19a}$$

Die Frequenz ist also kleiner als die Eigenfrequenz ω_0 des Schwingungskreises. Setzen wir (19) in (18) ein, so erhalten wir eine Gleichung für ϱ. Da uns aber nur der Grenzfall zwischen positivem und negativem ϱ interessiert, genügt es die Umgebung von $\varrho = 0$ zu betrachten, so daß wir alle höheren Potenzen von ϱ gegen die erste vernachlässigen können. Dann erhält man:

$$\varrho = \frac{f/C - hg}{2(g^2 + fh)}. \tag{20}$$

Nehmen wir zunächst an, der Nenner sei positiv, so muß für $\varrho > 0$:

$$\frac{f}{C} > hg \tag{21}$$

sein oder:

$$\frac{SDLL_a}{C} - \frac{SNM_{\text{eff.}}}{C} > \left(R + \frac{SDL_a}{L}\right)(L + RSDL_a). \tag{21a}$$

Da rechts lauter positive Größen stehen und links das erste Glied mit dem kleinen Faktor D behaftet ist, während LL_a und $NM_{\text{eff.}}$ von derselben Größenordnung sind, kann die Ungleichung nur erfüllt sein, wenn das Produkt $NM_{\text{eff.}}$ negativ ist, d. h. entweder N oder $M_{\text{eff.}}$, und damit M, negatives Zeichen hat. Die beiden Koppelungen N und M müssen also in entgegengesetzter Weise auf den Schwingungskreis wirken. Mit $NM_{\text{eff.}} < 0$ werden dann wegen der Bedeutung von f und h alle Größen im Nenner positiv.

Die andere Möglichkeit (negativer Nenner und damit positives Zeichen von $NM_{\text{eff.}}$) scheidet aus, da sie, abgesehen davon, daß sie zu kaum realisierbaren Größenverhältnissen zwischen L, L_a, N und $M_{\text{eff.}}$ führt, mit den Bedingungen für den stationären Zustand unvereinbar ist, wie im 3. Abschnitt gezeigt werden wird.

b) 2. Lösung des Gleichungssystems (10a) und (11a):

Für den stationären Zustand wollen wir die Lösung nochmals auf etwas verschiedene Weise durchführen, was uns neue wichtige Beziehungen liefert. Mit Rücksicht auf spätere ähnliche Rechnungen, bei denen die Verwendung komplexer Größen eine unnötige Erschwerung bedeuten würde, wollen wir schon jetzt die periodischen Funktionen durch sin und cos statt durch Exponentialfunktionen darstellen. Wir nehmen nun an, im Schwingungskreis fließe ein einfacher Wechselstrom von unendlich kleiner Amplitude:

$$i = \mathfrak{A} \sin \omega t, \tag{22}$$

wobei $\mathfrak{A}$ klein sei.

Der Anodenstrom, der ja durch das Gitter im Takt der Schwingungen gesteuert wird, muß ein Wechselstrom gleicher

Frequenz und ebenfalls sehr kleiner Amplitude sein, über dessen Phase wir aber noch nichts wissen. Wir setzen daher an:

$$i_a = J_a + \mathfrak{C}\sin\omega t + \mathfrak{D}\cos\omega t. \tag{23}$$

Setzen wir die Werte für i und i_a in (10a) und (11a) ein, so ergibt sich:

$$\begin{cases} L\mathfrak{A}\omega^2\sin\omega t - N\mathfrak{D}\omega^2\cos\omega t - N\mathfrak{C}\omega^2\sin\omega t \\ \qquad + R\mathfrak{A}\omega\cos\omega t + \frac{\mathfrak{A}}{C}\sin\omega t. \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{D}\cos\omega t + \mathfrak{C}\sin\omega t + b\mathfrak{A}\omega\cos\omega t - c\mathfrak{D}\omega\sin\omega t \\ \qquad + c\mathfrak{C}\omega\cos\omega t = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Diese Gleichungen sind für jedes t befriedigt, wenn:

$$-L\mathfrak{A}\omega^2 - N\mathfrak{C}\omega^2 + \frac{\mathfrak{A}}{C} = 0, \tag{26}$$

$$-N\mathfrak{D}\omega^2 + R\mathfrak{A}\omega = 0, \tag{27}$$

$$\mathfrak{D} + b\mathfrak{A}\omega + c\mathfrak{C}\omega = 0, \tag{28}$$

$$\mathfrak{C} - c\mathfrak{D}\omega = 0. \tag{29}$$

Aus (26) ergibt sich:

$$\omega^2_{st} = \frac{1}{LC\left(1 + \frac{N\mathfrak{C}}{L\mathfrak{A}}\right)}. \tag{30}$$

Aus (27) und (29) folgt:

$$N\mathfrak{C} = R\mathfrak{A}c, \tag{31}$$

wodurch die Übereinstimmung mit (19a) hergestellt ist. Die Gleichung (30) gibt uns eine anschauliche Deutung der Frequenzänderung: $\mathfrak{C}$ ist die mit dem Strom im Schwingungskreis phasengleiche Komponente des Anodenstroms, sie ändert die Frequenz. Dies können wir folgendermaßen verstehen: Zeichnen wir in einem Vektordiagramm (Fig. 7) für den Schwingungskreis die Vektoren des Stroms und der an den Enden von R, C und L herrschenden Spannungen, so setzt sich letztere aus 2 Teilen zusammen, aus der infolge der Selbstinduktion L vorhandenen und aus der durch die wechselseitige Induktion N vom Anodenkreis induzierten Spannung. Diese hat 2 Komponenten, die von $\mathfrak{D}$ hervorgerufene hat die

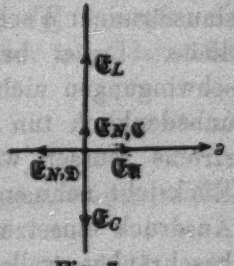


Fig. 7.

Richtung von $\mathfrak{A}$ und kompensiert die Spannung am Widerstand, die von $\mathfrak{C}$ hervorgerufene hat dagegen die Richtung von $\mathfrak{E}_L$, bewirkt also dasselbe, was eine Vermehrung der Selbstinduktion verursachen würde: eine Verkleinerung der Frequenz.

Da die Gleichungen (28), (29) und (31) 3 lineare homogene Gleichungen für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ darstellen, muß ihre Determinante verschwinden, was ausgerechnet ergibt:

$$(N b + R c^2)\,\omega^2 + R = 0, \tag{32}$$

oder

$$[S M_{\text{eff.}} N + (S D L_a)^2 R]\,\omega^2 + R = 0. \tag{32a}$$

Dies ist die der Gleichung (21a) entsprechende Bedingung für das Einsetzen der Schwingungen, wenn dort für den Grenzfall das Zeichen $>$ durch das Gleichheitszeichen ersetzt wird. In dieser Form leistet uns die Bedingungsgleichung für das Einsetzen bessere Dienste als die weniger durchsichtige Gleichung (21a). Ihre ausführliche Diskussion wollen wir aber erst im Zusammenhang mit den Formeln für die stationäre Amplitude durchführen, welche wir nun berechnen wollen.

8. Berechnung der Amplitude im stationären Zustand unter Vernachlässigung des Gitterstroms.

a) Durchführung der Rechnung mittels des einfachen arctg-Ansatzes unter Vernachlässigung der Anodenkreisselbstinduktion: Wir nehmen an, daß im Schwingungskreis ein rein sinusförmiger Wechselstrom, jetzt aber von endlicher Amplitude $\mathfrak{A}$ fließe. Dabei berücksichtigen wir etwa vorhandene Oberschwingungen nicht, was wir bei schwach gedämpften Kreisen unbedenklich tun dürfen. Bei der Berechnung des Anodenstroms müssen wir aber jetzt auf die Form der Kennlinie Rücksicht nehmen und den für sie in Gleichung (6) gefundenen Ausdruck einsetzen, wobei wir uns zunächst auf das Hauptglied beschränken wollen. Dann ist:

$$\begin{cases} i_a = \dfrac{J_s}{2} + \dfrac{J_s}{\pi}\,\text{arctg}\,\dfrac{S_0\,\pi}{J_s}\left[E_g + \mathfrak{D}\,(E_a - E_a^*) - M_{\text{eff.}}\dfrac{di}{dt}\right. \\ \qquad\qquad \left. - D L_a \dfrac{di_a}{dt}\right]. \end{cases} \tag{33}$$

Führen wir jetzt die Abkürzungen ein:

$$(34)\qquad \begin{cases} \frac{S_0\pi}{J_a}[E_g + \mathfrak{D}(E_a - E_a^*)] = k, \\ \frac{S_0\pi}{J_a} M_{\text{eff.}} = \frac{b_0\pi}{J_a} = \beta, \\ \frac{S_0\pi}{J_a}\mathfrak{D}\, L_a = \frac{c_0\pi}{J_a} = \gamma, \end{cases}$$

so wird

$$(33a)\qquad i_a = \frac{J_a}{2} + \frac{J_a}{\pi}\operatorname{arctg}\left(k - \beta\frac{di}{dt} - \gamma\frac{di_a}{dt}\right).$$

Diese Gleichung können wir auf eine einfachere Form bringen, wenn wir

$$(35)\qquad y = \frac{\pi\left(i_a - \frac{J_a}{2}\right)}{J_a}$$

als neue Variable einführen. Mit ihr lautet sie:

$$(36)\qquad c_0\frac{dy}{dt} + \operatorname{tg} y = k - \beta\frac{di}{dt}$$

und wegen der über i gemachten Annahme:

$$(36a)\qquad c_0\frac{dy}{dt} + \operatorname{tg} y = k - \beta\mathfrak{A}\,\omega\cos\omega t.$$

Setzen wir noch:

$$-\beta\mathfrak{A}\,\omega = \mathfrak{B},$$

so wird (36a) zu:

$$(36b)\qquad c_0\frac{dy}{dt} + \operatorname{tg} y = k + \mathfrak{B}\cos\omega t.$$

Eine durch einen geschlossenen Ausdruck darstellbare Lösung dieser transzendenten Differentialgleichung läßt sich nicht angeben. Nun ist aber der Koeffizient von dy/dt wegen des Faktors D eine kleine Größe, deren Einfluß wir folgendermaßen abschätzen können: Schreiben wir:

$$\operatorname{tg} y = y\left(\frac{\operatorname{tg} y}{y}\right) = r\,y,$$

so hat der Faktor r für $y = 0$ seinen kleinsten Wert: 1. Nun hat die Gleichung:

$$(36c)\qquad c_0\frac{dy}{dt} + r\,y = k + \mathfrak{B}\cos\omega t,$$

die formell dieselbe ist, wie diejenige für einen Wechselstromkreis mit Selbstinduktion und Ohmschem Widerstand, für konstantes r die wohlbekannte Lösung:

$$(36\,d)\quad y = \text{const} + \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{c_0^2\omega^2 + r^2}} \cos(\omega t - \varphi),\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{c_0\omega}{r}\,.$$

Bei den in Praxis vorkommenden Dimensionen wird aber, auch wenn man für r seinen kleinsten Wert nimmt, $c_0\omega$ immer noch sehr klein gegen r. Wir erhalten daher eine brauchbare Näherung, wenn wir zunächst $c_0 = 0$ setzen. Dann vereinfacht sich die Gleichung für den Anodenstrom, bzw. für y zu:

$$(38)\qquad y = \operatorname{arctg}(k + \mathfrak{B}\cos\omega t).$$

Die rechte Seite wollen wir in eine Fourierreihe entwickeln, von der uns zunächst nur der Koeffizient von $\cos\omega t$ interessiert:

$$(39)\quad y = \operatorname{arctg}(k + \mathfrak{B}\cos\omega t) = K(k, \mathfrak{B}) + \Phi(k, \mathfrak{B})\cos\omega t\,.$$

Φ läßt sich, wie am Schluß gezeigt wird, nach den bekannten Formeln für die Fourierkoeffizienten berechnen. Damit wird wegen (35) der Anodenstrom i_a:

$$(40)\qquad i_a = \frac{J_s}{2} + \frac{J_s}{\pi} K(k, \mathfrak{B}) + \frac{J_s}{\pi}\Phi(k, \mathfrak{B})\cos\omega t\,.$$

Setzt man diesen Ausdruck für i_a in die für den Schwingungskreis geltende Gleichung (11) ein, so erhält man durch Vergleich der sin- und cos-Glieder:

$$(41)\qquad \omega^2 = \frac{1}{LC}\,,$$

$$(42)\qquad \frac{J_s}{\pi} N\omega\,\Phi(k, \mathfrak{B}) = R\mathfrak{A}\,.$$

Wir erhalten keine Abweichung von der Eigenfrequenz des Kreises, weil wir die Anodenkreisselbstinduktion nicht berücksichtigt haben. Dies Ergebnis wird später noch verbessert. Die Gleichung (42) stellt die Bestimmungsgleichung für die Amplitude $\mathfrak{A}$ dar. Ersetzen wir gemäß (37) rechts $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$, so wird:

$$(42\,a)\qquad \Phi(k, \mathfrak{B}) = -\frac{R\mathfrak{B}}{b_0 N\omega^2} = -\frac{R}{S_0 M_{\text{eff}}. N\omega^2}\,.$$

Wir erhalten aus ihr zunächst $\mathfrak{B}$ als Abszisse des Schnitts der Kurve:

$$y = \Phi(k, \mathfrak{B}),$$

und der Geraden:

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot \mathfrak{B} = -\frac{R\mathfrak{B}}{S M_{\text{eff}}. N\omega^2}\,.$$

Durch diese Form ist erreicht, daß alle Daten des Generators in den Ausdruck für die Steigung der Geraden gelegt sind, so daß man mit einer einzigen Zeichnung der Φ-Kurven alle Fälle untersuchen kann. Aus $\mathfrak{B}$ findet man dann vollends leicht $\mathfrak{A}$ vermöge (37):

$$\mathfrak{A} = -\frac{\mathfrak{B} J_s}{\pi S_0 M_{\text{eff}} \omega} .$$

Es ist nun noch die Berechnung des Koeffizienten Φ nachzuholen. Es ist:

$$\Phi(k, \mathfrak{B}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} (k + \mathfrak{B} \cos x) \cdot \cos x \, dx , \tag{43}$$

durch partielle Integration folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(k, \mathfrak{B}) = &-\frac{1}{\pi} \Big[\sin x \operatorname{arctg} (k + \mathfrak{B} \cos x) \Big]_0^{2\pi} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{B} \sin^2 x \, dx}{1 + (k + \mathfrak{B} \cos x)^2} . \end{aligned} \right. \tag{44}$$

Da der erste Ausdruck verschwindet, bleibt:

$$\Phi(k, \mathfrak{B}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{B} \sin^2 x \, dx}{1 + (k + \mathfrak{B} \cos x)^2} . \tag{44a}$$

Dies Integral läßt sich verhältnismäßig einfach auf komplexem Weg auswerten.

Drücken wir nämlich mittels der Eulerschen Formel sin und cos durch e^{ix} aus und führen e^{ix} als neue Variable z ein, so verwandelt sich unser Integral in ein Linienintegral längs des Einheitskreises der komplexen Zahlenebene (Fig. 7), das lautet:

$$\left\{ \begin{aligned} &\Phi(k, \mathfrak{B}) \\ &= -\frac{\mathfrak{B}}{4\pi i} \oint \frac{(z-1)^2 \, dz}{z \left[\frac{\mathfrak{B}^2}{4} z^4 + k\mathfrak{B} z^3 + \left(1 + k^2 + \frac{\mathfrak{B}^2}{2}\right) z^2 + k\mathfrak{B} z + \frac{\mathfrak{B}^2}{4} \right]} . \end{aligned} \right. \tag{45}$$

Um auf dieses den Cauchyschen Satz anwenden zu können, müssen wir die vom Integrationsweg umschlossenen Unendlichkeitsstellen z_i des Integranden, d. h. die Nullstellen des Nenners, bestimmen und die Koeffizienten A_i der Glieder $\frac{1}{z - z_i}$ der an diesen Punkten gültigen Laurentschen Reihe berechnen. Dann ist bekanntlich der Wert des Integrals:

$$\Phi(k, \mathfrak{B}) = -\frac{\mathfrak{B}}{4\pi i} \cdot 2\pi i \sum A_i. \tag{46}$$

Die Nullstellen des Nenners sind:

$$\begin{cases} z_0 = 0, \\ z_1 = \dfrac{-(k+i) + \sqrt{k^2 - \mathfrak{B}^2 - 1 + 2ki}}{\mathfrak{B}}, \\ z_2 = \dfrac{-(k-i) + \sqrt{k^2 - \mathfrak{B}^2 - 1 - 2ki}}{\mathfrak{B}}, \\ z_3 = \dfrac{-(k-i) - \sqrt{k^2 - \mathfrak{B}^2 - 1 - 2ki}}{\mathfrak{B}}, \\ z_4 = \dfrac{-(k+i) - \sqrt{k^2 - \mathfrak{B}^2 - 1 + 2ki}}{\mathfrak{B}}. \end{cases} \tag{47}$$

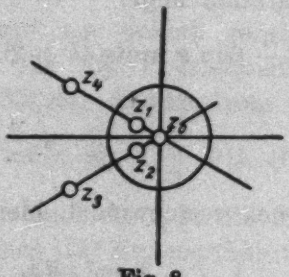


Fig. 8.

Dabei ist wegen des symmetrischen Baues des Nenners:

$$z_1 z_3 = 1, \; z_2 z_4 = 1. \tag{48}$$

Die Punkte z_i müssen also wie in Fig. 7 liegen. Bezeichnen wir den Betrag von z_1 mit ϱ, den arcus von z_1 mit φ, so ist:

$$\begin{cases} z_1 = \varrho\, e^{i\varphi}, \\ z_2 = \varrho\, e^{-i\varphi}, \\ z_3 = \dfrac{1}{\varrho} e^{-i\varphi}, \\ z_4 = \dfrac{1}{\varrho} e^{i\varphi}. \end{cases} \tag{49}$$

Innerhalb des Einheitskreises liegen z_0, z_1, z_2. Bestimmt man durch Partialbruchzerlegung die zugehörigen A_i, so wird:

$$A_0 + A_1 + A_2 = \frac{8\varrho^2}{\mathfrak{B}^2(\varrho^2 - 1)}$$

und damit

$$\Phi(k, \mathfrak{B}) = \frac{4\varrho^2}{\mathfrak{B}(1 - \varrho^2)}.$$

$\varrho^2 = z_1 z_2$ ist noch zu berechnen. Setzt man:

$$\sqrt{k^2 - \mathfrak{B}^2 - 1 + 2ki} = \sigma e^{i\psi},$$

so wird:

$$\sigma = \sqrt[4]{(k^2 - \mathfrak{B}^2 - 1)^2 + 4k^2} \tag{51}$$

und

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{k}{k^2 - \mathfrak{B}^2 - 1}. \tag{52}$$

Damit wird:

$$\varrho^2 = \frac{1}{\mathfrak{B}^2}\left\{\sigma^2 - 2\sigma(k\cos\psi + \sin\psi) + k^2 + 1\right\}. \tag{53}$$

Die folgenden Tabellen geben die so berechneten Werte von $\Phi(k, \mathfrak{B})$. Die Figg. 9 und 9a geben eine graphische Darstellung ihres Verlaufs.

Tabelle der Funktion $\Phi(k, \mathfrak{B}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{B}\sin^2 x\, dx}{1 + (k + \mathfrak{B}\cos x)^2}$.

k ↓ $\mathfrak{B}$ →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13
0	0,828	1,236	1,441	1,561	1,640	1,694	1,734	1,765	1,791	1,810	1,854
1	0,551	1,053	1,344	1,500	1,603	1,664	1,712	1,750	1,778	1,799	1,845
2	0,283	0,601	1,005	1,325	1,486	1,586	1,646	1,700	1,739	1,774	1,825
3	0,124	0,268	0,588	1,000	1,273	1,443	1,562	1,622	1,679	1,716	1,799
4	0,040	0,139	0,277	0,565	0,951	1,221	1,393	1,506	1,586	1,641	1,758
5		0,094	0,155	0,275	0,540	0,927	1,171	1,344	1,460	1,552	1,695
6		0,066	0,100	0,159	0,271	0,520	0,864	1,124	1,299	1,420	1,626
8		0,020		0,075		0,129		0,480		1,028	1,418
10				0,064		0,073		0,158		0,449	1,150
12				0,042		0,049		0,085		0,194	0,578
14						0,034		0,054		0,084	0,205

Große Werte von k:

k ↓ $\mathfrak{B}$ →	10	20	40	60	100	140	160	180	200	250
20	0,031	0,353	1,680	1,845	1,940					
40		0,016	0,197	1,445	1,815	1,903				
60			0,017	0,258	1,580	1,790	1,840			
80				0,017	1,180	1,630	1,710	1,786		
100				0,008	0,181	1,370	1,550	1,653	1,720	
140						0,158	0,878	1,248	1,420	1,650

Verlauf der Funktion $\Phi(k, \mathfrak{B}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{B} \sin^2 x \, dx}{1 + (k + \mathfrak{B} \cos x)^2}$.

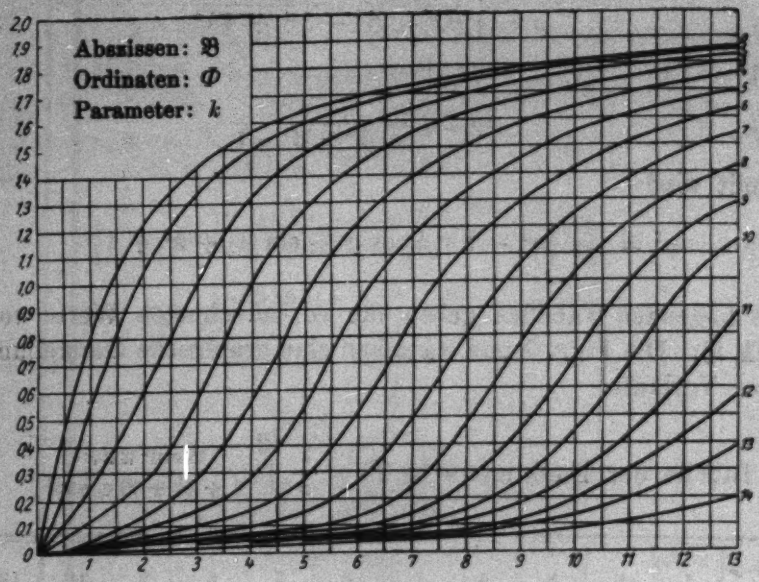


Fig. 9.

Verlauf der Φ-Kurven für große Werte von k.

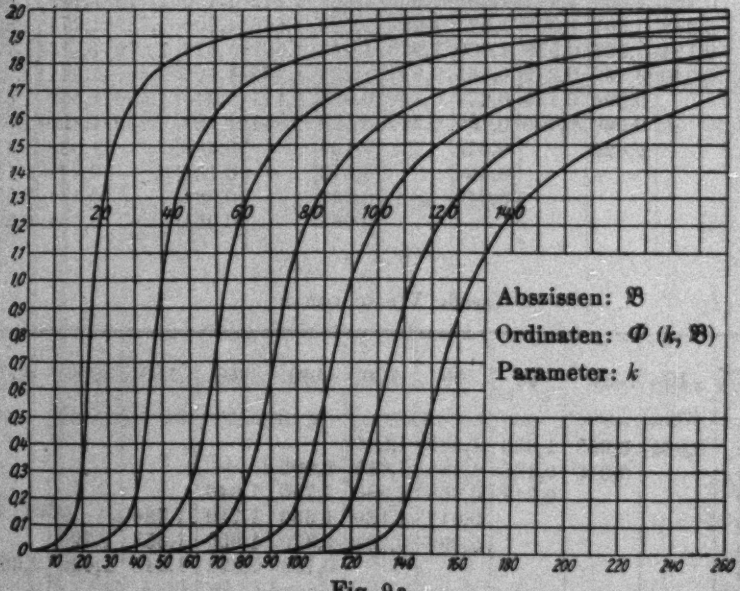


Fig. 9a.

Diese Φ-Kurven unterscheiden sich von den Müllerschen „Schwingkennlinien" prinzipiell darin, daß sie keinerlei Kreis- oder Röhrenkonstanten enthalten, sondern eine bestimmte mathematische Funktion graphisch darstellen, so daß sie für alle Kreise und Röhren verwandt werden können. Sämtliche Kurven haben die Gerade $\mathfrak{B} = 2$ zur Asymptote, denn im Grenzfall ergibt sich für unendlich großes $\mathfrak{B}$ eine „Mäanderkurve" von Höhe π, deren erstes cos-Glied in der Fourierentwicklung den Koeffizienten 2 hat. Ferner ist Φ in bezug auf k eine gerade Funktion, in bezug auf $\mathfrak{B}$ eine ungerade:

$$\begin{cases} \Phi(-k, \mathfrak{B}) = \Phi(k, \mathfrak{B}), \\ \Phi(k, -\mathfrak{B}) = -\Phi(k, \mathfrak{B}). \end{cases} \tag{54}$$

Dies ist physikalisch evident und läßt sich auch rechnerisch leicht beweisen. Für später richtig ist noch die Steigung der Φ-Kurven im Ursprung bei konstantem k, also die Größe

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{B}}\right)_k.$$

Diese finden wir am einfachsten so: Es ist für kleine $\mathfrak{B}$

$$\operatorname{arctg}(k + \mathfrak{B}\cos x) = \operatorname{arctg} k + \frac{\mathfrak{B}\cos x}{1 + (k + \mathfrak{B}\cos x)^2} = K + \Phi(k, \mathfrak{B},)\cos x.$$

$$\Phi(k, \mathfrak{B}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{B}\cos^2 x\, dx}{1 + (k + \mathfrak{B}\cos x)^2},$$

und da $\mathfrak{B}$ klein gegen 1, wird, wenn wir die Kleinheit von $\mathfrak{B}$ und damit auch von Φ durch das Zeichen d ausdrücken:

$$d\Phi = \frac{1}{\pi} d\mathfrak{B} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x\, dx}{1 + k^2} = \frac{d\mathfrak{B}}{1 + k^2},$$

oder

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{B}} = \frac{1}{1 + k^2}, \tag{55}$$

(das Zeichen $\partial/\partial\mathfrak{B}$ wurde geschrieben, um auszudrücken, daß k dabei fest bleibt).

Aus dem Verlauf der Φ-Kurven ersieht man, daß nur Gerade mit positiver Steigung reelle Schnitte mit ihnen haben können. Wegen des negativen Zeichens auf der rechten Seite von (42a) ist zur Erzielung reeller Schnitte erforderlich, daß das Produkt $N M_{\text{eff}}$ (die einzige Größe, deren Zeichen noch frei

ist) negativ ist, was mit dem in Abschnitt 2b gefundenen Ergebnis übereinstimmt.

Im allgemeinen ergeben sich nun bei der Auflösung der Gleichung (12a) 2 Schnittpunkte zwischen der Φ-Kurve und der Geraden. Welcher davon einer stabilen Lösung entspricht, erkennt man am besten aus der Untersuchung der Energieverhältnisse im Schwingungs- und Anodenkreis, welche wir nunmehr vornehmen wollen.

b) Energiebilanz, Stabilität der Lösung:

Den Energieverbrauch im Schwingungskreis pro Periode erhalten wir, wenn wir für jeden Teil das Integral $\int i e dt$ über die Zeit einer Periode bilden. Dies ergibt für den Energieverbrauch

$$\text{am Kondensator: } w_C = 0,$$

$$\text{am Widerstand: } w_R = \frac{\mathfrak{A}^2 R}{2}\tau,$$

$$\text{an der Selbstinduktion } w_L = \frac{\mathfrak{A} N \omega J_s}{\pi} \Phi\left(k, \frac{\mathfrak{A} S_0 \pi M_{\text{eff.}} \omega}{J_s}\right)\frac{\tau}{2}.$$

Da $N M_{\text{eff.}}$ negativ ist, stellt dieser Ausdruck eine Zufuhr von Energie dar. Im stationären Zustand muß die pro Periode verbrauchte Energie gleich der in dieser zugeführten sein, wir erhalten also

$$\frac{N \omega J_s}{\pi} \mathfrak{A} \Phi\left(k, \frac{\mathfrak{A} \omega S_0 \pi M_{\text{eff.}}}{J_s}\right)\frac{\tau}{2} = \frac{\mathfrak{A}^2 R \tau}{2}.$$

Dies ist dieselbe Gleichung wie (42a), jetzt aber als Gleichung für $\mathfrak{A}$ geschrieben. In der Form

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{\mathfrak{A} N \omega J_s}{\pi R} \Phi\left(k, \frac{\mathfrak{A} S_0 \pi M_{\text{eff.}} \omega}{J_s}\right), \tag{42b}$$

gibt sie uns leicht Auskunft über die Stabilität der Lösung:

Wir erhalten nach ihr $\mathfrak{A}$ als Schnittabszisse einer unter der Steigung 1 gezeichneten Geraden mit der Kurve

$$y = \frac{N \omega J_s}{\pi R} \Phi\left(k, \frac{\omega \mathfrak{A} S_0 \pi M_{\text{eff.}}}{J_s}\right).$$

Diese Kurve erhält man aber aus der einfachen Φ-Kurve durch reine Maßstabänderung (affine Transformation), wodurch die Eigenschaften, auf die es im folgenden ankommt (Konvexität und Konkavität) nicht geändert werden. Wir müssen nun 2 Fälle unterscheiden (Fig. 9b).

1. Die Tangente der Φ-Kurve im Schnittpunkt wird in die Gerade durch eine Drehung *im* Urzeigersinn übergeführt.[1]) Diese Lösung ist labil. Denn wird $\mathfrak{A}$ durch irgendeine Ursache um $\delta\mathfrak{A}$ vergrößert, so ist

$$(\mathfrak{A}+\delta\mathfrak{A})\frac{N}{R}\omega\Phi\left(k,\frac{(\mathfrak{A}+\delta\mathfrak{A})S_0\pi M_{\text{eff.}}\omega}{J_s}\right) > (\mathfrak{A}+\delta\mathfrak{A})^2.$$

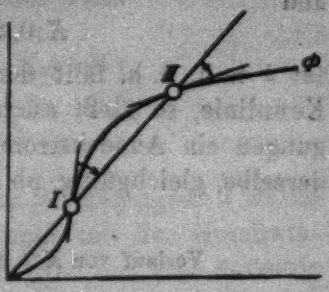


Fig. 9b.

Die Energiezufuhr überwiegt den Verbrauch, die Amplitude wächst bis zum Punkt II. Andererseits ist für negative $\delta\mathfrak{A}$

$$(\mathfrak{A}-\delta\mathfrak{A})\frac{N}{R}\frac{J_s}{\pi}\omega\Phi\left(k,\frac{(\mathfrak{A}-\delta\mathfrak{A})S_0\pi M_{\text{eff.}}\omega}{J_s}\right) < (\mathfrak{A}-\delta\mathfrak{A})^2.$$

Die Amplitude nimmt zu 0 ab, da der Energieverbrauch nicht mehr gedeckt werden kann.

II. Die Tangente im Schnitt wird durch eine Drehung entgegen dem Urzeigersinn in die Gerade übergeführt: Diese Lösung ist stabil. Der Beweis ist vollkommen analog zu I.

Wir wollen uns noch über die Herkunft der vom Anodenkreis gelieferten Energie Rechenschaft ablegen. Der Energieverbrauch der Anodenbatterie beträgt pro Periode:

$$W_{E_a} = -\frac{\tau}{2}\left[E_a J_s + \frac{E_a J_s}{\pi} K(k,\mathfrak{B})\right] + E_a \int_0^\tau i_a\, dt \tag{56}$$

(i_a Wechselstromkomponente von i_a).

Das letzte Integral verschwindet, Dabei ist nach (40)

$$K(k,\mathfrak{B}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{arctg}(k+\mathfrak{B}\cos x)\, dx, \tag{57}$$

ein Integral, das sich leicht numerisch ausrechnen läßt und dessen Verlauf für verschiedene k als Funktion von $\mathfrak{B}$ in Fig. 10 dargestellt ist. Für unendlich großes $\mathfrak{B}$ wird es, welchen endlichen Wert auch k haben mag, null. Ferner ist, wie leicht einzusehen,

1) Als Richtung der Tangente müssen wir mit Rücksicht auf später die Richtung wachsender Bogenlänge, von 0 an gerechnet, festsetzen.

$$K(-k, \mathfrak{B}) = -K(k, \mathfrak{B}),$$
$$K(k, -\mathfrak{B}) = K(k, \mathfrak{B})$$

und

$$K(0, \mathfrak{B}) = 0.$$

Ist k null, d. h. fällt der Ruhepunkt in den Wendepunkt der Kennlinie, so fließt auch ohne das Vorhandensein von Schwingungen ein Anodenstrom $J_s/2$ und der Energieverbrauch wird derselbe, gleichgültig, ob Schwingungen da sind oder nicht. Aus

$$\text{Verlauf von } K(k, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{arctg}(k + \mathfrak{B}\cos x)\, dx.$$

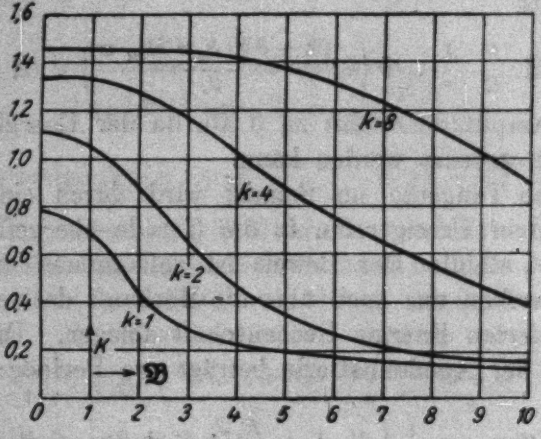


Fig. 10.

der Anodenbatterie kann also die an den Schwingungskreis gelieferte Energie nicht stammen. Betrachten wir dagegen die von der Röhre verbrauchte Energie, so beträgt diese ohne Schwingungen:

$$W_r = \frac{E_a J_s}{2}\tau.$$

Bei Schwingungen

$$W_r' = \int e_a i_a\, dt$$
$$= \frac{\tau}{2}\left[\frac{E_a J_s}{2} + \frac{E_a J_s}{\pi} K + \frac{J_s}{\pi} N\omega\mathfrak{A}\Phi\left(k, \frac{S_0 \pi M_{\text{eff.}}}{J_s}\omega\mathfrak{A}\right)\right].$$

Der dritte Posten, der wegen $N M_{\text{eff.}} < 0$ negativ ist, stellt nun gerade die während einer Periode an den Schwingungskreis abgegebene Energie dar. Durch das Gitter wird also der

Anodenstrom so gesteuert, daß ein Teil der sonst in kinetische Energie der Elektronen und dann in Wärme verwandelten Energie in den Schwingungskreis geleitet wird.

Das Verhältnis

$$\eta = \frac{\frac{1}{\pi}\,\mathfrak{A}\,N\omega\,\Phi\left(k, \frac{\pi S_0 M_{\text{eff.}}\,\omega\,\mathfrak{A}}{J_a}\right)}{E_a\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{\pi}\right)},$$

heißt der Wirkungsgrad der Röhre. Der Wirkungsgrad I würde bedeuten, daß die Elektronen gerade noch mit der Geschwindigkeit null die Anode erreichen. Dies gibt uns eine äußerste Grenze für die Amplitude, die durch keine Änderung der Generatordaten überschritten werden kann. Darnach muß immer sein

$$\left|\frac{1}{\pi}\,\mathfrak{A}\,N\omega\,\Phi\left(k, \frac{\pi S_0 M_{\text{eff.}}\,\mathfrak{A}\,\pi}{J_a}\right)\right| \leqq E_a\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{\pi}\right). \tag{59}$$

Setzen wir für Φ den für große $\mathfrak{A}$ geltenden Näherungswert 2, für K den ebenfalls für große Werte von $\mathfrak{A}$ gültigen Betrag 0, so wird

$$\frac{2}{\pi}\,N\omega\,\mathfrak{A} \leqq \frac{E_a}{2}. \tag{59a}$$

Nun ist $N\omega\mathfrak{A}$ die Amplitude der vom Schwingungskreis her induzierten Gegenspannung. Wegen obiger Beziehung kann diese aber nie größer als die Anodengleichspannung werden. Der Fall, daß die Anode negativ wird, wobei der Anodenstrom aussetzen würde, kann also nicht eintreten.

c) Diskussion des Ergebnisses für die Amplitude:

Da die später anzubringenden Verbesserungen, abgesehen vom Einfluß des Gitterstroms an dem für die Amplitude gefundenen Ergebnis nur wenig ändern, wollen wir ihre Diskussion schon jetzt durchführen. Die beiden Hauptformeln für die Berechnung von $\mathfrak{A}$ sind nach 2a:

$$\text{(I)} \qquad \Phi(k, \mathfrak{B}) = \frac{-R\,\mathfrak{B}}{S_0 M_{\text{eff.}} N\omega^2},$$

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{A} = -\frac{-\mathfrak{B}\,J_a}{S_0\,\pi\,M_{\text{eff.}}\,\omega}.$$

Dazu fügen wir als dritte wichtige Bedingung diejenige für das Einsetzen in Form der Gleichung (32a), welche mit

derselben Annäherung — Vernachlässigung der Anodenkreisselbstinduktion — lautet:

$$\text{(III)} \qquad \mathcal{S} N M_{\text{eff.}} \omega^2 = 0.$$

Die Gleichung (1) gibt $\mathfrak{B}$ als Schnittabszisse der Geraden mit der Steigung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{S_0 M_{\text{eff.}} N \omega^2}$$

und der Φ-Kurve. Die Grenzlage dieser Geraden, bei der ein Aussetzen der Schwingungen stattfindet, ist offenbar gegeben durch die Tangente von 0 an die Φ-Kurve. Die Grenzlage für das Einsetzen ist mittels (III) zu bestimmen. Setzt man den dortigen Wert für R in die Gleichung für tg φ ein, so wird

$$\text{(60)} \qquad \operatorname{tg} \varphi_e = \frac{\mathcal{S}}{S_0} = \frac{1}{1 + k^2}.$$

Dies ist aber gerade nach (55) die Steigung der Φ-Kurve im Ursprung. Wir erhalten also die Grenzlage für das Einsetzen als die Richtung der Tangente an die Φ-Kurve *in* 0, für das Aussetzen als die Richtung der Tangente *von* 0 (vgl. Fig. 11). Aus dem Verlauf der Φ-Kurven geht hervor, daß mit wachsender Vorspannung, d. h. mit zunehmendem k der Unterschied der beiden Richtungen immer größer wird, während für $k = 0$ beide zusammenfallen. Da zu der Grenzlage für das Einsetzen die dem Punkt e entsprechende Amplitude gehört, kann man die Amplituden, welche den zwischen e und a gelegenen Punkten der Kurve entsprechen, nur dadurch erhalten, daß man nach dem Einsetzen der Schwingungen die Kreiskonstanten (z. B. den Widerstand R) variiert. Zum Grenzpunkt für das Aussetzen gehört aber im allgemeinen ein endlicher Wert von $\mathfrak{B}$ und damit eine endliche Amplitude. Man kann also im allgemeinen keine beliebig kleinen Amplituden herstellen. Eine Ausnahme macht nur der Fall $k = 0$, bei dem der Schnittpunkt schließlich bis 0 rückt. Da aber dann die Gerade die Kurve berührt, liegt die kleine Amplitude auf der Grenze zwischen labilem und stabilem Zustand, so daß sie sich

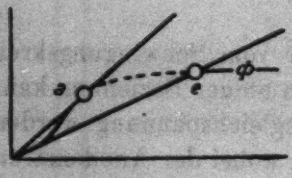


Fig. 11.

praktisch nicht realisieren läßt. Für die weitere Diskussion wollen wir die Hauptgleichungen noch ewas anders schreiben:

Es ist

$$\frac{-R}{S_0 M_{\text{eff.}} N \omega^2} = \frac{R\left(-\frac{1}{S_0}\right)}{L\omega\left(\frac{N}{L}\right) M_{\text{eff.}} \omega}.$$

$R/L\omega$ ist bis auf dem Zahlfaktor π das Dekrement δ des Kreises.

Da S_0 die Dimension eines reziproken Widerstands hat, ist $\frac{-1/S_0}{M_{\text{eff.}}\omega}$ ganz analog gebaut, wenn auch physikalisch nicht so einfach deutbar. Seinen reziproken Wert wollen wir als neue Variable ε einführen. Endlich kommt in (1) noch das Verhältnis N/L vor, das wir mit p bezeichnen wollen. Da nach (34) auch k dimensionslos ist, haben wir außer I_s nur die dimensionslosen Größen k, δ, ε, p als unabhängige Variabeln. In diesen lauten die Hauptgleichungen:

$$\text{(Ia)} \qquad \Phi(k, \mathfrak{B}) = \frac{\delta \mathfrak{B}}{\pi \varepsilon p},$$

$$\text{(IIa)} \qquad \mathfrak{A} = \frac{J_s \mathfrak{B}}{\pi \varepsilon}.$$

Hieraus ergibt sich:

1. Abhängigkeit der Amplitude von I_s. Da I_s nur in (II) vorkommt, wird die Amplitude dem Sättigungsstrom proportional.

2. Abhängigkeit von

$$\delta = \frac{\pi R}{L\omega}:$$

Da δ in (IIa) nicht eingeht, wird durch (IIa) nur der Maßstab geändert. $\mathfrak{A}$ ist also in bezug auf die Abhängigkeit von δ der Schnittabszisse proportional. Für großes $\mathfrak{B}$, wobei links für Φ der Näherungswert 2 gesetzt werden kann, ist die Amplitude δ umgekehrt proportional: Graphische Darstellung der Abhängigkeit von δ siehe Fig. 12. In dieser, wie in den zwei folgenden sind diejenigen Amplitudenwerte, welche nur im stationären Zustand möglich sind, durch gestrichelte Kurven verbunden. Auch sind keine Maßstäbe angegeben, da diese erst durch die andern, konstant gehaltenen Größen bestimmt

werden. Parameter für die verschiedenen Kurven ist k, dessen Wert beigeschrieben ist.

3. Abhängigkeit von $p = \frac{N}{L}$: Auch p geht in (IIa) nicht ein, so daß das oben für δ gesagte auch für p gilt. Durch Vergrößerung von p wird die Neigung der Schnittgeraden immer mehr verkleinert und damit die Schnittabzisse vergrößert. Theoretisch wäre dieser Vergrößerung der Amplitude erst durch die Energiegleichung (59) eine Grenze gesetzt. Es ist aber folgendes zu bedenken: Um p zu vergrößern, hat nur eine Vergrößerung von N Nutzen, da eine Verkleinerung von L das Dekrement vermehren würde. Nun läßt sich aber der wechselseitige Induktionskoeffizient N, wenn einmal das Koppelungsverhältnis 1 erreicht ist, nicht mehr steigern ohne entweder L oder L_a zu vergrößern. Eine Vergrößerung von L_a würde p nicht größer machen, es bleibt also nur die Möglichkeit, L zu vergrößern. Dies würde aber schließlich den Anodenstrom drosseln. Immerhin kann man sagen, daß im allgemeinen für den Anodenkreis eine engere Koppelung vorteilhaft ist.

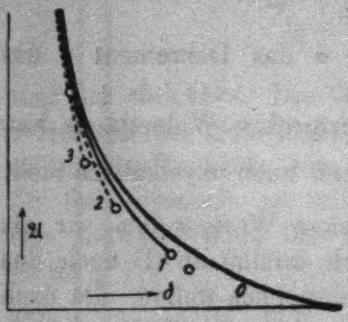


Fig. 12.

4. Abhängigkeit von $\varepsilon = S_0 M_{\text{eff}} \omega$: ε geht in beide Hauptformeln ein. Vergrößert man ε, so wird dadurch zwar die Neigung der Schnittgeraden vermindert und die Schnittabszisse vergrößert, gleichzeitig wird aber infolge (IIa) die Abszisse wieder durch eine größere Zahl dividiert. Aus der Gleichung der Schnittgeraden

$$y = \frac{\delta}{\pi \varepsilon p} \mathfrak{B}$$

und (IIa) folgt durch Division:

$$\mathfrak{A} = \frac{J_1 p}{\delta} y.$$

In bezug auf die Abhängigkeit von ε ist also die Amplitude der Schnitt*ordinate* proportional und nähert sich wie diese einem endlichen Grenzwert. Graphische Darstellung für verschiedene k in Fig. 13!

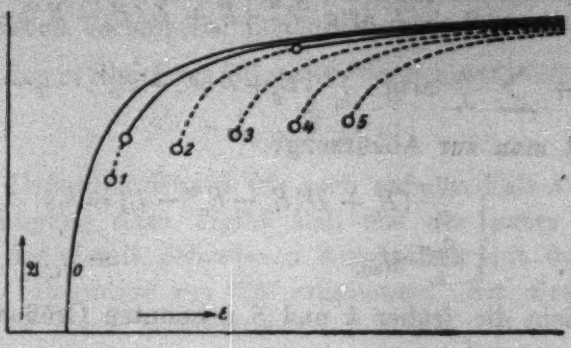


Fig. 13.

5. Abhängigkeit von $k = \frac{S_0 \pi}{J_s} [E_g + D(E_a - E_a^*)]$: Da k in (IIa) nicht eingeht, ist $\mathfrak{A}$ zunächst den Schnittabszissen proportional. Wir wollen aber die Abhängigkeit von k bei verschiedenen Werten von ε untersuchen. Dann sind nach oben die Schnittordinaten die maßgebenden Größen. Als Parameter der in Fig. 14 gezeichneten Kurven für die Abhängigkeit von k ist das Verhältnis $\varepsilon/\varepsilon_0$ gewählt, wenn wir den Mindestwert von ε für $k = 0$ mit ε_0 bezeichnen.

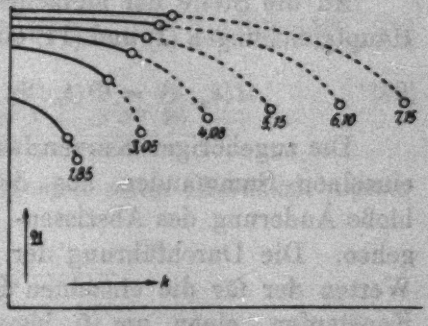


Fig. 14.

Aus der Figur geht hervor: Will man, wie es in der drahtlosen Telephonie bei der Gitterbesprechung der Fall ist, mit relativ kleinen Schwankungen von k möglichst große Änderungen der Amplitude erhalten, so ist ein kleiner Wert von ε, dem eine lose Gitterkoppelung entspricht, vorteilhaft. Bei der Untersuchung des Einflusses des Gitterstroms wird es sich dann noch überdies zeigen, daß die Amplitude im allgemeinen bei verhältnismäßig loser Gitterkoppelung einen Höchstwert erreicht.

6. Berücksichtigung der höheren Glieder der arctg-Reihe: Die verbesserte Darstellung des Anodenstroms lautet unter Vernachlässigung der Anodenkreisselbstinduktion:

$$(61)\quad \begin{cases} i_a = \text{const} + \frac{J_s}{\pi}\,\text{artg}\,\frac{S_0\pi}{J_s}\left[E_g + D(E_a - E_a^*) - M_{\text{ea}}\frac{di}{dt}\right] \\ \quad + \sum \frac{h_i}{J_s}\,\text{artg}\,\frac{S_i\pi}{h_i}\left[E_g + D(E_a - E_a^*) - l_i - M_{\text{ea}}\frac{di}{dt}\right]. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(62)\quad \begin{cases} \frac{S_i\pi}{h_i}[E_g + D(E_a - E_a^*) - l_i] = k_i, \\ \frac{S_i\pi}{h_i} M_{\text{ea}} = \beta_i. \end{cases}$$

und versieht die früher k und β genannten Größen mit dem Index 0, so wird

$$(63)\quad \begin{cases} i_a = \text{const} + \frac{J_s}{\pi}\,\text{artg}\,(k_0 + \mathfrak{B}\cos\omega t) \\ \quad + \sum \frac{J_s}{\pi}\cdot\frac{h_i}{J_s}\,\text{arctg}\left(k_i + \frac{\beta_i}{\beta_0}\mathfrak{B}\cos\omega t\right). \end{cases}$$

Dabei sind k_i und β_i/β_0 dimensionslose Größen, so daß die zu ihrer Berechnung dienenden Stücke im Maßstab der Figur entnommen werden können. Entwickelt man die arctg-Funktionen in Fourierreihen und nimmt man von jeder das erste cos-Glied, so wird

$$(64)\quad i_a = \text{const} + \frac{J_s}{\pi}\left\{\Phi(k_0, \mathfrak{B}) + \sum \frac{h_i}{J_s}\Phi\left(k_i, \frac{\beta_i}{\beta_0}\mathfrak{B}\right)\right\}\cos\omega t.$$

An die Stelle der einfachen Φ-Funktion tritt jetzt in den Hauptgleichungen (1) und (11) eine zusammengesetzte Funktion:

$$(65)\quad \Omega(k_0, \mathfrak{B}) = \Phi(k_0, \mathfrak{B}) + \sum \frac{h_i}{J_s}\Phi\left(k_i, \frac{\beta_i}{\beta_0}\mathfrak{B}\right).$$

Die zugehörigen Kurven lassen sich leicht zeichnen, da die einzelnen Summanden aus den einfachen Φ-Kurven durch bloße Änderung des Abszissen- und Ordinatenmaßstabs hervorgehen. Die Durchführung der Rechnung ergibt, je nach den Werten der für die einzelnen Röhren natürlich verschiedenen Konstanten, einen um 5 bis 10 Proz. größeren Wert der Amplitude, als der einfache arctg-Ansatz. Daß der einfache arctg-Ansatz zu kleine Werte liefert, rührt daher, daß an der Stelle der größten Abweichung die wahre Kennlinie steiler verläuft als die arctg-Kurve.

e) Einfluß der Anodenkreisselbstinduktion:

Haben wir nach dem in 3a ausgeführten Verfahren einen ersten Wert für $\mathfrak{A}$ und ω gefunden, so können wir ihn nach-

träglich unter Berücksichtigung der Anodenkreisselbstinduktion folgendermaßen verbessern: Zunächst ergibt sich für $k = 0$ als Mittelwert der in Gleichung (36 c) mit r bezeichneten Größe $\left(\frac{\operatorname{tg} y}{y}\right)$

$$r = \frac{\mathfrak{B}}{\Phi(k_0, \mathfrak{B})}. \tag{66}$$

Diese Definition dehnen wir auch auf den Fall $k = 0$ aus. Die Berechtigung dazu ergibt sich aus der guten Übereinstimmung des damit gefundenen Ergebnisses mit dem durch graphische Integration von (36) erhaltenen. Mit diesem konstanten Wert von r erhält man:

$$y = \text{const} + \frac{\mathfrak{B} r}{c_0^2 \omega^2 + r^2} \cos \omega t + \frac{c_0 \omega \mathfrak{B}}{c_0^2 \omega^2 + r^2} \sin \omega t. \tag{67}$$

Wie man sieht, ist die Drosselwirkung, welche durch das zu r^2 tretende Glied $c_0^2 \omega^2$ ausgedrückt wird, nur vom Quadrat von $(c_0 \omega)$ abhängig. In zweiter Näherung können wir daher noch immer die Drosselwirkung vernachlässigen und schreiben:

$$y = \text{const} + \Phi(k, \mathfrak{B}) \cos \omega t + \frac{c_0 \omega \Phi^2(k, \mathfrak{B})}{\mathfrak{B}} \sin \omega t \tag{68}$$

und

$$i_a = K + \frac{J_s}{\pi} \Phi(k, \mathfrak{B}) \cos \omega t + \frac{J_s}{\pi} \frac{c_0 \omega \Phi^2(k, \mathfrak{B})}{\mathfrak{B}} \sin \omega t. \tag{68a}$$

Setzt man dies in der Gleichung für den Schwingungskreis ein, so erhält man durch Nullsetzen des Koeffizienten der sinus-Glieder:

$$\omega^2 = \frac{1}{L C \left[1 - \frac{J_s^2 N L_a D \Phi^2(\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2 M_{\text{eff}} L \pi^2}\right]}. \tag{69}$$

Diese Gleichung verwandelt sich unter Berücksichtigung von (42) in

$$\left\{\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_0^2}{1 - D \frac{R}{L\omega} \cdot \frac{R}{M_{\text{eff}} \omega} \cdot \frac{L_a}{N}} \\ &= \omega_0^2 \left[1 + D \left(\frac{R}{L\omega}\right) \left(\frac{R}{M_{\text{eff}} \omega}\right) \left(\frac{L_a}{N}\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{IV}$$

Vergleicht man diese Formel mit der im Abschnitt 2 gefundenen für unendlich kleine stationäre Schwingungen

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{R S D L_a}{L}}, \tag{19a}$$

so wird

$$S = -\frac{R}{N M_{\text{eff}} \omega^2}.$$

Dies ist aber gerade die für das Einsetzen dieser kleinen Schwingungen, die allerdings labil sind, geltende Bedingung (III). Da $N M_{\text{eff}} < 0$, so folgt aus (IV), daß die Frequenz kleiner ist als die Eigenfrequenz des Schwingungskreises.

Will man in dritter Annäherung die Drosselwirkung in Rechnung setzen, so ergibt eine einfache Rechnung, daß man zu einem verbesserten Wert von b gelangt, wenn man die Steigerung der zur Lösung von (I) verwandten Geraden im Verhältnis

$$\lambda = 1 + \frac{D^2 S_0^2 L_a^2 \omega^2 \Phi^2(\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}^2} \tag{70}$$

vergrößert, wobei in den Ausdruck für λ die zuerst gefundenen Werte von $\mathfrak{B}$ einzusetzen sind.

Anhang zu Abschnitt 3.

Der zeitliche Verlauf des Anschwingungsvorganges.

Nachdem im 3. Abschnitt die Formeln für die Energieübertragung entwickelt sind, ist es leicht, den zeitlichen Verlauf des Anwachsens der Amplitude zu verfolgen, wenn man dabei den von Zenneck[1]) bei den Lichtbogenschwingungen eingeschlagenen Weg wählt und als Zeitelement für den Anlaufvorgang die Zeit einer Schwingung nimmt. Im stationären Zustand war die vom Anodenkreis pro Periode zugeführte Energie gleich der in dieser Zeit im Widerstand des Kreises verzehrten Energie. Während des Anwachsens der Amplitude überwiegt die zugeführte Energie und dient zur Vermehrung des Energieinhalts des Schwingungskreises. Es ist also

$$dW = \left[\frac{\mathfrak{A} N \omega J_s}{2\pi} \Phi\left(k, -\frac{S_0 \pi}{J_s} M_{\text{eff}} \omega \mathfrak{A}\right) - \frac{\mathfrak{A}^2 R}{2}\right] dt. \tag{71}$$

Nun ist die Energie des Kreises bekanntlich

$$W = \frac{L \mathfrak{A}^2}{2}. \tag{72}$$

Setzt man dies oben ein, so folgt durch Integration

$$t = \int_{\mathfrak{A}_0}^{\mathfrak{A}} \frac{2 L d\mathfrak{A}}{\frac{N \omega J_s}{\mathfrak{A}} \Phi\left(k, \frac{-S_0 \pi}{J_s} M_{\text{eff}} \mathfrak{A} \omega\right) - \mathfrak{A} R}. \tag{73}$$

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 43. S. 481. 1914.

Die Integration muß graphisch ausgeführt werden. In Fig 15 sind 2 Beispiele ausgeführt, a) ohne, b) mit „Vorspannung". Aus dem zweiten sieht man, daß bei Vorspannung das Anwachsen zunächst langsam vor sich geht, bis der steile Teil der Kennlinie erreicht ist.

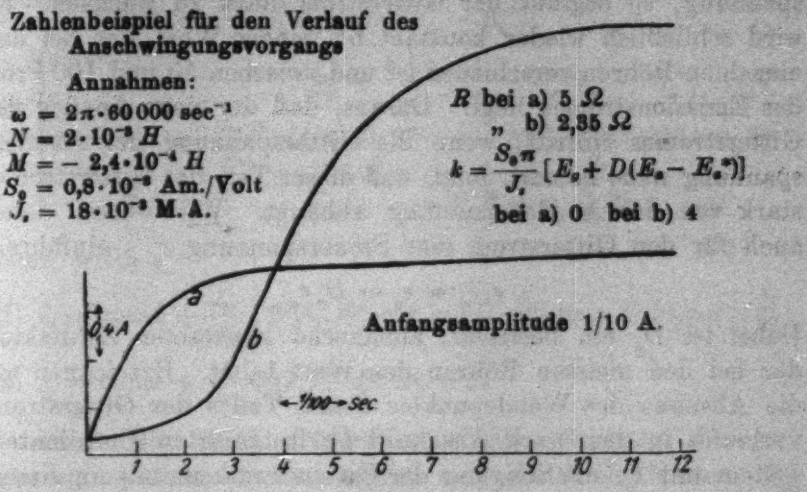


Fig. 15.

4. Der Einfluß des Gitterstromes.

a) Allgemeines Verhalten des Gitterstromes:

Die bisherigen Ergebnisse stimmen mit der Wirklichkeit nur dann überein, wenn durch besondere Maßnahmen, welche unten erwähnt werden, der Gitterstrom auf ein kleines Maß reduziert ist. Im allgemeinen werden aber infolge des Gitterstromes die Verhältnisse wesentlich verwickelter. Der allgemeine Verlauf des Gitterstromes ist folgender (vgl. die Arbeit von Rukop im Jahrb. der drahtl. Telegr. 14. S. 2. 1919, der auch die Fig. 16 entnommen ist): Sobald das Gitter positiv ist, beginnt ein schwacher Gitterstrom zu fließen, der aber bald mit einem Anteil von etwa 10 Proz. des Emissionsstromes konstant wird. Dieser Teil des Gitterstromes, der nebenbei von der Anoden-

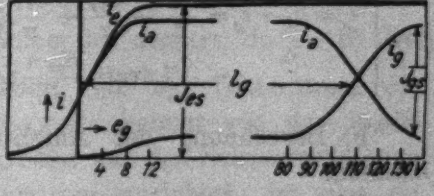


Fig. 16.

spannung praktisch unabhängig ist, hat wenig Einfluß. Dadurch, daß wir ihn vernachlässigen, heben wir ungefähr gerade den durch den einfachen arctg-Ansatz entstandenen Fehler auf, der von annähernd der gleichen Größe, aber entgegengesetztem Zeichen ist. Erreicht die Gitterspannung ungefähr die Anodenspannung, so beginnt der Gitterstrom stark zu wachsen. Er wird schließlich wieder konstant bei einem Wert, der bei den einzelnen Röhren verschieden ist und zwischen 50 und 100 Proz. des Emissionstromes liegt. Daraus, daß der neue Anstieg des Gitterstromes eintritt, wenn die Gitterspannung der Anodenspannung nahe kommt, folgt, daß dieser Teil des Gitterstromes stark von der Anodenspannung abhängt. Wir wollen daher auch für den Gitterstrom eine Steuerspannung $e_{g,a}$ einführen:

$$e_{g,a} = e_g - D_g e_a.$$

Dabei ist D_g ein positiver, annähernd konstanter Zahlfaktor, der bei den meisten Röhren den Wert 1 hat. Bezeichnen wir die Abszisse des Wendepunktes dieses Teiles des Gitterstromverlaufes in dem nach Abschnitt 1 b festgelegten Koordinatensystem mit l_g, die Steigung der Gitterstromkennlinie in diesem Punkt mit S_{g0}, die Erhebung des Grenzwertes des Gitterstromes über den „kleinen Gitterstrom" mit $J_{g\sim}$, so wird der Gitterstrom dargestellt durch

$$(75) \qquad i_g = \frac{J_{g\sim}}{2} + \frac{J_{g\sim}}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{S_{g0}\pi}{J_{g\sim}} [e_g - D_g(e_a - E_a^*) - l_g].$$

Der Anodenstrom wird, wenn wir jetzt alle auf den Emissionsstrom bezüglichen Größen mit dem Index e versehen:

$$(76) \quad \begin{cases} i_a = i_e - i_g = \dfrac{J_{e\sim}}{2} - \dfrac{J_{g\sim}}{2} + \dfrac{J_{e\sim}}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \dfrac{S_{e0}\pi}{J_{e\sim}} [e_g + D_e(e_a - E_a^*)] \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{J_{g\sim}}{J_{e\sim}} \operatorname{arctg} \dfrac{S_{e0}\pi}{J_{g\sim}} [e_g - D_g(e_a - E_a^*) - l_g] \right\}. \end{cases}$$

b) Berechnung der Amplitude unter vereinfachten Annahmen.

Die vollständigen Gleichungen für Schwingungs-, Gitter- und Anodenkreis lauten jetzt außer (75) und (76):

$$(77) \qquad L\frac{d^2i}{dt^2} + N\frac{d^2i_a}{dt^2} + M\frac{d^2i_g}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

$$(78) \qquad e_g = E_g - M\frac{di}{dt} - L_g\frac{di_g}{dt}.$$

$$e_a = E_a - N\frac{di}{dt} - L_a\frac{di_a}{dt}. \tag{79}$$

Wir vernachlässigen wie früher zunächst L_g und L_a und führen die den früheren Bezeichnungen analogen Abkürzungen ein:

$$\left\{\begin{array}{ll} k_a = \frac{S_{00}\pi}{J_{aa}}[E_g + D_a(E_a - E_a^*)] & \\ & k_g = \frac{S_{00}\pi}{J_{gg}}[E_g - D_g(E_a - E_a^*) - l_g] \\ \beta_a = \frac{S_{00}\pi}{J_{aa}}(M + D_a N) & \beta_g = \frac{S_{00}\pi}{J_{gg}}(M - D_g N) \\ -\beta_a \mathfrak{A}\omega = \mathfrak{B} & -\beta_g \mathfrak{A}\omega = \frac{\beta_g}{\beta_a}\mathfrak{B}. \end{array}\right. \tag{80}$$

Damit wird

$$i_a = \text{const} + \frac{J_{aa}}{\pi}\left\{\Phi(k_a, \mathfrak{B})\cos\omega t - \frac{J_{ag}}{J_{aa}}\Phi\left(k_g\frac{\beta_g}{\beta_a}\mathfrak{B}\right)\cos\omega t\right\}. \tag{81}$$

$$i_g = \text{const} + \frac{J_{gg}}{\pi}\Phi\left(k_g, \frac{\beta_g}{\beta_a}\mathfrak{B}\right)\cos\omega t. \tag{82}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung für den Schwingungskreis ein, so ergibt sich durch Nullsetzen der Koeffizienten der sinus- und cos-Glieder:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\frac{J_a N\omega}{\pi}\left\{\Phi(k_a, \mathfrak{B}) - \frac{J_{ag}}{J_{aa}}\Phi\left(k_g\frac{\beta_g}{\beta_a}\mathfrak{B}\right) + \frac{M}{N}\frac{J_{ag}}{J_{aa}}\Phi\left(k_g, \frac{\beta_g}{\beta_a}\mathfrak{B}\right)\right\} = R\mathfrak{A}. \tag{83}$$

Vergleicht man die Bestimmungsgleichung für die Amplitude mit der entsprechenden Gleichung (42), so erkennt man, daß nun die linke Seite um zwei Ausdrücke verkleinert ist (auch der dritte Posten in der Klammer ist negativ, da $\frac{M}{N} < 0$). Der erste dieser Terme rührt daher, daß der Gitterstrom den Anodenstrom vermindert, der zweite kommt von der induktiven Rückwirkung des Gitterkreises auf den Schwingungskreis. Der Schaden, den der Gitterstrom anrichtet, ist also ein doppelter: Außer der Schwächung des Anodenstromes entzieht er auf induktivem Wege dem Schwingungskreis Energie, die sich in kinetische Energie der Elektronen und dann in Wärme verwandelt. Die (42a) analoge Gleichung für $\mathfrak{B}$ lautet:

$$\Phi(k_a, \mathfrak{B}) - \left(\frac{N-M}{N}\right)\frac{J_{ag}}{J_{aa}}\Phi\left(k_g\frac{\beta_g}{\beta_a}\mathfrak{B}\right) = -\frac{R\mathfrak{B}}{S_0(M + D_a N)N\omega^2}. \tag{83a}$$

Die Funktion links ist leicht aufzuzeichnen: Sie stellt die Differenz dar zwischen einer einfachen Φ-Kurve und einer zweiten Kurve, welche aus einer einfachen Φ-Kurve durch Änderung des Abszissen- und Ordinatenmaßstabes hervorgeht. Setzen wir für die Maßstabsfaktoren die Abkürzungen m und n, so lautet die Gleichung für $\mathfrak{B}$:

$$\Phi(k_s, \mathfrak{B}) - n\,\Phi(k_g, m\,\mathfrak{B}) = -\frac{R\,\mathfrak{B}}{S_0(M + D_s N)\,N\,\omega^2}. \tag{83b}$$

Dazu kommt, wie früher:

$$\mathfrak{A} = -\frac{\mathfrak{B}\,J_{s\,s}}{\pi(M + D_s N)\,\omega}.$$

Um das durch den Gitterstrom hervorgerufene Zusatzglied weniger wirksam zu machen, haben wir zwei Möglichkeiten: Da nämlich die Φ-Kurven erst von ungefähr $\mathfrak{B} = k$ wesentlich von Null abweichen, können wir das Gebiet, in welchem der Einfluß des Gitterstromes unmerklich ist, erweitern, indem wir 1. den Betrag von k_g vergrößern oder 2. durch Verkleinern des Maßstabsfaktors m das Knie des Anstieges möglichst hinausrücken. Haben wir genügend Anodenspannung zur Verfügung, so kommen wir auf dem ersten Weg schnell zum Ziel. Wir brauchen nur eine negative Gittervorspannung anzulegen und die alte Lage des Ruhepunktes auf der Kennlinie durch Vergrößerung der Anodenspannung wiederherzustellen. Es sei z. B.

$$D_s = 0{,}08,\ D_g = 1,\ E_g = 0,\ E_a^* = 100\ \text{Volt},\ E_a = E_a^*,$$

also

$$k_s = 0,\ l_g = 110\ \text{Volt},\ k_g = -\,\text{const}\cdot 110\cdot\text{Volt}.$$

Nimmt man jetzt $E_g = -10$ Volt, so muß man, um $k_s = 0$ wiederherzustellen, E_a auf 225 Volt erhöhen. Für den Emissionsstrom bleibt dann alles beim alten, für den Gitterstrom aber wird $k_g = -235\cdot\text{const}$. Damit ist der Punkt des Anstiegs des Gitterstromes auf etwa das Doppelte hinausgerückt. Die zweite Möglichkeit (Änderung der Maßstabsfaktoren) läßt sich nur durch Variation der Koppelungen M und N durchführen, die ihrerseits aber die Amplitude wieder beeinflußt. Um ihre Wirkung zu überblicken, ist eine eingehende Diskussion der Abhängigkeit der Amplitude von den Koppelungen M und N erforderlich, welche wir nun vornehmen wollen.

c) Diskussion des Resultates:

Wir führen wie früher als Variable ein: das Dekrement δ und das Verhältnis $\frac{N}{L} = p$. M tritt aber jetzt nicht mehr wie früher nur in der Kombination $M + D_g N$ auf, sondern auch in dem Ausdruck $(M - D_g N)$. Wir führen daher jetzt das Verhältnis $\frac{M}{L} = -q$ als Veränderliche ein, wobei wir mit Rücksicht auf die verschiedenen Vorzeichen von N und M für q das negative Zeichen wählen. Rechts bleibt dann noch die ebenfalls dimensionslose Größe $\frac{1/S_0}{L\omega}$, welche wir mit ζ bezeichnen wollen. In diesen Variabeln schreiben sich die Hauptgleichungen zur Bestimmung von $\mathfrak{A}$:

$$\text{(V)} \qquad \Phi(k_a, \mathfrak{B}) - n\Phi(k_g, m\mathfrak{B}) = \frac{\delta\zeta\mathfrak{B}}{\pi p(q - D_a p)},$$

$$\text{(VI)} \qquad \mathfrak{A} = \frac{J_{a1}\zeta\mathfrak{B}}{\pi(q - D_a p)},$$

$$\text{(VII)} \qquad m = \frac{S_{g0}}{S_{a0}} \frac{J_{a1}}{J_{g1}} \frac{q + D_g p}{q - D_a p},$$

$$\text{(VIII)} \qquad n = 1 + \frac{q}{p},$$

$$\text{(IX)} \qquad k_a = \frac{S_{a0}\pi}{J_{a1}}[E_g + D_a(E_a - E_a^*)],$$

$$\text{(X)} \qquad k_g = \frac{S_{g0}\pi}{J_{g1}}[E_g - D_g(E_a - E_a^*) - l_g].$$

Diese Formeln sind für die praktische Berechnung der Amplitude aus den Generatordaten sehr bequem. Aus den Röhrenkonstanten und den Kreisdaten berechne man zunächst die Größen (VII) bis (X). Dann zeichne man die Kurve

$$y = \Phi(k_a, \mathfrak{B}) - n\Phi(k_g, m\mathfrak{B}) = \Psi(k_a, \mathfrak{B})$$

und schneide sie mit der Geraden

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot \mathfrak{B} = \frac{\delta\zeta\mathfrak{B}}{\pi p(q - D_a p)}.$$

Die Schnittabszisse gibt $\mathfrak{B}$, woraus mittels (VI) $\mathfrak{A}$. Die Abhängigkeit der Amplitude von den Verhältnissen (M/L) und (N/L) wird durch den Gitterstrom gegenüber den in Abschnitt 3c gefundenen Beziehungen in einschneidender Weise verändert. Dort ergab sich mit wachsender Gitterkreiskoppelung Zunahme der Amplitude bis zu einem asymptotisch er-

reichbaren Grenzwert, mit wachsender Anodenkreiskoppelung fortgesetzte Zunahme bis zu der durch den Wirkungsgrad 1 gegebenen Grenze. Jetzt werden wir finden, daß es sowohl für die Gitter- als die Anodenkreiskoppelung ein Optimum gibt. Für die weiteren Untersuchungen wollen wir die Konstanten der Rukopschen Fig. 16 zugrunde legen, welche im Maßstab der Figur sind

$J_{a} = 6{,}8,\ S_{a0} = 2,\ J_{g} = 5,\ S_{g0} = 0{,}64,\ l_{g} = 27{,}5,\ k_{g} = 11{,}1.$

Damit ergaben sich die in Fig. 17 für verschiedene q/p gezeichneten zusammengesetzten Φ-Kurven. Da die Maßstabs-

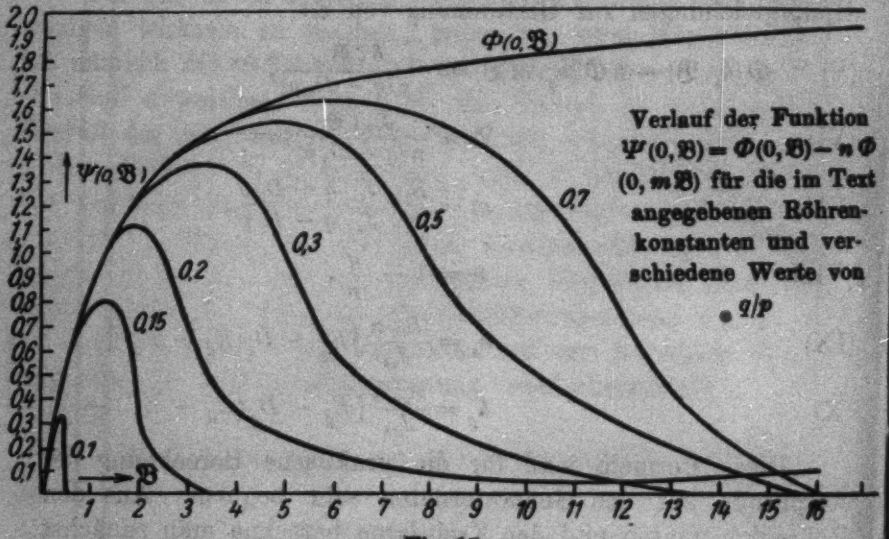


Fig. 17.

faktoren nur von den Verhältnissen abhängen, haben die Kurven für alle die Werte von p und q Gültigkeit, für welche das Verhältnis gleich den beigeschriebenen Zahlen ist. Der Schnitt der Kurven mit der zu gleichem q und p gehörenden Geraden gibt dann $\mathfrak{B}$ als Schnittabszisse. Um daraus $\mathfrak{A}$ zu erhalten, müssen wir noch mit $\frac{\pi(q - D_a p)}{J_a \zeta}$ dividieren. Aus (V) und (VI) erkennt man, daß dann $\mathfrak{A}$ den Schnittordinaten proportional wird. In Fig. 18a ist das Ergebnis der Konstruktion zunächst für $p = 1$ dargestellt. Abszissen sind die q, Ordinaten die Amplituden, Parameter der verschiedenen Kurven die Dekre-

mente δ. Dabei ist bei der mit δ_0 bezeichneten Kurve 1 *der* Wert von δ angenommen, bei dem für $q = 0{,}1$ eben noch Schwingungen möglich sind, bei den anderen Kurven das $^1/_2$, 2, 3, 5-fache dieses Wertes zugrunde gelegt und der Ordinatenmaßstab der Kurve mit der Dämpfung $n\,\delta_0$ n-mal vergrößert. Man erkennt aus der Fig. 18a: Bei großer Dämpfung (Kurve 5) ist die Abhängigkeit der Amplitude von der Gitterkoppelung dieselbe wie sie im Abschnitt 3c gefunden

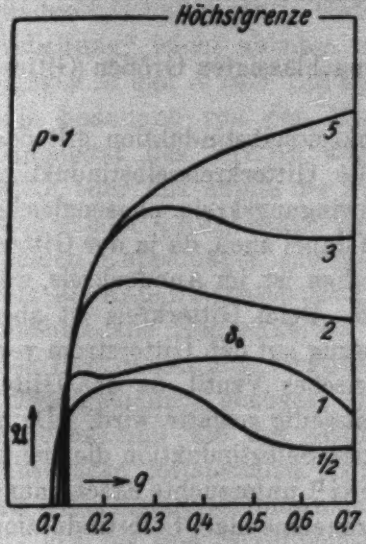


Fig. 18a.

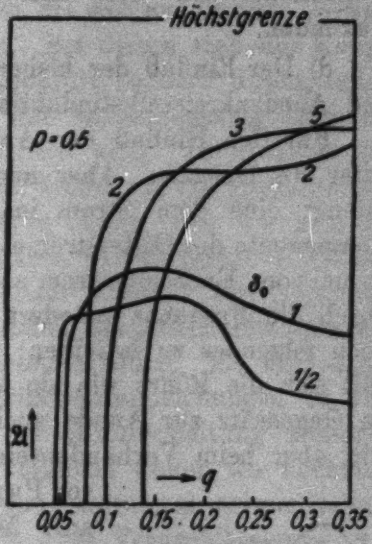


Fig. 18b.

wurde. Die Schnittgerade trifft die Ψ-Kurve immer im aufsteigenden Ast, der Gitterstrom macht sich nicht bemerkbar. Bei kleinerer Dämpfung (z. B. Kurve 3) schneidet zwar für kleine q die Gerade die Kurve noch im aufsteigenden Ast, der Schnitt wandert aber mit zunehmendem q auf den absteigenden Ast hinüber, dementsprechend bekommt die Kurve der Abhängigkeit von q ein Maximum. Bei weiterer Vergrößerung der Gitterkoppelung wird die Amplitude wieder verkleinert. Die Abhängigkeit von q verläuft aber verschieden je nach dem Wert von p. In Fig. 18b ist die Abhängigkeit von q unter Annahme einer nur halb so großen Anodenkreiskoppelung im übrigen gleicher Verhältnisse wie in Fig. 18a aufgezeichnet. Die Amplitude ist bei den Kurven mit kleinerer Dämpfung

ganz bedeutend vergrößert. Die Kurve 3 hat jetzt kein Maximum mehr. Man kann also außerdem noch durch Veränderung von p die Amplitude vergrößern. Dadurch, daß man die $\mathfrak{A}, q$-Kurven für verschiedene Werte von p aufzeichnet, bekommt man die *beiden* Werte von p und q, zu denen ein Maximum der Amplitude gehört.

In bezug auf die Abhängigkeit von ζ bei festgehaltenen p und q ergibt sich, daß $\mathfrak{A}$ ebenfalls den Schnittordinaten proportional ist. Die Kurven haben daher ebenfalls ein Maximum.

d) Der Einfluß der bisher vernachlässigten Größen (Gitter- und Anodenkreisselbstinduktion):

Für den Einfluß der Anodenkreisselbstinduktion gilt das unter 3e Gesagte. Aber auch die Gitterkreisselbstinduktion erzeugt eine dem Strom im Schwingungskreis phasengleiche Komponente des Gitterstromes und dabei auch, da ja der Gitterstrom vom Emissionsstrom abzuziehen ist, im Anodenkreis, wodurch die Frequenz geändert wird. Beim Gitterkreis ist aber noch folgendes zu beachten: In bezug auf den Gitterstrom verhält sich die Röhre wie ein elektrisches Ventil, da das Gitter im Gegensatz zur Anode auch zeitweilig negativ wird. Dann tritt aber beim Vorhandensein einer Selbstinduktion die zuerst von Papalexi[1]) untersuchte Erscheinung auf: Mit zunehmender Selbstinduktion wird die Zeit, während der Strom fließt, immer länger (Fig. 19). Zerlegt man nun eine derartige Ventilstromkurve in ihre Harmonischen, so ergibt sich, wie in der Figur angedeutet, für die Grundschwingung eine bedeutende Phasenverschiebung, die wesentlich größer ist, als die bei gewöhnlichen Kreisen aus dem Verhältnis $L\omega/R$ berechnete. Der Gitterstrom übt dadurch einen verhältnismäßig großen Einfluß auf die Frequenz aus. Dadurch erklärt sich auch die häufig beobachtete Erscheinung, daß durch Veränderung des Heizstromes der Glühkathode und damit von I_s eine Änderung der Frequenz hervorgerufen wird, während in

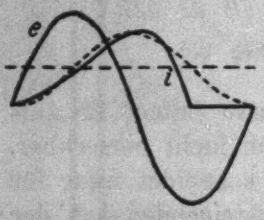


Fig. 19.

1) Papalexi, Ann. d. Phys. 43. S. 976. 1912.

Formel (IV) I_g nicht eingeht. Durch Änderung von I_g kommt man nämlich auf einen andern Punkt der Kennlinie, dadurch wird der Gitterstrom geändert und damit auch die Frequenz.

5. Übertragung der Ergebnisse auf andere Schaltungen.

a) Die verschiedenen Schaltungsmöglichkeiten:

Die unseren Rechnungen zugrunde gelegte Schaltung wird in der Praxis wenig angewandt, statt ihrer ist eine Reihe anderer Schaltungen in Gebrauch, die sich aus unserer „Grundschaltung" leicht ableiten lassen. Bei diesen sind die Koppelungen M und N zum Teil nicht induktiv, sondern direkt, indem die Spannung von den Enden der Selbstinduktion oder der Kapazität des Kreises abgenommen wird. Je nachdem das erste oder das zweite der Fall ist, wollen wir von „Selbstinduktion"- oder „Kapazitäts"-Koppelung reden. Da wir jede der beiden Koppelungen sowohl induktiv, wie als Selbstinduktions-, wie als Kapazitätskoppelung ausbilden können, haben wir neun verschiedene Möglichkeiten, von denen die gebräuchlichsten mit der Grundschaltung verglichen werden sollen. Es wird dabei im allgemeinen genügen, die Differentialgleichungen zu vergleichen und die den Größen der Grundschaltung analogen Ausdrücke festzustellen. Zum Vergleich wollen wir nochmals die Differentialgleichungen der Grundschaltung zusammenstellen: Es gilt für den Schwingungskreis ohne Vernachlässigung:

$$\text{(a)} \qquad L\frac{d^2 i}{dt^2} + N\frac{d^2 i_a}{dt} + M\frac{d^2 i_g}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0\,,$$

für die Gitterspannung:

$$\text{(a')} \qquad \varepsilon_g = E_g - M\frac{di}{dt} - L\frac{di_g}{dt}\,;$$

für die Anodenspannung:

$$\text{(a'')} \qquad e_a = E_a - N\frac{di}{dt} - L_a\frac{di_a}{dt}\,.$$

b) Gitterkreiskoppelung M induktiv, Anodenkreiskoppelung: Selbstinduktionskoppelung[1]) (Fig. 20). In den meisten Darstellungen findet man die Auffassung, daß sich der Anodenstrom in einen Strom im Selbstinduktionszweig und einen Strom im

1) Kann auch als Kapazitätskoppelung aufgefaßt werden.

Kapazitätszweig teile. Diese Auffassung, die natürlich vom Standpunkt der Rechnung einwandfrei ist, trifft den Kern der Sache nicht. In Wirklichkeit haben wir im Schwingungskreis einen starken Strom i und gleichzeitig fließt durch ihn der schwache Anodenstrom i_a. Wir wollen den Ansatz so machen, daß der Gleichstromanteil des Anodenstroms durch den Induktionszweig, der Wechselstromanteil durch den Kapazitätszweig gehe, den außerdem im Schwingungskreis fließenden Strom nennen wir i; mit dieser Zerlegung sind die Kirchhoffschen Verzweigungsgesetze sowohl im Punkt a als im Punkt b erfüllt. Es ist nun im Schwingungskreis:

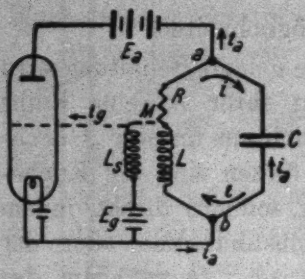


Fig. 20.

$$\text{(b)} \qquad L\frac{d^2i}{dt} + M\frac{d^2i_g}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} - \frac{i_a}{C} - 0.$$

Die Gitterspannung beträgt:

$$\text{(b')} \qquad e_g - E_g - M\frac{di}{dt} - L_g\frac{di_g}{dt}.$$

Die Anodenspannung wird zu:

$$\text{(b'')} \qquad e_a = E_a - L\frac{di}{dt} - Ri.$$

Das Vorzeichen von i_a ist durch unsere frühere Festsetzung über das positive Zeichen von N bestimmt. Da die an Stelle von N tretende Selbstinduktion L nicht negativ sein kann, müssen wir als positive Richtung von i_a diejenige nehmen, welche in der Selbstinduktion mit i gleichgerichtet ist. Solange man nun von der kleinen Phasenverschiebung des Anodenstroms und der durch sie hervorgerufenen Frequenzänderung absieht, was wir bei der Berechnung der Amplitude stets getan haben, ist

$$i_a = -\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2i_a}{dt^2} = -LC\frac{d^2i_a}{dt}.$$

Damit erhalten die Differentialgleichungen die Form (a) und man erhält die Amplitude, wenn man in den auf sie bezüglichen Gleichungen der vorhergehenden Abschnitte N durch L ersetzt. M muß dann negativ sein. Die Frequenz muß besonders berechnet werden, die Rechnung läßt sich, wenn man

von der Wirkung des Gitterstroms auf die Frequenz absieht, für diese Schaltung exakt durchführen und ergibt:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 - \frac{DR}{L\omega} \frac{R}{(M + DL)\omega}\right]. \tag{IVb}$$

Wegen des negativen Zeichens von M wird die Frequenz größer als die Eigenfrequenz des Kreises.

c) Anodenkreiskoppelung induktiv, Gitterkreiskoppelung: Selbstinduktionskoppelung[1]) (Fig. 21).

Es gelten die Differentialgleichungen:

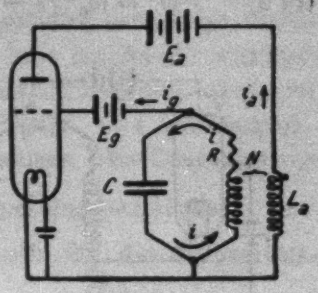


Fig. 21.

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + N\frac{d^2i_a}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i - \frac{1}{C}i_g = 0, \tag{c}$$

$$e_g = E_g - L\frac{di}{dt} - Ri - L_g\frac{di_g}{dt} - Ri_g, \tag{c'}$$

$$e_a = E_a - N\frac{di}{dt} - L_a\frac{di_a}{dt}. \tag{c''}$$

Für die Amplitudenberechnung ist M durch L zu ersetzen. Die Wechselinduktion N muß negativ sein. Die Phasenverschiebung des Anodenstroms ist größer als bei der Telefunkenschaltung, da das Glied Ri, welches sie hauptsächlich hervorruft, im Ausdruck für die Gitterspannung vorkommt, also nicht mehr mit dem Faktor D behaftet auftritt. Die Frequenz wird danach ohne Berücksichtigung des Gitterstroms:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[1 - \frac{R}{L\omega} \cdot \frac{R}{(L + DN)\omega}\left(1 - \frac{DL_a}{N}\right)\right]. \tag{IVc}$$

d) Die Spannungsteilerschaltung (Fig. 22):

Beide Koppelungen sind Selbstinduktionskoppelungen. Die Differentialgleichungen lauten:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + L_1\frac{d^2i_a}{dt^2} - L_2\frac{d^2i_g}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + R\frac{di_a}{dt} + \frac{i}{C} = 0, \tag{d}$$

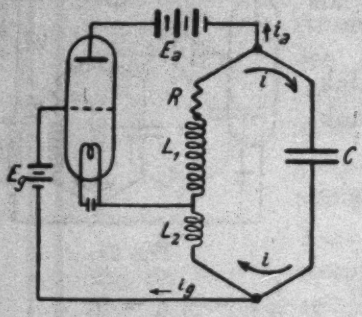
$$e_g = E_g + L_2\frac{di}{dt} - L_2\frac{di_g}{dt}, \tag{d'}$$

$$e_a = E_a - L_1\frac{di}{dt} - L_1\frac{di_a}{dt} - R(i + i_a). \tag{d''}$$

1) Vgl. die Anmerkung unter b).

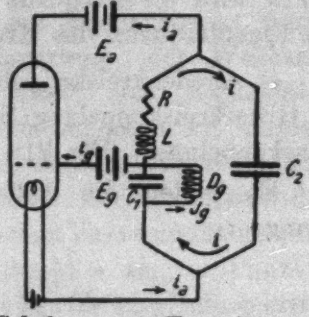
In den Formeln für die Amplitudenberechnung ist M durch $-L_2$, N durch L_1 zu ersetzen. Die Frequenz berechnet sich ohne Gitterstrom zu:

$$\omega^2 = \omega_0^2\left[1 - \frac{D\,R}{L\,\omega}\,\frac{R}{(-L_2 + D\,L_1)\,\omega}\left(1 - \frac{L_1}{L}\right)\right]. \tag{IVd}$$



Spannungsteilerschaltung.

Fig. 22.



Schaltung mit Kapazitätskoppelung.

Fig. 23.

e) Schaltung mit Kapazitätskoppelung:

Als Beispiel einer Schaltung mit Kapazitätskoppelung sei die in Fig. 23 gezeichnete Schaltung gewählt. Für sie gelten die Gleichungen:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} - \frac{i_a}{C_2} + \frac{i_g}{C_1} = 0, \tag{e}$$

$$e_g = E_g - \frac{1}{C_1}\int i\,dt - \frac{1}{C_1}\int i_g\,dt, \tag{e'}$$

$$e_a = E_a + \frac{1}{C_2}\int i_a\,dt - \frac{1}{C_2}\int i_a\,dt. \tag{e''}$$

Für die Amplitudenberechnung ist in den früheren Formeln zu ersetzen: M durch $-\frac{1}{C_1\,\omega_0^2}$, N durch $\frac{1}{C_2\,\omega_0^2}$.

Die Frequenz berechnet sich zu:

$$\omega^2 = \omega_0^2\left[1 + D\,\frac{R}{\frac{1}{C_2\,\omega_0}}\cdot\frac{R}{\left(\frac{1}{C_1\,\omega_0} - \frac{D}{C_2\,\omega_0}\right)}\right]. \tag{IVe}$$

f) Allgemeine Bemerkungen:

In bezug auf die Amplitude ergab sich eine vollkommene Analogie der verschiedenen Schaltungen mit der Grundschaltung. Ein Unterschied besteht lediglich in bezug auf die Frequenz

und das Verhalten gegen Oberschwingungen. (Näheres über diesen Punkt, der außerhalb des Rahmens unserer Untersuchung fällt, siehe Möller, die Elektronenröhren!). Bei den unter b und c untersuchten Schaltungen war zunächst angenommen, daß die ganze Selbstinduktion zur Koppelung verwendet wurde. Dadurch, daß man die auf das Gitter bzw. die Anode wirkende Spannung nur von einem Teil der Selbstinduktion abnimmt, gewinnt man die Möglichkeit, sowohl Gitter- und Anodenkreiskoppelung zu variieren, und so entsprechend dem Optimum von $\left(\frac{M}{L}\right)$ und $\left(\frac{N}{L}\right)$ die günstigsten Koppelungsverhältnisse auszusuchen. Dasselbe gilt natürlich auch für die Kapazitätskoppelungen.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Zenneck für zahlreiche Ratschläge bei der Ausführung der Arbeit meinen Dank auszusprechen.

München, Physik. Inst. d. Techn. Hochsch., 20. Juni 1922.

(Eingegangen 4. August 1922.)

2. *Über das kontinuierliche Röntgenspektrum; von Helmuth Kulenkampff.*

(Gekürzte Münchener Dissertation vom 9. Juni 1922.)

Im Gegensatz zur klassischen Theorie vom Wesen der kontinuierlichen Röntgenstrahlung hat die Entdeckung der quantenmäßigen Grenze des Spektrums (Duane-Huntsches Gesetz) zu der Auffassung geführt, zunächst, daß die Grenzfrequenz monochromatisch sein müsse, da sie anders nicht der maximal verfügbaren Energie zugeordnet sein kann; weiter, daß das Kontinuum in Wahrheit ein äußerst feines Viellinienspektrum sei, dessen jede Linie nach der Einsteinschen Gleichung des lichtelektrischen Effektes einer bestimmten Kathodenstrahlenergie $e \cdot V$ entstammt. Die Frage nach der Verteilung der Intensität auf verschiedene Wellenlängen wird damit zu einer statistischen Frage nach der Wahrscheinlichkeit bestimmter Umsetzungen der bei der Absorption der Kathodenstrahlen verfügbar gewordenen Energie; ihre Beantwortung erfordert genaue Kenntnis der Form des kontinuierlichen Spektrums.

Es ist nun ein unvermeidlicher Übelstand, daß Erzeugung wie Beobachtung der Röntgenstrahlen zahlreiche Entstellungen gerade der Intensitätsverteilung mit sich bringen. Die Röntgenstrahlen, in gewisser Tiefe der Antikathode entstehend, werden in ihr teilweise absorbiert, ebenso beim Austritt aus dem Entladungsrohr durch dessen Glaswand oder besonderes Fenster; der Spektrometerkristall reflektiert im allgemeinen verschiedene Wellenlängen mit verschiedener Stärke. Die Messung der Strahlenergie, durch Ionisation oder durch die photographische Platte, kann nur auf dem Umwege über sekundäre Wirkungen erfolgen. Die Überwindung dieser Schwierigkeiten aber bietet der experimentellen Forschung lohnende Aufgaben.

Ein Versuch in dieser Richtung ist in der vorliegenden Arbeit unternommen worden, mit dem Ziel, soweit als möglich Intensität und Form des kontinuierlichen Spektrums zu ermitteln in Abhängigkeit

1. vom Antikathodenmaterial; hierfür wurden die Spektren der acht Metalle: Al, Fe, Co, Ni, Cu, Ag, Sn, Pt[1]) bei der konstanten Spannung von 10470 Volt gemessen,

2. von der Geschwindigkeit der erzeugenden Kathodenstrahlen. Die Messung erfolgte an Ag und Pt im Spannungsintervall von 7000—12000 Volt.

Die Frage nach der Abhängigkeit vom Emissionsazimut wurde nicht in den Kreis der Untersuchungen einbezogen; es wird nur die rechtwinklig zum Kathodenstrahl ausgesandte Strahlung betrachtet.

Schon aus älteren Arbeiten[2]), die mit der spektral nicht zerlegten Gesamtstrahlung ausgeführt wurden, ist bekannt, daß die Intensität einerseits etwa proportional der Ordnungszahl Z des Antikathodenmetalles ansteige, andererseits am gleichen Material annähernd quadratisch mit dem Potential der Kathodenstrahlen wachse. Untersuchungen an der spektral zerlegten Strahlung[3]) haben diese Resultate bestätigt, ohne indessen wesentlich darüber hinauszugehen. Letzteres vor allem deshalb, weil in ihnen nicht der Versuch gemacht wurde, die erwähnten entstellenden Einflüsse zu eliminieren. So können auch aus den sorgfältigen Messungen Ulreys[4]) allgemeine Gesetzmäßig-

---

1) Annähernd reines Al und Co bekam ich von Merck, Darmstadt; Ni und Ag von Kahlbaum, Berlin. Die übrigen Metalle stammen aus Institutsbeständen.

2) Ausführliches darüber bei R. Pohl, Die Physik der Röntgenstrahlen, Braunschweig 1912.

3) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von E. Wagner, Jahrb. d. Radioak. u. Elektr. 16. S. 190. 1919. Eine inzwischen erschienene Arbeit von H. Behnken (Zeitschr. f. Phys. 3. S. 48. 1920) bringt für unsere Untersuchung keine neuen Gesichtspunkte.

4) C. T. Ulrey, Phys. Rev. 11. S. 401. 1918. Ulrey hat mit einem Coolidgerohr die Abhängigkeit von der Ordnungszahl an sechs Metallen bei 35 Kilovolt untersucht; ferner an Wolfram die Abhängigkeit von der Spannung im Bereich von 20—50 Kilovolt. Wir kommen auf die Ergebnisse unten zurück.

keiten nicht abgeleitet werden. March[1]), der in mehreren Arbeiten eine Theorie des kontinuierlichen Spektrums entwickelt hat, glaubt diese durch die Ulreyschen Messungen bestätigt zu sehen. Aus dem angeführten Grunde halte ich dies nicht für beweisend, wenn auch March versucht, eine nachträgliche Korrektur für Absorption in der Glaswand des Rohres anzubringen. Mit den Ergebnissen meiner Messungen ist seine Theorie nicht in Einklang zu bringen. Behnken[2]) hat umgekehrt den Versuch gemacht, unter bestimmten Annahmen über die Stärke der Absorption in der Glaswand und in der Antikathode aus den Ulreyschen Resultaten eine allgemeine Spektralformel abzuleiten. Auch diese unterscheidet sich wesentlich von derjenigen, welche sich aus den Messungen der vorliegenden Arbeit ergibt. Der Grund hierfür dürfte einerseits darin zu suchen sein, daß Behnken unzutreffende Annahmen über die Kathodenstrahlabsorption macht, andererseits in der Ulreyschen Art der Intensitätsmessung.

Ulrey mißt nämlich die Ionisation in einer mit Bromäthyldampf gesättigten Kammer; sein Spektralbereich liegt im selektiv absorbierenden Gebiet des Broms, so daß ein wesentlicher Teil der Absorption auf Sekundärstrahlung entfällt. Die resultierende Ionisationswirkung ist im einzelnen nicht zu übersehen; jedenfalls aber müssen diese besonderen Umstände eine, vielleicht beträchtliche, Entstellung der Intensitätsverteilung bewirken.[3])

Aus dem Gesagten geht hervor, daß einwandfreie Messungen, die zum Vergleich und zur Ergänzung der meinigen herangezogen werden könnten, nicht vorhanden sind. Da letztere auf einen verhältnismäßig engen Spannungsbereich und bestimmte Versuchsbedingungen beschränkt bleiben mußten, erschien es geboten, aus ihnen zunächst keine weiteren Schlußfolgerungen zu ziehen, die über den unmittelbaren experimentellen Tatbestand hinausgingen.

---

1) A. March, Phys. Zeitschr. 22. S. 209 u. 429. 1921 u. 23. S. 84. 1922; Ann. d. Phys. 65. S. 449. 1921.

2) H. Behnken, Zeitschr. f. Phys. 4. S. 241. 1921.

3) Abgesehen von der möglichen Wellenlängenabhängigkeit des Verhältnisses von Ionisation zu wahrer Strahlenergie, die uns hier nicht interessiert.

1. Die Versuchsanordnung.

a) *Das Entladungsrohr.* Die Röntgenstrahlen wurden im gasgefüllten Rohr erzeugt, einer Glaskugel von 20 cm Durchmesser mit einer kräftigen Aluminiumkathode. Das Rohr war so aufgestellt, daß die Antikathode senkrecht von oben eingeführt wird; der Kathodenstrahl verläuft horizontal. Die Röntgenstrahlen treten durch ein mit Aluminiumfolie bedecktes spaltförmiges Fenster aus.

Die mit fließendem Wasser gekühlte Antikathode (*A. K.*) wird mittels Glasschliff in das Rohr eingesetzt und kann leicht herausgenommen sowie bei evakuiertem Rohr um ihre Achse gedreht werden. Sie besteht aus einem Messingrohr von 18 mm Durchmesser, durch welches die Kühlwasserrohre (*E*, *A*) heruntergeführt sind und welches am oberen Ende durch Siegellack mit dem Glaskonus des Schliffes verkittet ist. Das Messingrohr trägt am unteren Ende einen vierkantigen, vom Kühlwasser durchströmten Hohlkörper aus Kupfer, auf dessen Außenseiten die jeweils als Antikathode dienenden Metalle in Form von 0,5—1 mm dicken Blechen aufgelötet werden.

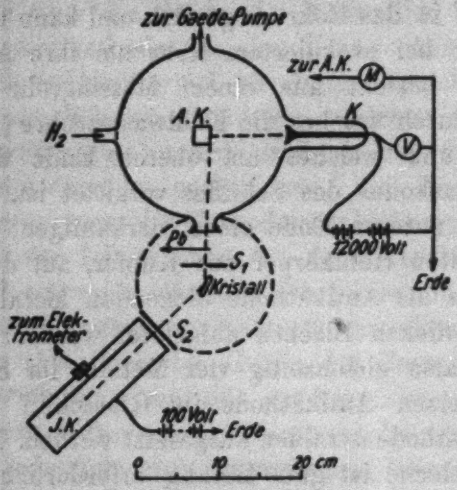
Es befinden sich also gleichzeitig vier Metalle im Rohr; durch Drehen der ganzen Antikathode im Glasschliff kann jedes von ihnen den Kathodenstrahlen ausgesetzt werden. Beim Befestigen der Metallbleche ist gute Lötung erforderlich, da — wie unten näher ausgeführt — vollkommene Wärmeabgabe nach innen verlangt werden muß. Aluminium wurde zu diesem Zweck rückseitig galvanisch verkupfert und dann mit gewöhnlichem Lötzinn gelötet; Zinn selbst wurde aus reiner Zinnfolie zusammengeschmolzen und auf Kupferblech aufgesetzt.

Einzelheiten über die Kühlung der Antikathode vgl. unter 1b.

Das Rohr war anfangs mit Luft gefüllt; es zeigte sich aber, daß schon nach kurzem Betrieb sich Oberflächenschichten auf den bestrahlten Antikathodenmetallen bildeten, die eine einwandfreie Intensitätsmessung unmöglich machten. Auch Stickstofffüllung des Rohres änderte wenig an diesen Mißständen. Es wurde dann Wasserstoff benutzt und zugleich für gründliche Fernhaltung von Quecksilberdampf gesorgt. Die Leitung zur Gaede-Quecksilberpumpe, welche die Evakuierung besorgte, wurde deshalb gekühlt; anfangs mit Kälte-

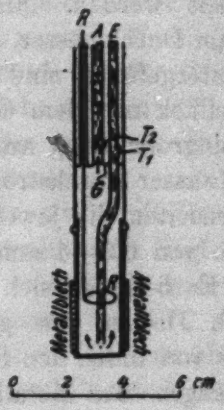
mischung aus fester Kohlensäure und Alkohol, später mit flüssiger Luft. Bei dieser intensiven Kühlung, welche dafür sorgt, daß nur reiner Wasserstoff sich im Entladungsrohr befindet, zeigten die Antikathodenmetalle auch nach vielstündiger Bestrahlung noch frischen Glanz.

Um einerseits dem schädlichen Einfluß geringfügiger Undichtigkeiten des mit vielen Kittstellen versehenen Rohres, andererseits der im Betriebe eintretenden Selbstevakuation zu



Schema der Versuchsanordnung.

Fig. 1.



Antikathode.

Fig. 1a.

begegnen, ließ ich dauernd frischen Wasserstoff durch das Rohr strömen. Die Gaedepumpe ist also fortwährend in Tätigkeit. Der Wasserstoff wurde elektrolytisch entwickelt und, über P_2O_5 getrocknet, in einem Vorvakuum von etwa 2 mm Druck gesammelt. Von hier kann er durch ein fein regulierbares Ventil in das Entladungsrohr eintreten; vorher passiert der Wasserstoffstrom ebenfalls die Kühlvorlage. Korrespondierende Regulierung des Einlaßventils und der Pumpe gestattet es, die Entladungsstromstärke gut konstant zu halten.

Der Durchmesser des Kathodenstrahlbrennfleckes auf der Antikathode betrug etwa 12 mm.

Der Betrieb des Rohres erfolgte mit der streng konstant gehaltenen Spannung einer Akkumulatorenbatterie von etwas

über 12000 Volt; eine Beschreibung derselben ist von Wagner[1]) mitgeteilt worden.

Die Spannung konnte mit dem ebenda beschriebenen elektrostatischen Voltmeter (*V* in Fig. 1) in einem Bereich von 7000—12000 Volt auf 1 Promille genau gemessen werden. Das Instrument ist inzwischen unter Verwendung eines konstanten Hochspannungswiderstandes von 2 Millionen Ohm neu geeicht worden (nach dem Ohmschen Gesetz, Strommessung durch Kompensation gegen Normalelemente); die Spannungsangaben können für unsere Zwecke als exakt richtig angesehen werden. (Fehler $\pm$ 10 Volt.)

Zur Messung des Entladungsstromes befindet sich ein Milliamperemeter (*M*) im Stromkreis, ein empfindliches Zeigerinstrument, welches 0,01 Milliampere abzulesen gestattet. Es war zwischen Antikathode und Erde geschaltet, so daß ein bei feuchter Witterung stets vorhandener Erdschlußstrom von der Hochspannungsbatterie in ihm nicht zur Messung kam.

b) *Die Messung der Kathodenstrahlenergie.* Die so gemessene Stromstärke gibt aber bei Gasentladung kein richtiges Maß für die wirksame Kathodenstrahlenergie, und zwar in erster Linie wegen der *Rückdiffusion der Kathodenstrahlen* aus der Antikathode. Ein erheblicher Teil der Elektronen wird in ihr stark abgelenkt und tritt ohne großen Geschwindigkeitsverlust wieder aus, geht mithin für die Röntgenstrahlerzeugung von vornherein verloren. Die Rückdiffusion nimmt mit steigender Atomnummer erheblich zu[2]); vergleichende Messungen der Röntgenstrahlausbeute an verschiedenen Metallen können also ohne Berücksichtigung derselben nicht ausgeführt werden.

Es ist ferner zu bedenken, daß bei Gasentladung der Gesamtstrom sich aus *Elektronen- und Ionenstrom* zusammensetzt. Bei gleichbleibenden Bedingungen der Entladung, d. h. vor allem bei gleichem Antikathodenmaterial, besteht allerdings weitgehende Proportionalität zwischen Elektronenstrom i_e und Gesamtstrom i_g, wie Wagner[1]) festgestellt hat. Durch Druckänderung im Entladungsrohr wurde, bei konstanter Spannung,

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. 57. S. 401. 1918.

2) Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Abhandlung. der Heidelb. Akad. d. Wissensch. 1918. (Tab. 17.)

die Gesamtstromstärke geändert; genau entsprechend änderte sich die dem Elektronenstrom proportionale Röntgenstrahlintensität. Ich konnte dieses Resultat bestätigen. Dagegen ist nicht zu übersehen, wie die mit dem Antikathodenmaterial sich ändernde Sekundärstrahlung und Rückdiffusion auf die Stromverhältnisse einwirken.

Es war also nötig, die Kathodenstrahlenergie direkt zu messen, und zwar in Form der *Wärmeenergie*, welche die Kathodenstrahlen der Antikathode zuführen. Da die rückdiffundierenden Elektronen nur einen geringen Bruchteil — dieser wird allerdings wohl in Wärme umgesetzt — ihrer Geschwindigkeit in der Antikathode verlieren[1]), bleiben sie von dieser Messung nahezu ausgeschlossen. Andererseits wird bekanntlich nur ein sehr geringer Prozentsatz, gegen 1—2 Promille, der Kathodenstrahlenergie in Röntgenstrahlung verwandelt; praktisch findet sich also die gesamte, der Antikathode tatsächlich zugeführte Energie in der erzeugten Wärmemenge wieder.

Diese Wärme wird vollständig an das durchströmende Kühlwasser abgegeben und kann also durch die Temperaturerhöhung desselben mittels Thermoelement gemessen werden. Letzteres konnte in einfacher Weise so hergestellt werden, daß an das Zuleitungs- wie an das Ableitungsrohr des Kühlwassers je ein Konstantandraht (T_1 T_2, Fig. 1a) gelötet wurde; zum Wärmeschutz wurden die Lötstellen mit Watte umkleidet. E und A sind Messingrohre von 0,5 mm Wandstärke; die den Innenraum des Kupferkörpers nach oben abschließende Platte G, die den Thermostromkreis an dieser Stelle schließt, ist ebenfalls aus Messing, so daß weitere Thermokräfte nicht auftreten können.

Wesentlich für diese Messung ist, daß das Wasser den Kühlraum mit konstanter Geschwindigkeit durchfließt. Das Wasser wurde deshalb einem besonderem Reservoir, welches bis zu einer konstanten Höhe gefüllt gehalten wurde, entnommen; die Strömungsgeschwindigkeit kann dann durch die

1) Nach P. Lenard (a. a. O.) sind die Geschwindigkeitsverluste bei der Rückdiffusion zwar größer (2- bis 4fach), als bei normal fortgesetztem Strahlverlauf, aber bei der Mehrzahl der Elektronen immer noch von kaum merklichem Betrag.

Höhe der Ausflußöffnung reguliert werden. Die konstruktiven Verhältnisse (die innere Weite des Kühlraumes und des Antikathodenhalses beträgt nur 15 mm) brachten es mit sich, daß die Kühlvorrichtung auf sehr engem Raum angeordet werden mußte. Es machten sich deshalb anfangs turbulente Strömungen und starke Abscheidung von Luftblasen in den engen Räumen sehr störend bemerkbar; die Strömungsgeschwindigkeit wurde trotz konstanten Wasserdruckes mitunter bis zu völligem Aussetzen verändert. Das Galvanometer zeigte erhebliche, unregelmäßige Schwankungen des Thermostromes an, die auf ungleichmäßige Wärmeabgabe an das Wasser hindeuteten. Diese Schwierigkeiten konnten erst dadurch überwunden werden, daß in den Kühlraum ein Rührer R eingesetzt wurde. Dieser mußte von außen betätigt werden; er bestand aus einem Drahtring mit langem Stiel, welcher durch ein besonderes, drittes Rohr nach außen geführt wurde. Dieses war nach oben bis zur Höhe des Wasserspiegels im Reservoir verlängert, wodurch eine Abdichtung des Rührerstieles vermieden wurde. Der Rührer wurde durch einen Motor mit Exzenterscheibe ziemlich rasch auf und ab bewegt.

Der Erfolg dieser Einrichtung war durchaus befriedigend. Die Strömungsgeschwindigkeit des Kühlwassers — sie wurde bei jeder Versuchsreihe mehrmals gemessen — blieb jetzt fast vollkommen konstant. So ergaben sich z. B. bei einem etwa fünfstündigen Versuch folgende Werte, wobei in Zwischenräumen von etwa 30 Minuten die in 50 Sekunden ausfließende Wassermenge durch Wägung bestimmt wurde:

211; 213; 210; 210; 209; 208; 208; 208; 208; g in 50 sec.

Weiter bewirkte der Rührer auch gleichmäßige Erwärmung des Kühlwassers, kenntlich an nahe konstantem Ausschlag des Galvanometers im Thermokreis. Letzteres, ein Drehspulgalvanometer von Siemens & Halske mit einem Spulenwiderstand von 25 Ohm, wurde ohne besonderen Vorschaltwiderstand verwandt; seine Empfindlichkeit betrug, gemessen mit dem Thermosystem im Stromkreis, 1 Skalenteil auf 0,388 Mikrovolt. Die Ablesung erfolgte durch objektive Abbildung eines Nernstschen Glühstiftes auf einer 2,3 m entfernten Millimeterskala. Es ergab sich so im Mittel ein Ausschlag von 150 Skalenteilen, der auf etwa 3 Skalenteile konstant blieb. Innerhalb dieses

Zwischenraumes schwankte der Ausschlag unregelmäßig in Zeiten von einigen Sekunden; durch längere Beobachtung bei konstanter Entladung konnte leicht der mittlere Ausschlag auf $^1/_2$ Skalenteil genau festgestellt werden.

Schwankungen in der Entladungsstromstärke kann naturgemäß der Thermostrom nur mit erheblicher Trägheit folgen. Da solche im Betriebe nicht zu vermeiden sind, wurde bei der Messung so verfahren, daß die zur Zeit einer Elektrometerablesung bestehende Stromstärke, wie sie das Milliamperemeter anzeigt, notiert wurde; die Einzelablesungen einer Beobachtungsreihe werden hiernach auf konstante Stromstärke proportional umgerechnet. Das Verhältnis des Entladungsstromes zum Thermostrom (= Verhältnis i_g/i_e) wird im Mittel über längere Zeit gesondert gemessen; es erwies sich innerhalb einer Versuchsreihe stets als konstant und konnte deshalb nachträglich als allgemeiner Proportionalitätsfaktor eingeführt werden. Auch bei erheblichen Stromänderungen, bis auf den halben Betrag herab, bleibt dies Verhältnis konstant; ebenso, wie bereits erwähnt, daß zur Röntgenstrahlintensität. Zwei diesbezügliche Messungen ergaben folgendes Resultat:

Versuche	i_g in Miliiampere	Thermostrom proportional i_e	$\frac{i_e}{i_g}$	Röntgenstrahlintensität J	$\frac{J}{i_g}$
1	3,74	122	32,6	11,6	3,10
	4,46	146	32,6	13,9	3,11
2	2,18	49,5	22,7	4,5	2,06
	4,26	97,5	22,9	8,7	2,04

Es war weiter zu prüfen, ob etwa beim Vergleich verschiedener Antikathodenmaterialien deren verschiedene Wärmeleitfähigkeit einen Einfluß ausübt auf die nach innen an das Wasser abgegebene Wärmemenge. Dies könnte möglich sein, da die von den Kathodenstrahlen getroffene äußere Oberfläche offenbar bei schlechten Wärmeleitern eine höhere Temperatur annimmt als bei guten; eine etwa merklich vorhandene Wärmestrahlung oder Wärmeleitung durch das Wasserstoffgas müßte also in verschiedenem Betrage wirken. Die Prüfung wurde in der Weise vorgenommen, daß die Röntgenstrahlung einerseits

von einem reinen Kupferblech von 1 mm Dicke, andererseits von einem galvanisch dünn verkupferten Eisenblech gleicher Dicke verglichen wurde. Beide Bleche liefern die Kupferstrahlung; bezogen auf gleiche, durch den Thermostrom gemessene Kathodenstrahlenenergie geben beide gleiche Röntgenstrahlintensität, wie die folgende Tabelle zeigt:

Wellenlänge in Å	Röntgenstr. Intensität	
	Voll-Cu	Cu auf Fe
1,68	20,2	20,0
2,09	20,4	20,4
2,37	15,6	15,8

Die Zahlen sind nach der § 3 besprochenen Methode für etwa verschieden starke Absorption in der Antikathode korrigiert und lassen einwandfrei erkennen, daß Fehler der betrachteten Art nicht in Frage kommen. Sämtliche Messungen sind deshalb direkt auf die am Thermoelement gemessene Kathodenstrahlenenergie bezogen.

Wie erheblich demgegenüber die Zugrundelegung des Gesamtstromes der Entladung alle weiteren Resultate fälschen würde, läßt die folgende Zusammenstellung erkennen, in der zu den oben stehenden Elementen als Antikathoden diejenigen Gesamtstromstärken i_g in Milliampere angegeben sind, die erforderlich waren, um in ihnen gleiche Erwärmung, d. h. gleichen wirksamen Elektronenstrom zu erzeugen. Letzterer berechnet sich aus der Wärmemessung für den hier betrachteten Fall zu rund 2,4 Milliampere, wenn die Thermokraft Konstantan-Messing mit 41 Mikrovolt pro 1° angesetzt wird.

Element	Al	Fe, Co, Ni, Cu	Ag, Sn	Pt
i_g	3,7	4,2	4,7	5,3

Die Zunahme von i_g nach schwereren Elementen liegt im Sinne der gleichartig wachsenden Rückdiffusion. Hand in Hand damit geht die weitere Beobachtung, daß zur Erzielung der gleichen Gesamtstromstärke bei schwereren Elementen ein höheres Vakuum im Entladungsrohr nötig ist. Anschaulich zeigte sich dies, wenn man die mit vier verschiedenen Metallen besetzte

Antikathode im Glasschliff drehte, während der Entladungsstrom eingeschaltet und der Gasdruck im Rohr sowie die Spannung konstant blieb. Dreht man etwa von Cu auf Al, so fällt sofort die Stromstärke; trifft dann der Kathodenstrahl auf Ag, so steigt sie erheblich über den Anfangswert hinaus, um ihn schließlich auf Cu genau wieder zu erreichen. Die Erscheinung beruht darauf, daß die verminderte bzw. vermehrte Elektronenrückdiffussion (event. auch die Sekundärstrahlung) Anlaß gibt zu verminderter bzw. vermehrter Stoßionisation bei gleichbleibender Gasmolekülzahl in ccm.

c) *Das Spektrometer*, nach dem Braggschen Prinzip konstruiert, trägt an der Eintrittsseite der Röntgenstrahlen einen fest montierten Spalt S_1; ein zweiter Spalt S_2 befindet sich vor der Ionisationskammer $J\,K$ und ist mit ihr zugleich um die Achse des Spektrometers drehbar. Beide Spalte bestehen aus 3 mm starken Al-Blech, welches die benutzten weichen Strahlen nicht durchdringen. Sekundärstrahlung von den Spalträndern wird durch die Verwendung von Aluminium weitgehend vermieden. Der Höhe nach — Längsrichtung der Spalte — war das Röntgenstrahlbündel so zu begrenzen, daß es auch am hinteren Ende der Ionisationskammer nicht auf deren Seitenwände traf. Der Spalt S_1 wurde deshalb bis auf eine Höhenöffnung von 12 mm abgeblendet. Ein Bleischieber Pb ermöglicht exaktes Ein- und Ausschalten der Röntgenstrahlung.

Der Kristall ist in Verlängerung der Spektrometerachse auf einem besonderen Halter so montiert, daß seine reflektierende Oberfläche genau in die Drehachse gebracht werden kann.

Die zylindrische Ionisationskammer besteht aus Aluminium; an der Eintrittsseite der Strahlen hat sie eine Öffnung, welche mit dünnstem Aluminiumschaumblatt bedeckt ist. Innen befindet sich, parallel zur Längsachse der Kammer, eine isoliert eingeführte Elektrode aus Aluminium, exzentrisch angeordnet, so daß sie von den Röntgenstrahlen nicht getroffen werden kann. Von hier führt eine elektrostatisch geschützte Leitung zum Elektrometer. Als zweite Elektrode dient die Kammerwand selbst; sie wird von einer Akkumulatorenbatterie auf 100 Volt aufgeladen. Eine Prüfung ergab, daß diese Spannung zur Erzielung vollen Sättigungsstromes ausreichte.

Die Ionisationskammer ist mit Luft gefüllt.

Der Ionisationsstrom wird gemessen durch Aufladung des Fadens eines Wulfschen Einfadenelektrometers. Die beiden Schneiden des Instrumentes sind auf $\pm$ 100 Volt aufgeladen. Die Empfindlichkeit wurde meist auf etwa 8 Skalenteile pro 0,1 Volt eingestellt; sie wurde durch besondere Vorrichtung während der Versuche fortlaufend kontrolliert.

Es seien hier schließlich noch folgende Maße angegeben, deren Kenntnis für spätere Berechnungen nötig ist:

Entfernung vom Al-Fenster des Rohres bis zum Kristall 68 mm,
Entfernung vom Kristall bis zur Ionisationskammer . . . 85 mm.

(Die Entfernung der Spaltmitten S_1 und S_2 vom Kristall beträgt 25 bzw. 75 mm).

(innerer) Durchmesser der Ionisationskammer 48 mm,
Länge der Ionisationskammer 184 mm.

2. Die Messung der spektralen Intensitätsverteilung.

Im folgenden sollen zunächst die allgemeinen Methoden der Messung besprochen werden, sowie die Ermittlung derjenigen Spektralkurven, aus denen durch Berücksichtigung der entstellenden Absorptionseinflüsse die wahre Intensitätsverteilung entnommen wird. Die Messung bzw. Berechnung dieser Absorptionseinflüsse wird unten gesondert behandelt.

a) *Die Justierung* des Strahlenganges und des Kristalls erfolgte nach bewährter Methode hinreichend genau in der Weise, daß zunächst durch Verschiebung der Spaltbacken von S_1 das Röntgenstrahlbündel (beobachtet am Fluoreszenzschirm) genau durch die Drehachse gelenkt und darauf durch ein Lichtbündel ersetzt wurde, mit Hilfe dessen die optisch spiegelnde Kristalloberfläche in richtige Stellung gebracht wurde.

Der Winkel „Null" wird so ermittelt, daß die Ionisationskammer — der Kristall wird entfernt — genau in „Fluchtstellung", d. h. auf das Maximum des geradlinigen Primärröntgenstrahles gebracht wird. Von hier aus wird ein Winkel 2φ eingestellt und der zugehörige Winkel φ des Kristalls durch schrittweise Drehung durch denjenigen Bereich bestimmt, innerhalb dessen noch reflektierte Strahlung in die Ionisationskammer gelangt; die Stellung maximaler Reflexion gibt den gesuchten Winkel. Eine gute Kontrolle der Winkelmessung war da-

durch möglich, daß sich in allen untersuchten Metallen geringe Verunreinigungen befanden, meist Eisen, mit Spektrallinien im gemessenen Bereich.

b) *Als Spektrometerkristall* ist Kalkspat benutzt, und zwar einer der beiden Kristalle, deren Reflexionsvermögen von E. Wagner und Verf.[1]) gemessen worden ist.

Die Reflexion erfolgt am feststehenden Kristall. Gegenüber der Methode der kontinuierlichen Kristalldrehung bedeutet dies eine wesentlich vereinfachte Handhabung; soweit kontinuierliche Strahlung in Frage kommt, ist sie auch frei von den Fehlern, welche dieselbe Methode für die Messung monochromatischer Strahlung unbrauchbar machen. Die Reflexionsverhältnisse sind a. a. O. im einzelnen näher erörtert; als Bedingung für richtige Messung mit stehendem Kristall ist dort nur die aufgestellt, daß die ganze reflektierte Strahlung, welche eine erhebliche Winkelöffnung besitzen kann, auch vollständig in die Ionisationskammer gelangt. Mit Steinsalz konnte in der genannten Arbeit diese Bedingung nicht erfüllt werden, wohl aber mit Sicherheit bei Verwendung von Kalkspat, wie ich auch hier erneut festgestellt habe.

Ausreichend ist hierfür bereits eine Weite des Spaltes δ_2 von etwa 2,5 mm; um aber von etwa vorhandenen kleinen Justierfehlern unabhängig zu sein, habe ich den Spalt noch erheblich weiter gewählt (4 mm). Diese große Spaltöffnung bringt allerdings einen anderen Übelstand mit sich, daß nämlich die Sekundärstrahlung vom Kristall (zerstreute Strahlung) in erheblichem Maße in die Ionisationskammer gelangt. Sie mußte also stets gesondert gemessen werden. Ihre Stärke betrug durchschnittlich etwa 20 Proz. der Reflexionsintensität und war im allgemeinen im ganzen Spektralbereich konstant.

Eine Beeinflussung der Spektren durch Reflexion in zweiter oder höherer Ordnung kommt, wie den unten wiedergegebenen Kurven zu entnehmen ist, in nennenswertem Betrag nirgends in Frage.

Für die Gitterkonstante der (100)-Ebene von Kalkspat ist der Siegbahnsche Wert $d = 3{,}029$ Å angenommen.

---

1) E. Wagner u. H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. 68. S. 369. 1922.

c) *Die Messung* erfolgt in bekannter Weise so, daß Kristall und Ionisationskammer, stets in der festgelegten Reflexionsstellung zueinander, in kleinen Schritten durch den ganzen zu messenden Spektralbereich geführt werden. Die Schritte betrugen im allgemeinen je 30—50′ (für den Kristall); an Stellen, wo Spektrallinien auftreten, müssen sie enger aneinander gelegt werden.

Die in jeder Richtung reflektierte Intensität wird als Ionisationsstrom durch Aufladung des Elektrometers in einer bestimmten Zeit gemessen; die für genügend große Ausschläge erforderlichen Zeiten betrugen zwischen 15 und 60 Sekunden. Die Zeitmessung erfolgte nach den Sekundenschlägen eines Relais, welches an die im Institut befindliche Normaluhr angeschlossen ist.

Die erzielten Elektrometerausschläge lagen zwischen 10 und 25 Skalenteilen; Zehntel können noch mit Sicherheit geschätzt werden. Der Fehler der Einzelmessung kann also etwa 1 Proz. betragen; sekundäre Umstände bewirken, daß er im allgemeinen etwas größer ist. Durch unmittelbare Wiederholung der gleichen Ablesung können aber letztere, sowie persönliche Irrtümer, leicht eliminiert werden.

Grundsätzlich wurde jedes einmal durchgemessene Spektrum an einem späteren Tage nochmals gemessen; es müssen sich innerhalb der Fehlergrenzen die gleichen Werte ergeben. Andernfalls ist nach der Ursache der Abweichung zu suchen; nachdem aber die eingangs besprochenen Schwierigkeiten behoben waren, ergab sich volle Reproduzierbarkeit.

Als Beleg dafür mag die Wiedergabe der Einzelbeobachtungen eines Ag-Spektrums bei 10470 Volt dienen (Fig. 2). Die Figur läßt erkennen, daß die Beobachtungspunkte der zeitlich zum Teil recht weit auseinander liegenden Messungen doch sämtlich auf *eine* gemeinsame Kurve fallen. Zwischen den Versuchsreihen liegen jeweils Messungen an den übrigen drei Metallen, die mit Silber zusammen sich auf der Antikathode befanden (es waren dies Pt, Cu, Co). Am 24. Januar wurde die Antikathode herausgezogen; man sieht, das selbst dieser Eingriff (Änderungen der unten erwähnten Art wurden sorgfältig vermieden!) die Reproduzierbarkeit nicht störte.

Die Figur gibt zugleich ein Bild der Meßgenauigkeit. Als Ordinaten sind die Elektrometerablesungen in Skalenteilen pro

20 sec aufgetragen; abgezogen ist die Streustrahlung, welche hier 3,4 bis 3,5 Skalenteile für die gleiche Zeit betrug. Die Winkelstellung des Kristalls ist bis auf $\pm$ 0,5′ genau definiert.

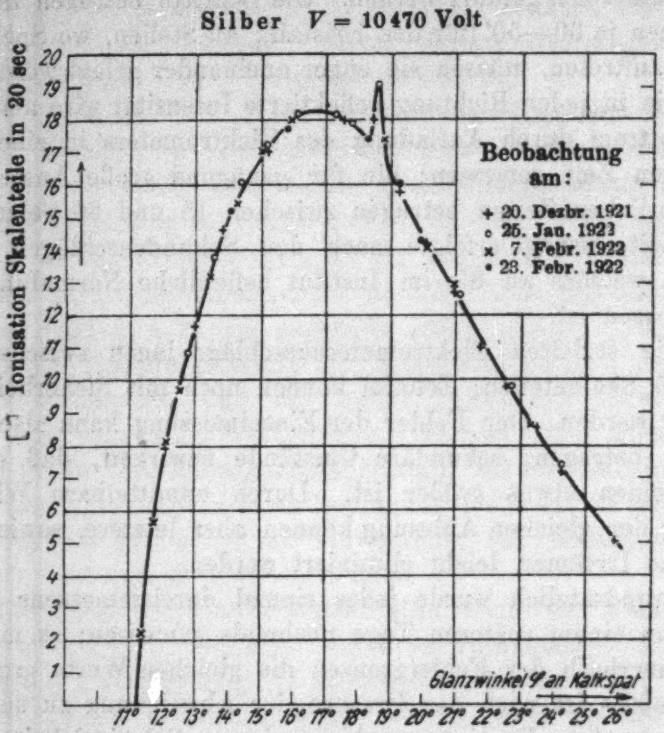


Fig. 2.

Zusammengehörige Beobachtungen sind trotzdem nach Möglichkeit am gleichen Tage ausgeführt worden. So wurde insbesondere bei den die Abhängigkeit vom Antikathodenmetall betreffenden Messungen an ein Spektrum stets noch das eines zweiten Metalles angeschlossen, welches als Ausgangspunkt für die nächste Beobachtungsreihe diente.

Nachdem die Spektren von vier Metallen gemessen sind, müssen diese von der Antikathode entfernt und neue angebracht werden, womit erhebliche Eingriffe am Entladungsrohr verbunden sind. Um etwaigen dabei auftretenden, unerkannten Veränderungen zu begegnen, wurden nur drei neue Metalle genommen und eines der bereits gemessenen wieder beigefügt, welches den Anschluß vermittelte.

Im ganzen waren drei in sich geschlossene Beobachtungsreihen erforderlich. Innerhalb jeder derselben waren irgendwelche Neujustierungen nicht erforderlich, so daß insbesondere der Spalt S_1, dessen Weite die gemessene Intensität proportional ist, nicht verstellt zu werden brauchte. Er war etwa 0,86 mm weit; aber die Einstellung der Spaltbacken konnte nicht so exakt vorgenommen werden, daß diese Weite mit der erforderlichen Genauigkeit reproduzierbar gewesen wäre. In der angegebenen Weise wird diese Fehlerquelle vermieden.

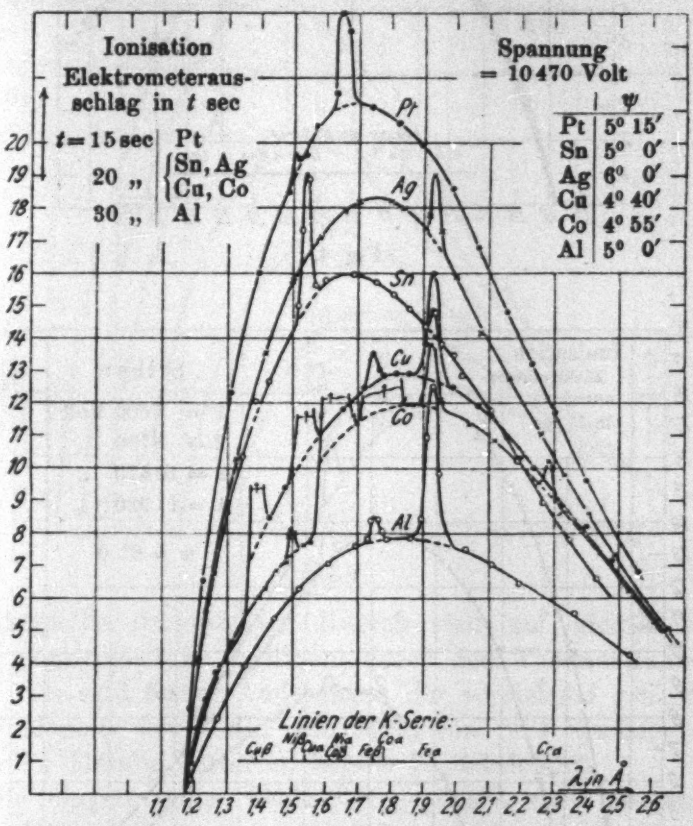


Fig. 3.

d) *Die Ergebnisse* dieser Messungen sind in den Fig. 3 bis 6 zusammengestellt. Die 8 Spektren der Fig. 3 und 4 sind mit der konstanten Spannung von 10470 Volt erhalten; die Spektren von Fe und Ni sind in Fig. 4 getrennt gezeichnet, um Fig. 3 nicht unübersichtlich zu machen. Der Deutlichkeit halber

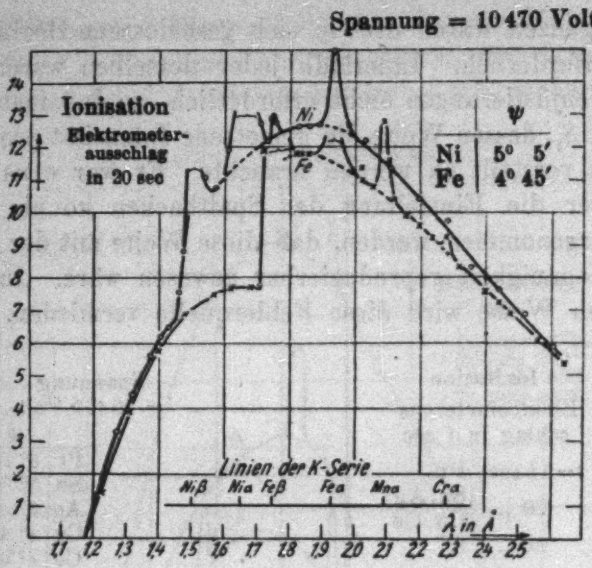

Spannung = 10470 Volt
Ionisation
Elektrometer-
ausschlag
in 20 sec
Ni
Fe
ψ
Ni 5° 5′
Fe 4° 45′
Linien der K-Serie
Niβ Nia Feβ Fea Mna Cra
λ in Å

Fig. 4.

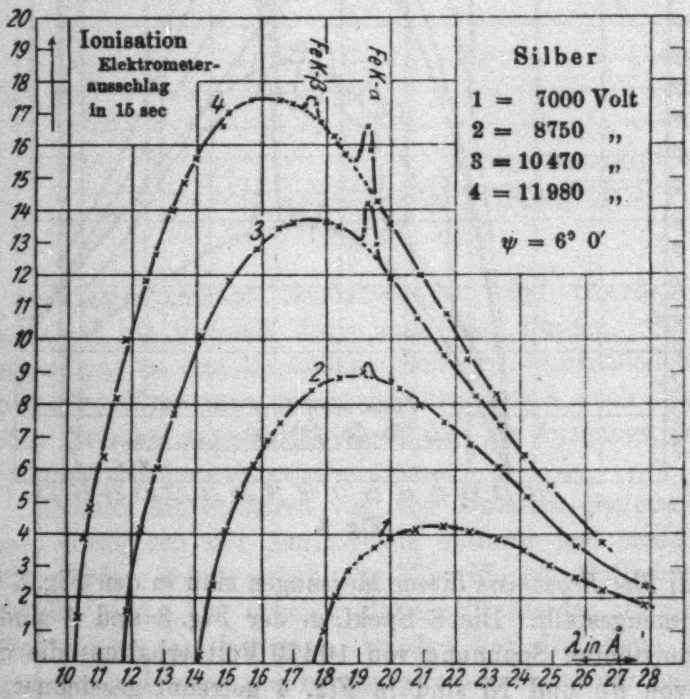

Ionisation
Elektrometer-
ausschlag
in 15 sec
Silber
1 = 7000 Volt
2 = 8750 „
3 = 10470 „
4 = 11980 „
ψ = 6° 0′
λ in Å

Fig. 5.

sind ferner in der gleichen Figur die Spektren von Al und Pt in anderen Ordinatenmaßstäben dargestellt, die aus der Zeichnung ersichtlich sind. Die Figg. 5 und 6 enthalten die Spektren von Ag und Pt bei veränderter Entladungsspannung zwischen 7000 und 12000 Volt.

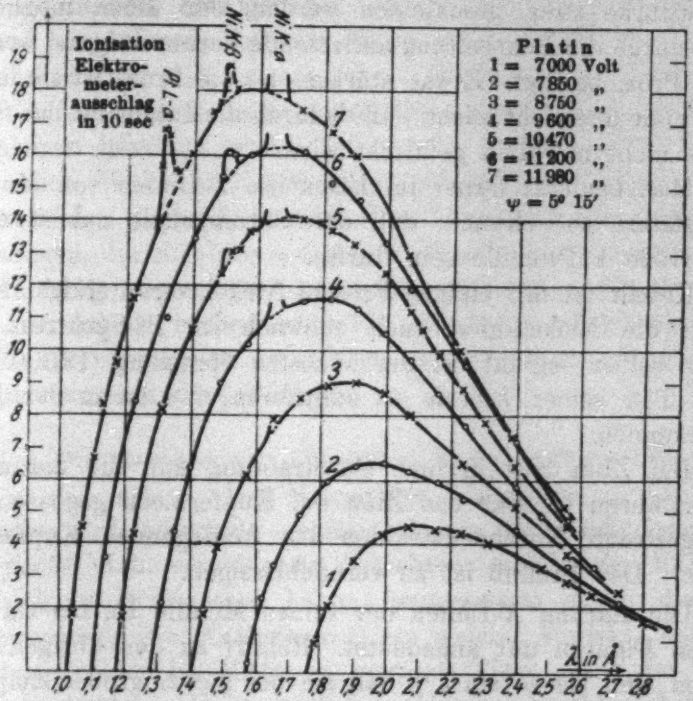


Fig. 6.

Sämtliche dargestellten Kurven sind auf gleiche reine Elektronenstromstärke (bestimmt durch den Thermostrom) bezogen. Es sind ferner Änderungen der vorstehend genannten Art (Spaltweite usw.), die eine Serie von je 4 Spektren verschiedener Metalle betreffen, bereits berücksichtigt.

Die eingetragenen Beobachtungspunkte sind zusammengefaßte Mittelwerte; zusammengefaßt sowohl aus mehreren Ablesungen am gleichen Versuchstage, wie aus Versuchsreihen verschiedener Tage.[1]) Die kurzwellige Grenze des Spektrums ist durch die Beobachtungspunkte auf etwa 1—2 Proz. genau

1) Die Art dieser Zusammenfassung ist z. B. aus dem Vergleich des Ag-Spektrums Fig. 3 mit dem der Fig. 2 zu ersehen.

festgelegt und entspricht in allen Fällen der nach dem Duane-Huntschen Gesetz zu erwartenden.

Es wurde bereits erwähnt, daß in sämtlichen Metallen Spektrallinien von *Verunreinigungen* auftreten. Die *K*-Serie des Eisens ist, mit Ausnahme von Pt, überall beobachtet; aus der Linienstärke kann geschlossen werden, daß diese, möglicherweise durch die Bearbeitung auftretende Verunreinigung weniger als 1 Proz. beträgt. Etwas stärker, 1—1,5 Proz., ist sie in Al; aber man übersieht leicht, daß dadurch die Intensität des Spektrums nicht merklich gefälscht wird.

Man bemerkt ferner im Eisen die *K*-Linien von Mn und Cr, letztere so schwach, daß der Chromgehalt nur etwa von der Größe 1 Promille sein dürfte.

Kobalt ist mit einigen Prozent Nickel verunreinigt; ferner treten die Nickellinien auch schwach im Pt-Spektrum auf. Platin selbst beginnt bei der höchsten Spannung (12000 Volt) einen Teil seiner *L*-Serie zu emittieren; $L\alpha$ ist in der Figur zu erkennen.

Bei Zinn tritt geringe Cu-Strahlung auf, die darauf zurückzuführen ist, daß das Zinn auf Kupferblech gegossen war und gestreute Kathodenstrahlen den freiliegenden Kupferrand trafen. Der Einfluß ist zu vernachlässigen.

Die starken *K*-Linien der reinen Metalle Fe bis Cu sind in den Figuren nur angedeutet. Relativ zu den übrigen Meßwerten sind sie so stark[1]), daß sie bei gleich großer Empfindlichkeit des Elektrometers überhaupt nur bei starker Filterung gemessen werden können.

Irgendwelche Gesetzmäßigkeiten sind aus diesen unkorrigierten Messungen nicht abzuleiten, besonders wegen der starken Entstellung durch die Absorption in der Antikathode selbst. Es wird sich zeigen, daß nur hierdurch die falsche Reihenfolge Sn(50) — Ag(47) hervorgerufen ist. Insbesondere ist in diesem Zusammenhang das Augenmerk zu richten auf die erhebliche Schwächung des Spektren von Fe bis Cu im Gebiet der Wellenlängen, die kleiner sind als die Wellenlänge λ_A der *K*-Absorptionskante.

---

1) Die Fe-$K\alpha$-Linie gibt bei 10470 Volt etwa 120 Skalenteile in 10 sec!

Man hat diese Erscheinung, die auch z. B. in Spektren von Webster[1]) auftritt, als Beeinflussung des kontinuierlichen Spektrums durch die Linienemission zu deuten versucht. Ledoux-Lebard und Dauvillier[2]) haben angenommen, daß überhaupt die ganze Energie der Spektrallinien diesem Teil des Kontinuums entzogen sei. Wagner[3]) hat demgegenüber darauf hingewiesen, daß der Effekt auch durch die selektiv verstärkte Absorption gerade dieser Wellenlängen in der Antikathode hervorgerufen sein kann, eine Ansicht, die im folgenden annähernd bestätigt wird.

Auch Webster[4]) kommt zu der gleichen Folgerung in einer leider äußerst kurzen Mitteilung über Isochromatenmessungen, die ebenfalls in diesem Wellenlängengebiet besondere Schwächung zeigen, wenn unter sehr streifendem Winkel gegen die Antikathode beobachtet wird. Webster beabsichtigt, die Stärke der Absorption zu messen, anscheinend nach der auch von mir angewandten Methode.

3. Die Messung der Absorption in der Antikathode.

a) *Allgemeines.* Der Betrag der Absorption in der Antikathode wird einerseits gegeben durch die *Rauhigkeiten der Oberfläche*, d. h. vorgelagerte Schichten, welche die Röntgenstrahlen zu durchsetzen haben, andererseits durch die *Eindringungstiefe der Kathodenstrahlen*, welche bewirkt, daß die Röntgenstrahlen im Mittel in gewisser Tiefe unter der Oberfläche entstehen. Diese ist bei den kleinen Strahlgeschwindigkeiten dieser Arbeit sehr gering und von der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6} cm. Demgegenüber sind die Unebenheiten selbst einer optisch gut polierten Fläche beträchtlich; die beobachtete Intensität kann also schon durch die zufällig erreichte Güte der Politur bedingt sein. Der Einfluß dieser Absorption nimmt mit steigender Ordnungszahl beträchtlich zu, denn der Absorptionskoeffizient für Röntgenstrahlen wächst, auf die Dichteneinheit bezogen, etwa mit Z^3; der für Kathoden-

1) D. L. Webster, Phys. Rev. 7. 599. 1916.

2) R. Ledoux-Lebard und A. Dauvillier, Compt. rend. 163. S. 754. 1916.

3) E. Wagner, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 16. S. 190. 1920.

4) D. L. Webster, Phys. Rev. 18. S. 321. 1921.

strahlen hingegen, welchem die Eindringungstiefe in die Antikathode umgekehrt proportional ist, ist angenähert der Dichte selbst proportional. Nehmen wir hinzu, daß, am gleichen Metall, mit zunehmender Kathodenstrahlgeschwindigkeit auch die Eindringungstiefe wächst, wodurch die Spannungsabhängigkeit der Röntgenstrahlintensität entstellt werden muß, so ergibt sich deutlich die Notwendigkeit einer möglichst exakten Messung der Absorptionsgröße.

Wenn die Beobachtungsrichtung für die Röntgenstrahlen stets rechtwinklig zum Kathodenstrahl bleibt, ändert sich die für die Absorption maßgebende Schichtdicke mit dem Winkel ψ, den die Antikathodenoberfläche mit der Röntgenstrahlrichtung einschließt. Zugleich muß sich also die außerhalb beobachtbare Röntgenintensität ändern und es entsteht die Frage, ob es möglich ist, aus dieser Änderung auf die wahre, absorptionsfreie Intensität zu schließen.

Die Wirkung aller hier maßgebenden Faktoren ist im einzelnen kaum zu übersehen, und es muß deshalb der Versuch gemacht werden, ob sehr vereinfachende Annahmen zu einer praktisch brauchbaren Darstellung führen.

So soll also angenommen werden, daß die Schicht, welche der Röntgenstrahl im Innern des Antikathodenmaterials zu durchlaufen hat, aus zwei Teilen zusammengesetzt sei, und zwar:

1. einer Schicht von der Dicke d, die dem mittleren Betrag der Rauhigkeiten entspricht und die nur für die austretenden Röntgenstrahlen, nicht für die eintretenden Kathodenstrahlen absorbierend wirkt; und aus

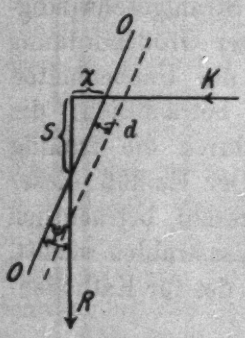


Fig. 7.

2. einer Strecke s gleich der Entfernung vom Entstehungsort des Röntgenstrahles bis zur Oberfläche; der Entstehungsort ist festgelegt durch die Weglänge x des Kathodenstrahles vom Eintritt in die Antikathodenoberfläche an.

Unter „Oberfläche" ist hierbei die nach Abzug der Rauhigkeitsschicht d verbleibende zu verstehen ($O\,O$ in Fig. 7).

Insgesamt hat also der Röntgenstrahl zu durchsetzen:

$$s + \frac{d}{\sin\psi} = \frac{1}{\sin\psi}(x \cdot \cos\psi + d).$$

Es soll dabei angenommen werden, daß jedes Schichtdifferential dx der Antikathode die gleiche spektrale Intensitätsverteilung liefert, daß also die angegebene Absorptionsdicke unabhängig von der Wellenlänge gilt. Eine Annahme, die zwar keineswegs notwendige Voraussetzung für die folgenden Betrachtungen ist, die aber mit großer Sicherheit folgt aus unserer Kenntnis (nach der Zusammenstellung Lenards a. a. O.) über die Absorption des Kathodenstrahlelektrons, wonach diese von nahe der vollen Anfangsgeschwindigkeit an in einem einzigen Zusammenstoß erfolgt.[1])

Bezeichnen wir jetzt mit J_0 die Röntgenstrahlintensität im Innern der Antikathode, mit α, μ die Absorptionskoeffizienten für Kathodenstrahlen (der gegebenen Geschwindigkeit) bzw. Röntgenstrahlen der Wellenlänge λ, so ergibt sich für die bei einem Antikathodenwinkel ψ austretende Röntgenstrahlenintensität der Wellenlänge λ:

$$J_\psi = J_0 \cdot \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cdot e^{-\frac{\mu}{\sin\psi}(x \cdot \cos\psi + d)} \cdot dx$$

$$= J_0 \cdot e^{-\frac{\mu d}{\sin\psi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \mu \operatorname{ctg}\psi}.$$

Bei der Messung kommen nur kleine Winkel ψ in Betracht, für die $\cos\psi = 1$ gesetzt werden kann. Die Formel lautet dann in logarithmischer Entwicklung:

$$(1) \quad \begin{cases} \lg J_0 - \lg J_\psi = \frac{\mu}{\sin\psi}\left\{\left(d + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{\alpha^2 \sin\psi} + \ldots\right\} \\ \qquad\qquad = \frac{\mu}{\sin\psi}\left(d + \frac{1}{\alpha}\right). \end{cases}$$

Die letzte Abkürzung ist gestattet, einmal wenn $\frac{\mu}{\sin\psi} \ll \alpha$, andererseits wenn $\frac{1}{\alpha} \ll d$ ist (wenn also wesentlich nur die Rauhigkeiten in Betracht kommen). Beides ist im allgemeinen erfüllt; die erste Bedingung sicher bei leichteren Elementen. Die Messungen zeigen nachträglich, daß überdies auch die

1) Das Gesetz für die Intensitätsverteilung der emittierten Strahlung muß also innerhalb des Atoms, welches stets die ganze Energie $e \cdot V_0$ erhält, und nicht in der Statistik der Zusammenstöße gesucht werden.

zweite Bedingung annähernd erfüllt ist. Es läßt sich aus ihnen in leicht ersichtlicher Weise der Wert $d + \frac{1}{\alpha}$ berechnen, und man findet, soweit α aus Kathodenstrahlmessungen bekannt ist, daß d im allgemeinen etwa 3—5mal so groß als $1/\alpha$ ist. Eine Ausnahme macht Pt, worauf später einzugehen ist.

Der Ausdruck (1) ist an der Erfahrung zu prüfen. Ergeben die Messungen, daß $\lg J_\psi$ linear gegen $1/\sin\psi$ verläuft, so sind damit zwar nicht die speziellen Annahmen — Teilung in d und $1/\alpha$ — bestätigt, aber es ist dann an Hand einer einfachen Formel die Möglichkeit zur Extrapolation auf J_0 gegeben. Eine willkürliche Auswahl aus den Messungsergebnissen ist nun in Fig. 8 dargestellt; die Linien sind dort übereinander gezeichnet, die Ordinaten geben also die absoluten Werte von $\lg J_\psi$ nicht richtig wieder. Die Tabelle am Rande gibt die Herkunft der Messung an; eine vollständige Zusammenstellung ist unten in den Tabb. 1—3 gegeben.

Sämtliche Messungen sind sehr exakt durch eine gerade Linie darzustellen; vorkommende kleine Abweichungen erweisen sich als unregelmäßig und deuten nicht systematisch auf eine Krümmung hin. Die Beobachtungen beschränken sich allerdings auf einen kleinen Winkelbereich von ψ, aber gerade auf denjenigen, innerhalb dessen die Absorption überhaupt wesentlich wirksam ist. Die Brauchbarkeit des Ausdrucks (1) auch über diesen Winkelbereich hinaus, ist durch dieses Ergebnis gut gesichert.[1])

Die Extrapolation auf J_0 ist in einfacher Weise graphisch auszuführen; der Schnittpunkt der rückwärts verlängerten Geraden mit der Linie $1/\sin\psi = 1$ gibt direkt $\lg J_0$.[2]) Der Faktor $\mu\left(d + \frac{1}{\alpha}\right)$ ist konstanter Proportionalitätsfaktor.

---

1) Die oben gemachten vereinfachenden Annahmen entsprechen natürlich nicht den wirklichen Verhältnissen. Stellt man sich die Antikathodenoberfläche etwa als ein feines Raster vor, so sieht man, daß eine reinliche Trennung in d und $1/\alpha$ nicht möglich ist. Vielmehr werden in tieferen Schichten entstehende Röntgenstrahlen auch größere „Rauhigkeiten" zu durchsetzen haben. Über die Brauchbarkeit einer einfachen Formeldarstellung konnte also nur die Beobachtung entscheiden.

2) Ich habe die Extrapolation nach $1/\sin\psi$ gewählt, weil sich die hiermit proportionale Rauhigkeitswirkung als vorherrschend ergab. Bei Vorherrschen von $1/\alpha$ wäre sie — wie die Ableitung der Formel erkennen

b) *Die Durchführung der Messung.* Die Antikathode kann im Glasschliff leicht gedreht werden; der Winkel der Drehung (ψ) wird mit objektiver Abbildung eines Nernststiftes auf einer Skala abgelesen. Der Fehler beträgt hierbei höchstens $\pm$ 3 Bogenminuten.

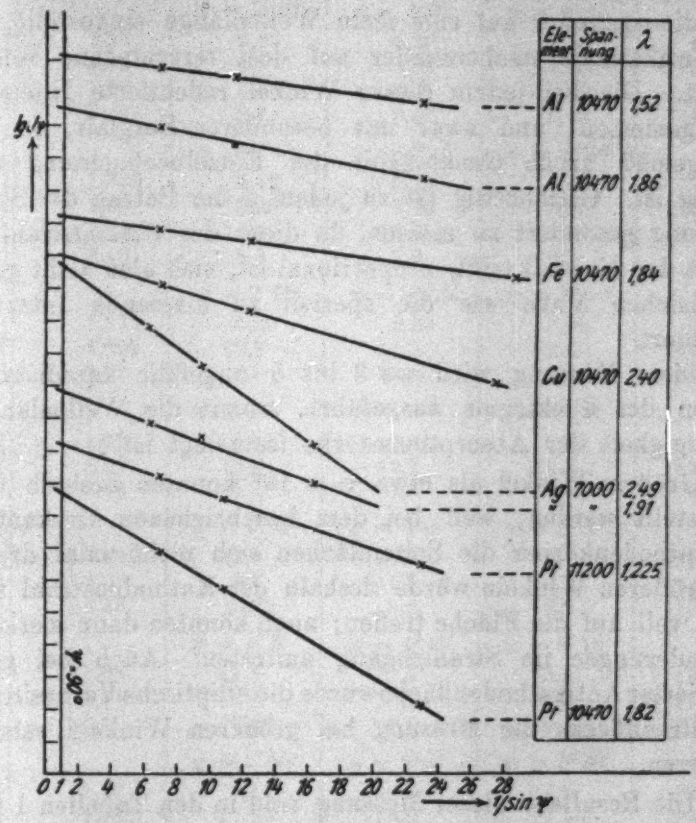


Fig. 8.

Die Einstellung der Antikathodenfläche auf den Winkel $\psi = 0$ erfolgt in folgender Weise:

Der Kristall wird entfernt, die Ionisationskammer in Fluchtstellung gesetzt. Die Ionisation wird gemessen bei schrittweise verkleinertem Winkel ψ. Die Intensität fällt erst langsam, dann schneller und fast linear mit ψ ab. Da die

läßt — nach ctg ψ auszuführen, d. h. lg J_0 als Schnitt mit der Ordinatenachse zu nehmen. Hierin liegt eine gewisse Willkür, aber man sieht, daß der Unterschied gering ist.

Primärstrahlung sehr stark ist, läßt sich diese Linie bis fast zu Null verfolgen. Von diesem Punkt aus wird dann der gewünschte Winkel ψ eingestellt.

Nachdem, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, das betreffende Spektrum gemessen ist, werden nun Kristall und Ionisationskammer auf eine feste Wellenlänge eingestellt und die Antikathode nacheinander auf drei verschiedene Winkel gesetzt. Die bei jedem dieser Winkel reflektierte Intensität wird gemessen, und zwar mit besonderer Sorgfalt, da hier naturgemäß große Genauigkeit der Einzelbeobachtung sehr wichtig ist. Gleichzeitig ist zu jedem ψ der Betrag der Streustrahlung gesondert zu messen, da diese der *Gesamt*strahlung, welche den Kristall trifft, proportional ist, sich also nicht genau im gleichen Maße wie die speziell zu messende Intensität J_ψ ändert.

Diese Messung wird an 3 bis 5 ungefähr äquidistanten Stellen des Spektrums ausgeführt, womit die Wellenlängenabhängigkeit der Absorptionsstärke festgelegt ist.[1])

Größere Winkel als etwa $\psi = 10^0$ konnten deshalb nicht eingestellt werden, weil bei dem beschriebenen vierkantigen Antikathodenkörper die Seitenflächen sich nicht axial drehen. Bei größeren Winkeln würde deshalb der Kathodenstrahl nicht mehr voll auf die Fläche treffen; auch könnten dann merkliche Veränderungen im Strahlengang auftreten. Auch bei genau zentrierter Antikathodenfläche würde die elliptische Verbreiterung des Brennflecks die Messung bei größeren Winkeln sehr erschweren.

Die Resultate dieser Messung sind in den Tabellen 1 bis 3 zusammengestellt. Die Tabellen enthalten den größten Teil des vorhandenen Beobachtungsmaterials; nur einige wieder-

---

1) Sie kann also ganz beliebig sein; aber es ergibt sich, daß die Absorption, wie gewöhnlich, etwa mit $\lambda^{2,8}$ wächst. Dies bedeutet, daß, in Bestätigung der Annahme S. 569, die Absorptionsdicke $d + \frac{1}{a}$ unabhängig von der Wellenlänge ist für gleiches Metall und gleiche Spannung (sie nimmt zu mit wachsender Spannung). Wegen des überwiegenden Einflusses von d ist aber diese Folgerung nicht so sicher, daß sie als bündiger Beweis betrachtet werden könnte; auf zahlenmäßige Belege kann deshalb hier verzichtet werden.

Tabelle 1.

Absorption in der Antikathode; Spannung konstant = 10470 Volt.

Element	Wellenlänge Å	J_ψ in Skalenteilen pro 20 sec			J_0 extrapoliert
		$\psi = 2°30'$	$\psi = 5°0'$	$\psi = 8°15'$	
Al	1,52	3,86	4,20	4,35	4,55
	1,61	4,15	4,65	4,85	5,10
	1,86	4,65	5,25	5,60	5,90
	2,355	2,72	3,66	4,00	4,67
		$\psi = 2°0'$	$\psi = 4°45'$	$\psi = 8°20'$	
Fe	1,395	4,45	5,75	6,45	7,2
	1,62	5,20	7,70	9,05	10,05
	1,84	10,4	11,8	12,35	12,85
	2,40	5,7	7,6	8,5	9,0
		$\psi = 2°25'$	$\psi = 4°55'$	$\psi = 8°10'$	
Co	1,275	3,80	3,90	3,90	4,4
	1,695	10,9	11,5	12,3	12,55
	2,12	9,0	10,85	11,4	12,7
		$\psi = 2°5'$	$\psi = 5°5'$	$\psi = 8°30'$	
Ni	1,41	4,65	6,20	6,90	7,7
	1,86	10,6	12,7	13,1	13,8
	2,44	5,75	7,6	8,4	9,2
		$\psi = 2°40'$	$\psi = 5°0'$	$\psi = 8°0'$	
Cu *a*	1,695	10,3	11,7	12,7	13,8
	2,03	9,8	11,5	12,6	14,0
	2,36	6,95	8,6	9,3	10,6
		$\psi = 2°5'$	$\psi = 4°40'$	$\psi = 8°10'$	
Cu *b*	1,66	11,8	12,5	13,0	13,35
	1,84	—	12,9	13,6	14,4
	2,40	6,35	8,2	9,0	10,1
		$\psi = 2°50'$	$\psi = 5°0'$	$\psi = 8°20'$	
Sn	1,43	9,15	12,6	14,6	17,7
	1,685	11,15	15,9	19,45	24,5
	2,025	7,6	12,8	17,15	24,2
	2,27	4,65	8,9	11,7	20,0

holende und bestätigende Messungen sind ausgelassen, um die Tabellen nicht übermäßig anschwellen zu lassen. Für die Berechnung wurden natürlich auch diese herangezogen.

Die angegebenen Zahlen sind Elektrometerablesungen, korrigiert nur auf gleiche Empfindlichkeit des Elektrometers und auf konstante Stromstärke, sowie umgerechnet auf gleiche Beobachtungs(= Aufladungs)zeit; bei den schwachen Intensitäten wurden bei der Messung längere Zeiten, als die hier angegebenen

Tabelle 2.

Absorption in der Antikathode; Element: Silber.

Spannung (Volt)	Wellenlänge (Å)	J_ψ in Skalenteilen pro 15 sec $\psi = 3°30'$	$\psi = 6°0'$	$\psi = 9°0'$	J_0 extrapoliert
11 980	1,24	10,5	11,8	12,2	13,2
	1,31	12,25	14,0	14,8	16,4
	1,50	14,1	17,0	18,5	20,5
	1,65	14,2	17,4	19,4	22,6
	1,99	9,9	13,9	16,1	21,3
10 470	1,42	9,2	10,3	10,85	11,9
	1,67	11,5	13,5	14,5	16,6
	1,745	10,85	13,7	14,7	17,3
	2,00	9,05	11,9	13,6	16,8
	2,165	6,7	9,55	11,5	15,4
8 750	1,575	5,75	6,15	6,5	7,0
	1,77	7,15	8,55	9,0	10,3
	2,00	7,25	8,7	9,75	11,5
	2,42	3,70	5,15	6,15	7,95
7 000	1,91	2,80	3,30	3,46	3,87
	2,16	3,45	4,25	4,60	5,35
	2,49	2,80	3,03	3,46	4,25

verwandt. Von den Beobachtungszahlen ist ferner der Betrag der Streustrahlung bereits in Abzug gebracht.

Einige dieser Versuchsreihen sind in der bereits besprochenen Fig. 8 graphisch dargestellt. Man entnimmt daraus die Extrapolationswerte J_0; für die anderen Reihen sind sie in gleicher Weise ermittelt und in der letzten Spalte der Tabellen angegeben.

Für Cu sind dort zwei Meßreihen verzeichnet, die mit verschieden gut polierter Oberfläche desselben Kupferbleches erhalten wurden. Es ergeben sich deutliche Differenzen bei kleinen Winkeln. Die Extrapolation führt auf die gleichen Werte.

c) *Die korrigierten Spektren* sind jetzt in einfacher Weise zu erhalten; sie sind in den Figg. 9—12 dargestellt.[1]) Die Umrechnung erfolgte ausgehend von der bei etwa $\psi = 5°$ (die jeweiligen genauen Werte sind in den Figg. 3—6 angegeben) gemessenen Intensitätsverteilung, und zwar zweckmäßig nicht von den einzelnen Beobachtungs*punkten*, sondern von der durch diese festgelegten *Kurve* aus. Der Betrag für solche Wellenlängen, bei denen sie nicht direkt gemessen wurde, kann leicht graphisch oder rechnerisch ermittelt werden. Die in den

1) In Figg. 10, 11 und 12 durch die ausgezogenen Kurven.

Spektren auftretenden Spektrallinien sind in der jetzigen Darstellung fortgelassen und die Kurven durch die betreffenden Bereiche möglichst glatt hindurchgelegt.

Tabelle 3.

Absorption in der Antikathode; Element: Platin.

Spannung (Volt)	Wellenlänge (Å)	J_ψ in Skalenteilen pro 10 sec $\psi = 2°30'$	$\psi = 5°15'$	$\psi = 8°15'$	J_0 extrapoliert
11 980	1,13	7,2	8,35	8,7	9,35
	1,48	13,15	17,6	19,7	22,8
	2,06	7,27	12,95	15,8	21,0
11 200	1,225	6,65	8,4	9,1	10,25
	1,735	10,9	16,1	18,6	22,6
	2,24	5,6	9,5	11,7	15,7
10 470	1,395	8,05	10,65	11,3	12,7
	1,82	9,0	13,7	15,6	19,3
	2,235	5,25	8,8	10,6	14,0
9 600	1,485	7,3	8,95	9,85	11,0
	1,905	7,6	11,3	13,15	15,9
	2,32	4,1	6,75	8,5	11,0
8 750	1,57	5,0	6,15	6,6	7,3
	1,905	6,3	9,0	10,05	12,0
	2,40	3,37	5,15	6,5	8,35
7 850	1,735	3,33	4,85	5,40	6,5
	2,07	4,10	6,25	7,18	8,85
	2,56	1,96	3,32	4,10	5,05
7 000	1,99	3,20	4,30	4,60	5,30
	2,235	3,02	4,36	4,95	5,95
	2,64	1,42	2,45	2,82	3,65

In Fig. 9 ist, wie dort ersichtlich, der Ordinatenmaßstab für die Spektren von Ag, Sn und Pt gegenüber Fig. 3 weiter reduziert. Hier und im folgenden habe ich die anfängliche Bezeichnung der Maßstabsverhältnisse, als Elektrometerausschlag in t Sekunden, beibehalten; zusammengehörende Figuren sind damit direkt vergleichbar.

Eine Besprechung der Figg. 10 und 11 (Spannungsabhängigkeit) ist an dieser Stelle noch nicht möglich; die Spektren müssen erst bzgl. weiterer Absorptionen korrigiert werden (§ 4). Allgemein gibt aber schon ein Vergleich mit den Kurven der Figg. 5 und 6 ein anschauliches Bild von der

erheblichen Stärke der Absorption in der Antikathode. Besonders beachtenswert ist auch, daß sich jetzt die Reihenfolge Ag-Sn gegenüber Fig. 3 umkehrt. Die Tab. 1 ließ bereits erkennen, daß bei Zinn die Absorption besonders groß ist; dies

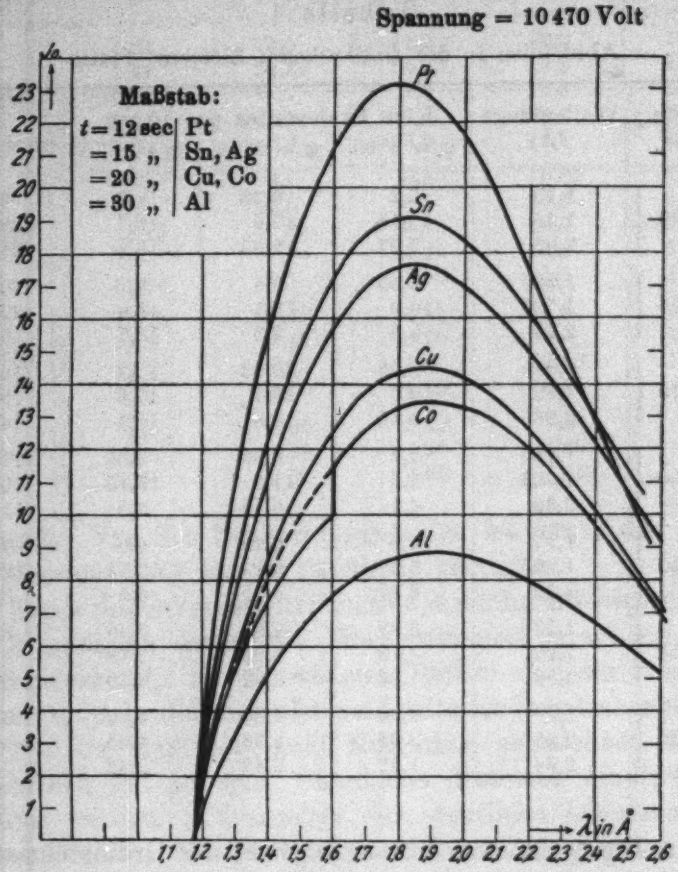


Fig. 9.

liegt daran, daß das weiche Material nicht zu gut polieren war. Auch hinsichtlich der starken Zunahme der Absorption mit Z sei auf obige Tabellen hingewiesen.

Die Abhängigkeit des Spektrums vom Antikathodenmaterial wird bereits durch Fig. 9 und Fig. 12 in vergleichbarer Weise wiedergegeben. Es zeigt sich dort, daß die *Form* des Spektrums nur wenig vom Material abhängt[1]; das Intensitätsmaxi-

1) Nach Fig. 3 allein wäre dies durchaus nicht der Fall!

mum ist bei schwereren Elementen etwas nach kürzeren Wellen hin verschoben.

Der Betrag der Maximalintensität ist in der folgenden Tab. 4 angegeben; außerdem die Größen der von den Kurven

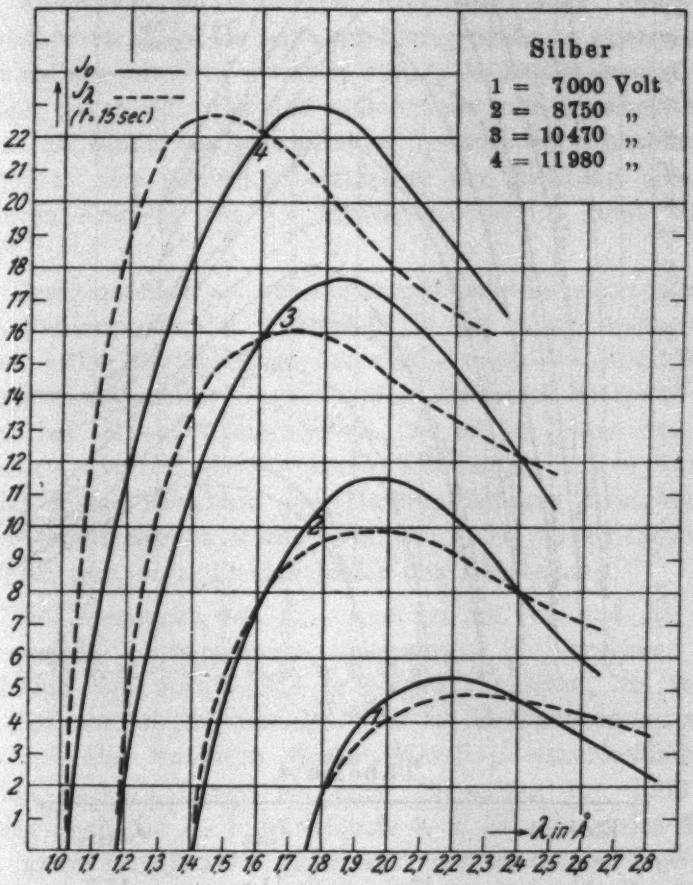


Fig. 10.

eingeschlossenen Flächen $= \int J_\lambda \, d\lambda$; die Integration ist von λ_0 nur bis $\lambda = 2{,}0$ Å erstreckt, da der weitere Verlauf nach langen Wellen nicht überall gleichmäßig gut gesichert ist. Die Einheiten sind in der Tabelle so gewählt, daß die Intensität von Cu = 29 gesetzt wurde.

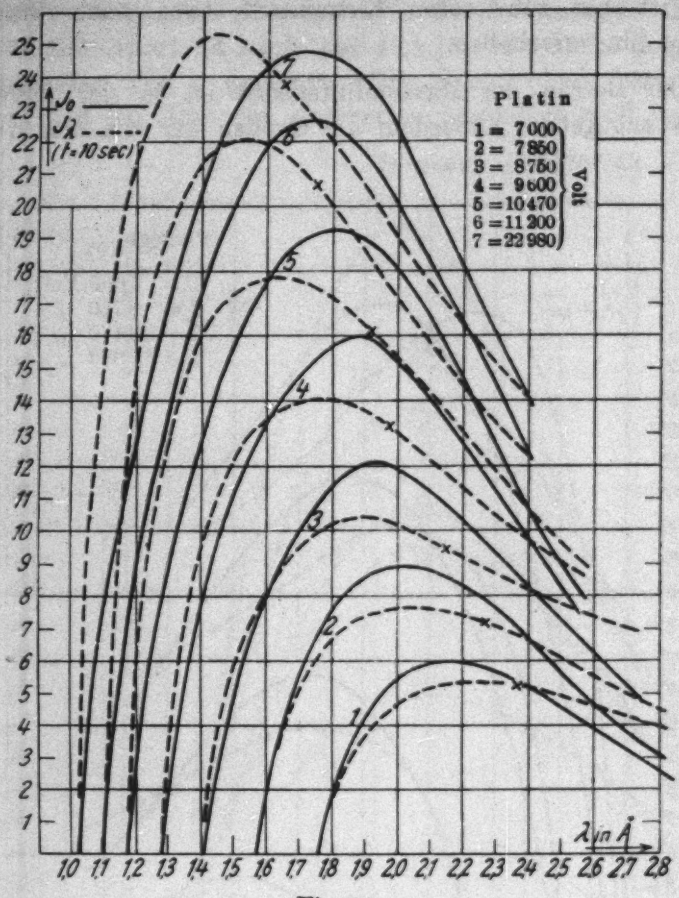


Fig. 11.

Tabelle 4.

Element	Z	J_{max}	$J_{Fläche}$
Al	13	11,8	11,5
Fe	26	25,9	—
Co	27	27,1	—
Ni	28	28,0	—
Cu	29	29,0	29,0
Ag	47	47,5	48,2
Sn	50	51,2	52,8
Pt	78	77,5	80,5

Es ergibt sich also, sowohl für das Intensitätsmaximum, wie für die Gesamtintensität, gut angenäherte Proportionalität

mit der Ordnungszahl Z. Den Grund für das etwas schnellere Anwachsen der Intensität und für die Verschiebung der Wellenlänge λ_m des Intensitätsmaximums werden wir später erkennen.

Ulrey findet hingegen in seiner oben erwähnten Arbeit, daß einerseits die schweren Elemente nicht unerheblich schwächer strahlen als nach der hier gefundenen strengen Proportionalität mit Z zu erwarten wäre (z. B. bei Pt etwa 20 Proz. weniger gegen Ni), und daß andererseits eine schwache Periodizität im Sinne des periodischen Systems der Elemente vorhanden zu sein scheint. Letztere in der Richtung eines besonderen Anstiegs von Cr zu Ni, Mo zu Pd, und von W zu Pt.

Demgegenüber sei auf die möglicherweise nicht unerhebliche Fehlerquelle der Absorption in der Antikathode hingewiesen. Ihr Betrag hängt davon ab, unter welchem Winkel ψ beobachtet wurde; Angaben über die Größe dieses Winkels fehlen bei Ulrey, ebenso solche, ob er für jedes der sechs Metalle genau der gleiche war.[1]) Ich konnte zeigen, wie erheblich meine Resultate ohne Berücksichtigung dieser Absorption entstellt worden wären; wie weit es bei Ulrey tatsächlich der Fall war, entzieht sich leider der Beurteilung.

Die Messungen von J_{max} sind bei Fe, Co und Ni durch die starken Spektrallinien erschwert. Sie ergeben einen Spielraum von etwa $\pm 0{,}4$ in obigen Einheiten; es ist also zunächst nur die Reihenfolge und die Größenordnung zu ermitteln. Die Spektren dieser Metalle, einschließlich Cu, wurden deshalb ferner bei einer Spannung von 7000 Volt, bei der auch die — hier weichste — K-Strahlung des Eisens noch nicht erregt wird, gemessen. Wegen der sehr geringen Intensität war aber eine größere Genauigkeit des Vergleiches nicht zu erzielen. Die Beobachtungswerte schwanken auch hier in dem angegebenen Spielraum; paarweise zusammengehörende Messungen ergaben z. B. folgende Werte für die Maximalintensität J_{max}:

---

1) Zufällig periodische Verschiedenheiten in diesem Winkel könnten eine Periodizität der beobachteten Intensität vortäuschen!

Metall	Fe	Ni	Co	Cu	Fe	Cu
J_{max} gemessen in Skalenteilen pro 1 Min.	9,0	9,7	10,9	11,6	9,1	10,2
Verhältnis	26,0 : 28,1		27,0 : 28,8		26,0 : 29,2	

Andere Messungen ergaben ähnliche Werte, mit unregelmäßigen Abweichungen von der strengen Proportionalität. Die Mittelwerte aller Messungen (bei 7000 und 10470 Volt) sind oben in Tabelle 4 notiert.

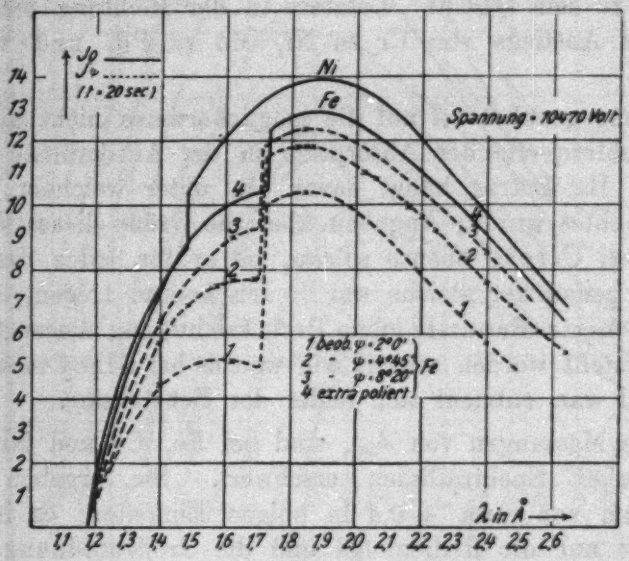


Fig. 12.

Die Kurven von Fe, Co und Ni sind im langwelligen Gebiet der Cu-Kurve vollkommen ähnlich; das Flächenintegral kann bei ihnen aber nicht ermittelt werden, weil im Gebiete $\lambda < \lambda_A$ sich auch jetzt noch der Einfluß der selektiven Absorption geltend macht. In Fig. 12 sind die Messungen am Eisen besonders eingetragen[1]) (nach Tab. 1); man bemerkt dort, daß durch Änderung des Winkels ψ von 2° 0′ auf 8° 20′ in diesem Wellenlängengebiet die Intensität fast auf den doppelten Betrag steigt, für eine benachbarte Wellenlänge $> \lambda_A$ dagegen

1) Dazu wieder, wie in Fig. 4, die Ni-Kurve.

um kaum 20 Proz.! Diese starke Änderung macht es sehr wahrscheinlich, daß der ganze Intensitätsabfall auf Rechnung der Absorption zu setzen ist, einschließlich des relativ sehr kleinen Restbetrages, der auch nach Ausführung der Korrektur noch übrig bleibt. Die unmittelbar benachbarte starke K-β-Linie erschwert nämlich hier die Messung erheblich, zumal die der sehr schwachen Intensität bei $\psi = 2^0$. Durch den Einfluß der Linie wird diese leicht zu groß gemessen, so daß die Extrapolation auf ein zu kleines J_0 führt. Man bemerkt auch, daß die Werte $\lg J_\psi$ (Tab. 1) für diese Wellenlängen sich nicht sonderlich gut einer geraden Linie einfügen; aber aus dem erwähnten Grunde ist es nicht möglich, genauere Zahlen zu erhalten.

Eine völlige, exakte Klärung dieser Frage ist also noch nicht möglich. Eine eingehende Würdigung der Resultate und aller Nebenumstände scheint mir aber die Schlußfolgerung zu erlauben, daß die Linienemission an der fraglichen Intensitätsverminderung *nicht* beteiligt ist.

Die genaue Untersuchung dieses Gebietes ist auf Eisen beschränkt; bei den übrigen drei Metallen sind andere oder bessere Resultate nicht zu erwarten. Die hierzu bei Co und Ni angestellten Messungen haben vorwiegend orientierenden Charakter, die Kurven sind nach Analogie der Eisenkurve ergänzt.

In Figg. 10 und 11 sind, um den direkten Vergleich zu ermöglichen, die Kurven der „wahren" Intensitätsverteilung gestrichelt eingezeichnet, deren Ermittelung im folgenden besprochen werden soll.

4. Die Ermittelung der wahren Intensitätsverteilung.

a) Vier Dinge entstellen noch die bisher besprochenen Spektren:

1. Die Absorption im Aluminiumfenster des Rohres.
2. Die Wellenlängenabhängigkeit der Reflexionskraft des Kristalles.
3. Die Absorption in der vom Strahl durchsetzten freien Luftstrecke.
4. Die endliche Länge der Ionisationskammer.

Als fünftes wäre hier zu nennen die Wellenlängenabhängigkeit des Verhältnisses zwischen Ionisation und wahrer Energie, welche bisher unbekannt ist.[1]) Holthusen[2]) hat versucht, sie indirekt aus bekannten Werten über die Ionisationswirkung von Kathodenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit zu bestimmen, indem er voraussetzt, daß die Ionisationswirkung der Röntgenstrahlen nur durch die sekundär ausgelösten Kathodenstrahlen erfolge; eine Annahme, die er später gemeinsam mit Becker[3]) bestätigt hat. Diese Ableitung ist ihrer Natur nach nicht genügend beweiskräftig, um als Unterlage zur Berechnung der wahren spektralen Energieverteilung zu dienen. Wir müssen uns darauf beschränken, allgemein die wahre Energie $E = f(\nu) \cdot J$ zu setzen und hervorzuheben, daß $f(\nu)$ eine universelle Funktion ist, die von keinerlei speziellen Versuchsbedingungen mehr abhängt.

Wir wollen im weiteren von dieser Funktion $f(\nu)$ absehen und verstehen unter der „wahren" Intensität die durch Ionisation gemessene. Wir bezeichnen sie mit J_λ bzw. J_ν, als spezifische Intensität in Wellenlängen- bzw. in Frequenzeinheiten.

---

1) (Zusatz Juli 1922.) Kürzlich hat B. Boos (Zeitschr. f. Phys. 10. S. 1. 1922) Messungen dieses Verhältnisses mitgeteilt; er findet, durch sukzessive Filterung der unzerlegten Gesamtstrahlung, daß relativ zur bolometrisch gemessenen Energie die langwellige Strahlung wesentlich stärker ionisiere als kurzwellige (was dem Sinne nach entgegengesetzt ist der Abhängigkeit, die nach dem oben folgenden zu erwarten wäre). Die Ionisation, in luftgefüllter Kammer, wird proportional der in dieser absorbierten Strahlintensität gesetzt, wobei Boos ausdrücklich mit der *Gesamt*schwächung rechnet. Dies ist nun insofern nicht richtig, als die gestreuten Röntgenstrahlen ihrerseits nur zu einem sehr geringen Prozentsatz absorbiert werden, die Ionisation aber nur dem wirklich absorbierten Bruchteil proportional gesetzt werden darf. Soweit die Verhältnisse zu übersehen sind, bewirkt eine diesbezügliche Korrektur eine sehr beträchtliche Verminderung der Wellenlängenabhängigkeit, denn bei den kurzen Wellen, mit denen Boos arbeitet, ist die Streuung etwa von gleicher Größenordnung wie die reine Absorption.

Zur exakten Klärung dieser schwierigen Frage erscheint also die Arbeit vorerst nicht geeignet.

2) H. Holthusen, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. 26. S. 211. 1919.

3) A. Becker u. H. Holthusen, Ann. d. Phys. 64. S. 625, 1920. Man vgl. dazu auch W. H. Bragg u. H. L. Porter, Proc. Roy. Soc. A 85. S. 349. 1911.

Die genannten anderen vier entstellenden Einflüsse können genau ermittelt werden.

1. Nach Abschluß der Versuche wurde das Aluminiumfenster vom Rohr entfernt und seine Absorption in Abhängigkeit von der Wellenlänge direkt gemessen an der gleichen Stelle, die vorher von den Strahlen durchsetzt wurde. Eine Dickenmessung ist damit überflüssig. Die erhaltenen Werte sind darstellbar durch: $\mu_{AL} \cdot d_{AL} = 0{,}0423 \cdot \lambda^{2.87}$. Die Aluminiumfolie, welche die Ionisationskammer an der Eintrittsseite verschließt, ist etwa 0,0005 mm dick; dementsprechend habe ich den Betrag der Aluminiumabsorption erhöht und der Rechnung den zusammenfassenden Wert $\mu_{AL} \cdot d_{AL} = 0{,}0440 \cdot \lambda^{2.87}$ zugrunde gelegt.

2. Der Reflexionskoeffizient von Kalkspat $= R$ ist von E. Wagner und Verfasser (a. a. O.) gemessen worden, und zwar am gleichen Kristallexemplar und im gleichen Wellenlängenbereich. Es hat sich ergeben, daß R für die 1. Ordnung der Reflexion an der (100)-Ebene sehr gut darstellbar ist durch die Formel:

$$R = \text{const} \cdot \frac{\lambda(1 + \cos^2 2\varphi)}{\sin 2\varphi} .$$

Die Formel gilt für monochromatische Strahlung; bei Reflexion kontinuierlicher Strahlung tritt, wie in der genannten Arbeit näher begründet wird, ein Faktor $\cos \varphi$ hinzu, welcher der Änderung der Dispersion mit dem Glanzwinkel φ Rechnung trägt.[1])

R hat bei Kalkspat nur eine sehr geringe Wellenlängenabhängigkeit. Die angegebene Formel kann deshalb auch unbedenklich auf Wellenlängen angewandt werden, die etwas außerhalb desjenigen Bereiches liegen, in dem der Reflexionskoeffizient gemessen wurde. Nach der kurzwelligen Seite hin ergab sich zudem a. a. O. guter Anschluß an Messungen von Davis und Stempel.

---

1) Streng genommen müßte der Faktor $\cos \varphi$ schon eingeführt werden, wenn man das nach Winkeln gemessene Spektrum mit Wellenlängen als Abszissen zeichnet. Es erschien aber zweckmäßig, erst hier zusammenhängend die Reflexionseinflüsse zu berücksichtigen und bisher nur die Meßwerte zu geben.

3. u. 4. Diese beiden Punkte können gemeinsam betrachtet werden, da hierfür nur die Kenntnis des Absorptionskoeffizienten von Luft erforderlich ist. In der verhältnismäßig kurzen Ionisationskammer werden die Röntgenstrahlen nicht vollständig absorbiert; die gemessene Ionisation ist jedenfalls proportional der auf ihre Länge absorbierten Strahlung. Der Intensitätsverlust durch Zerstreuung ist so gering, daß wir ihn gegenüber der wahren Absorption vernachlässigen können. Letztere beträgt für eine mittlere Wellenlänge etwa 30 Proz. der einfallenden Strahlung, der Verlust durch Zerstreuung gegen 0,4 Proz., unabhängig von der Wellenlänge. Sekundärstrahlung von den Kammerwänden ist in meßbarem Betrage nicht vorhanden.

Den Absorptionskoeffizienten von Luft habe ich Messungen von Barkla und Collier[1]) entnommen. Dieselben sind nicht mit spektral zerlegter Strahlung, sondern unter Benutzung der nahe homogenen Sekundär-(K)-Strahlung der Elemente Fe bis Ag ausgeführt. Owen[2]) hat ungefähr gleichzeitig ähnliche Messungen angestellt.

Siegbahn[3]) hat hieraus unter Benutzung der ersten, noch ungenauen Wellenlängenmessungen von Moseley das bekannte Gesetz $\mu = A \cdot \lambda^{2,8}$ abgeleitet. Ich habe nach den heutigen, besser bekannten Wellenlängenwerten A neu berechnet, unter der Annahme, daß das Intensitätsverhältnis der K-Linien etwa durch $(\alpha + \alpha') : (\beta + \gamma) = 5 : 1$ gegeben ist. Man erhält so für den Absorptionskoeffizienten von Luft den Wert: $\frac{\mu}{\varrho} = 2{,}7 \cdot \lambda^{2,8}$ (ϱ = Dichte der Luft).

In der Hauptsache habe ich die von Barkla und Collier angegeben, offenbar recht zuverlässigen Werte benutzt und die von Owen, soweit es nötig war, zur Verbesserung der logarithmischen Geraden herangezogen.

Setzen wir für eine Temperatur von 18 C und einen mittleren Barometerstand von 720 mm (München) die Dichte der Luft $\varrho = 0{,}00115$, so folgt $\mu_L = 0{,}0031 \cdot \lambda^{2,8}$.

Kleine Änderungen von ϱ — ebenso eine Unsicherheit im

1) C. G. Barka u. V. Collier, Phil. Mag. 23. S. 987. 1912.
2) E. A. Owen, Proc. Roy. Soc. A 86. S. 426. 1912.
3) M. Siegbahn, Phys. Zeitschr. 15. S. 753. 1914.

Zahlenwert von μ/ϱ — sind von geringem Einfluß. Die äußere Luftstrecke ist bei der benutzten Apparatur ungefähr gleich der Länge der Ionisationskammer, wodurch erhebliche Schwankungen in μ_L weitgehend kompensiert werden. Bei kurzen Wellen ist der Ausgleich nicht so gut, aber es läßt sich zeigen, daß die normalerweise vorkommenden Druck- und Temperaturschwankungen keinen merklichen Einfluß auf die gemessene Form des Spektrums haben. Sie brauchten deshalb nicht berücksichtigt zu werden.

b) *Die Ausführung dieser Korrektur* führt auf eine Intensitätsverteilung, die in Figg. 10 und 11 (gestrichelte Kurven) für die Ag- und Pt-Spektren dargestellt ist.[1]) Es mag daran auffallen, daß, trotz Absorptionskorrektur, der Schwerpunkt der Spektren nach dem *kurz*welligen Ende verschoben ist. Dies beruht darauf, daß von den kurzen Wellen ein geringerer Bruchteil in der Ionisationskammer absorbiert wird als von den langen.

Die Spektren von Ag bzw. Pt sind jetzt untereinander annähernd ähnlich; jedoch bemerkt man, daß mit wachsendem Potential die Wellenlänge der Maximalintensität λ_m relativ näher an die Grenzwellenlänge λ_0 heranrückt. Die Verschiebung ist gering; das Gesetz ist unten (§ 5b) angegeben.

5. Das Gesetz der spektralen Intensitätsverteilung.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Spektren umzuzeichnen mit der Frequenz $\nu = c/\lambda$ als Abszisse. Als Ordinate ist dann die spezifische Intensität in ν, J_ν, aufzutragen; sie ist, da

$$J_\nu \, d\nu = J_\lambda \, d\lambda$$

und

$$d\nu = \frac{1}{c} \cdot \nu^2 \, d\lambda ,$$

gegeben als

$$J_\nu = \frac{c}{\nu^2} J_\lambda .$$

Die neue Darstellung ergibt ein überraschend einfaches Bild: *die Spektren bestehen im größten Teil ihres Verlaufes aus einer geraden Linie;* Figg. 13, 15 und 16.

Die Intensitätsverteilung, wie sie sich durch die schrittweise Umrechnung der Beobachtungskurven schließlich ergibt,

1) Für die Spektren der übrigen Metalle würde die entsprechende Darstellung hier nichts neues ergeben; vgl. dagegen folgenden Abschnitt.

ist in diesen Figuren durch die äquidistant eingetragenen Punkte dargestellt. Man erkennt so, daß sie im allgemeinen ausgezeichnet mit der hindurchgelegten geraden Linie zusammenfällt.

Abszisseneinheit ist 10^{18} sec^{-1}; bzgl. der Ordinatenmaßstäbe vgl. § 3, c; (eine allgemeine Konstante ist bei der letzten Umrechnung von passender Größe gewählt).

a) *Das Spektrum in Abhängigkeit vom Antikathodenmaterial bei konstantem Potential.*

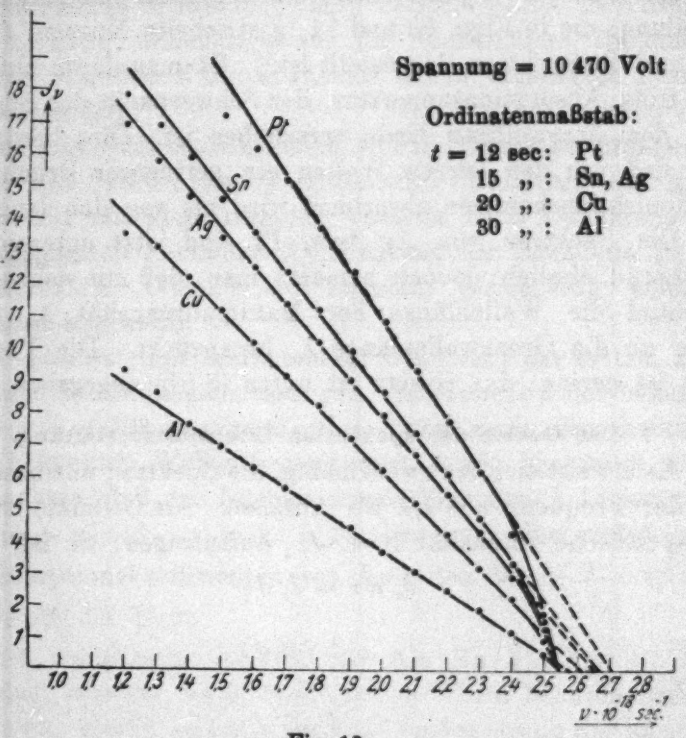


Fig. 18.

Der geradlinige Verlauf der Spektren erscheint gut gesichert, Bei Fe, Co und Ni ist er nicht genau festzustellen, weil der wichtigste Teil im Gebiet $\nu > \nu_A$ liegt. Die Spektren dieser drei Metalle sind deshalb in Fig. 18 nicht eingetragen; es wurde oben schon festgestellt, daß sie im nicht gefälschten Teile dem Cu-Spektrum ähnlich sind, so daß sie sich hier dem Gesamtbilde richtig einfügen würden.

An den geraden Linien fällt besonders auf, daß sie, rückwärts verlängert, sämtlich die Abszissenachse nicht im Punkt der quantenmäßigen Grenzfrequenz ν_0, sondern bei einem $\nu' > \nu_0$ schneiden. Ein steilerer Abfall im letzten Kurventeil sorgt dafür, daß das richtige ν_0 erreicht wird.

Diese Erscheinung erinnert unmittelbar an den „Knick" den Wagner[1]) bei Isochromaten gefunden hat. Diese zeigten bei einer etwa 400 Volt über der Anregungsspannung der eingestellten Wellenlänge liegenden Spannung eine deutliche Knickung im Sinne eines verminderten Gradienten. Ob es sich bei den hier vorliegenden Spektren ebenfalls um einen plötzlichen Knick oder um eine langsame Krümmung handelt, ist nicht genau zu entscheiden. Im Gegensatz zur Isochromatenmessung gibt die hier angewandte Methode — „Isothermen" — den Anfang des Spektrums mit geringerer Schärfe der Einzelheiten. Erst die ν-Darstellung ließ die Existenz einer Diskontinuität deutlich hervortreten; im Anschluß an Wagner wollen wir sie weiter als „Knick" bezeichnen.

Der Punkt des Spektrums, von dem ab es linear verläuft, ist nicht scharf zu bestimmen; wesentlich genauer ist der Schnittpunkt ν' gegeben. Als Maß für die Größe des auftretenden Knickes nehmen wir demnach zweckmäßig die Strecke $\nu' - \nu_0$.

Aus Fig. 13 ist zu entnehmen, daß $\nu' - \nu_0$ mit Z wächst. Dies Ergebnis schließt die Möglichkeit aus, daß apparatelle Umstände für das Auftreten des Knickes verantwortlich zu machen seien. Die Abhängigkeit vom Antikathodenmaterial besagt, daß er ursächlich mit den darin vorgehenden Prozessen zusammenhängen muß.

Analog einer von Wagner (a. a. O.) vorgeschlagenen Zusammensetzung der geknickten Isochromate aus zwei Teilen wollen wir das Spektrum in zwei Kurvenzweige zerlegen, wie dies in Fig. 14 a skizziert ist. Wir nehmen also an:

ein Spektrum A, welches linear mit $\nu_0 - \nu$ ansteigt, und

ein Spektrum B, welches über alle ν konstant ist.

Der geneigte oder flach gekrümmte Abfall gegen ν_0 ergibt

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. 57. S. 401. 1918. Auch die Größe stimmt überein, wie man durch einfache Umrechnung in Volt aus Fig. 13 bestätigt.

sich aus der schematischen Figur, wenn man berücksichtigt, daß die Kathodenstrahlelektronen zum Teil im Augenblick ihrer Absorption eine etwas verringerte Geschwindigkeit haben. Dieser Fall ist in Fig. 14 b skizziert; die Knickgröße $\nu' - \nu_0$ erscheint durch die Geschwindigkeitsverluste verkleinert.[1])

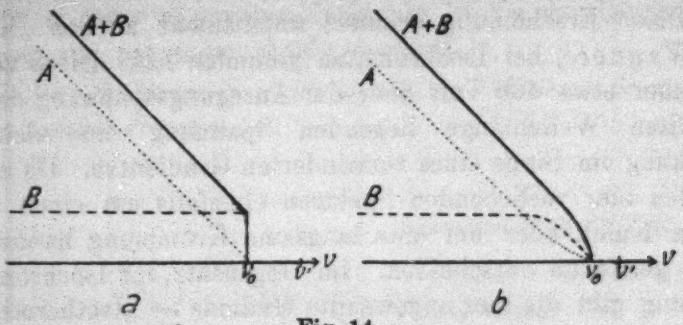


Fig. 14.

Ob der Teilung in die Spektren A und B, die wir hier vorgenommen haben, tätsächliche Verhältnisse entsprechen, d. h. ob das Atom über zwei verschiedene und verschiedenen Gesetzen gehorchende Emissionsmöglichkeiten verfügt, kann nicht entschieden werden. Die Zweiteilung sei deshalb hier nur als formale Vereinfachung der Darstellung betrachtet.

Die Hauptröntgenenergie liegt offenbar im allgemeinen in dem Spektrum A. Für dieses gilt:

Es wächst sowohl J_ν für jeden Wert von ν, als auch die Gesamtintensität

$$J = \int_0^{\nu_0} J_\nu \, d\nu \; ^2)$$

proportional mit der Ordnungszahl Z des emittierenden Atoms.

1) Es sei noch bemerkt, daß der Geschwindigkeitsverlust *allein* (etwa mit der Annahme, daß streng homogene Kathodenstrahlen nur das Spektrum A erzeugen würden) den Knick nicht verursachen kann; aus Fig. 14 b geht dies ohne weiteres hervor. Ebensowenig kann eine Änderung der mittleren Geschwindigkeitsverluste mit Z die Zunahme von $\nu' - \nu_0$ bei höheren Elementen erklären. Nach Fig. 14 nimmt die beobachtbare Größe von $\nu' - \nu_0$ ab bei größeren Geschwindigkeitsverlusten; letztere aber sind bei schwereren Elementen wahrscheinlich größer, jedenfalls nicht kleiner als bei leichten Elementen (nach P. Lenard, a. a. O. I., C.).

2) Die Integration ist so ausgeführt, als ob das Spektrum weiter linear verlaufe bis zum Schnitt mit der Achse $\nu = 0$. Welche Gestalt es tatsächlich in diesem Zwischengebiet hat, läßt sich durchaus nicht angeben.

J_r und J sind durch den Winkel γ definiert, den die Linie $(\nu' - \nu)$ mit der Abszissenachse einschließt. Die relativen Werte von tg γ, wie sie sich aus den Messungen ergeben, sind in Tabelle 5 angegeben und bestätigen diesen Satz.

Da $\nu' - \nu_0$ mit Z zunimmt, so wächst das Spektrum B schneller mit Z als Spektrum A, annähernd mit der zweiten Potenz. Exakt ist dies nicht festzulegen, da, wie erwähnt, das beobachtbare $\nu' - \nu_0$ von der Größe des normalen Geschwindigkeitsverlustes der Kathodenstrahlen abhängt. Da aber hier nur eine, zunächst formale, Darstellung des Beobachteten gegeben werden soll, brauchen wir auf diese Einzelheiten nicht näher einzugehen, sondern halten uns direkt an die beobachtete Änderung von $\nu' - \nu_0$. Diese ist angenähert proportional Z.

Tabelle 5.

Element	Z	const tg γ	$\nu' - \nu_0$
Al	13	12,5	0,03
Cu	29	29,0	0,07
Ag	47	45,7	0,11
Sn	50	49,1	0,12
Pt	78	73,8	0,16

In der Tabelle ist, wie früher, Cu = 29 gesetzt worden.

Die Abweichungen des tg γ von der strengen Proportionalität mit Z liegen innerhalb der Versuchsfehlergrenzen[1]), mit Ausnahme von Pt = 73,8. Ich halte es aber für wahrscheinlich, daß ein kleiner systematischer Fehler bei Ag, Sn und Pt insofern vorliegt, als bei diesen Elementen vielleicht an der Erwärmung der Antikathode, die als Maß des Elektronenstromes diente, eben merklich die Energie beteiligt ist, die den Geschwindigkeitsverlusten der — bei großen Z vielen — rückdiffundierten Elektronen entspricht. Dies würde dazu führen, daß die Röntgenstrahlausbeute relativ zu klein gemessen wird. Es darf demnach wohl mit großer Sicherheit angenommen werden, daß für das Spektrum A strenge Proportionalität mit Z tatsächlich besteht.

Auf das schnellere (etwa proportional Z^2) Anwachsen des Spektrum B ist es zurückzuführen, daß (Fig. 9 und Tab. 4)

[1]) Bei Berücksichtigung aller maßgebenden Faktoren dürften diese etwa ± 2 bis 2,5 Proz. betragen.

die Gesamtintensität von Spektrum A + B ebenfalls einen etwas stärkeren Anstieg zeigt.

b) *Das Spektrum in Abhängigkeit vom Potential.*

Im langwelligem Teil der Pt-Spektren besteht leider einige Unsicherheit in der Bestimmung der wahren Intensitätsverteilung. Diese tritt jetzt deutlich hervor als ein Abbiegen (punktierter Kurventeil) von der eingezeichneten geraden Linie, welche wir nach dem vorhergehenden erwarten sollten. Der Sinn dieser Abweichung deutet schon darauf hin, daß die Ursache in nicht vollkommener Eliminierung der Absorption in der Antikathode zu suchen ist. Die diesbezüglichen Messungen etwa zu verbessern, war mir trotz mehrfacher, sorgfältigster Wiederholung der Beobachtungen nicht möglich; es muß vielmehr wohl angenommen werden, daß die einfache logarithmische Extrapolation hier nicht statthaft ist. In der Tat sind die Voraussetzungen, die zur Formel (1) auf S. 569 führten, bei Pt nicht mehr vollständig erfüllt. Im langweiligen Gebiet erreicht $\mu/\sin\psi$ fast den Wert von α; die Extrapolation wäre, unter Berücksichtigung höherer Potenzen, nicht mehr linear auszuführen. Die Form der entsprechenden Kurve kann aber nicht angegeben werden. In dem der Messung zugänglichen ψ-Bereich besteht, wie Fig. 8 zeigt, noch volle Linearität von $\lg J_\psi$ gegen $1/\sin\psi$, so daß jede andersartige Extrapolation willkürlich ausfallen müßte.

Verständlich werden diese Schwierigkeiten durch nähere Betrachtung der Zahlen in Tab. 3 auf S. 575. Bei kleinem ψ geht die Intensität der langen Wellen auf den dritten Teil des ermittelten J_0 herunter; demgegenüber sind die Abweichungen vom zu erwartenden Verlauf, wie sie uns in Fig. 15 entgegentreten, sehr klein.

Schließlich weist die durchaus nicht einheitliche Art, wie die Kurven von der Geraden abbiegen, noch besonders darauf hin, daß wir es hier in der Tat mit besonderen Fehlerquellen und nicht etwa tatsächlich mit einer Intensitätsverteilung zu tun haben, deren Gestalt von der der übrigen Metalle abwiche.

Es erscheint somit gerechtfertigt, die Betrachtung der Pt-Spektren auf den kurzwelligen Teil zu beschränken und hier nach einem linearen Stück zu suchen. Geht man von dieser,

zunächst aus der Analogie zu den Spektren der anderen Elemente geschlossenen, Forderung aus, so läßt sich ein solches auch deutlich erkennen und seine Lage sicher angeben. Wieweit das lineare Stück, also nach unserer Auffassung das nicht gefälschte, in der λ-Darstellung reicht, ist in Fig. 11 durch eingezeichnete Kreuze angemerkt. Der „Knick" tritt bei allen Spannungen mit Deutlichkeit hervor.

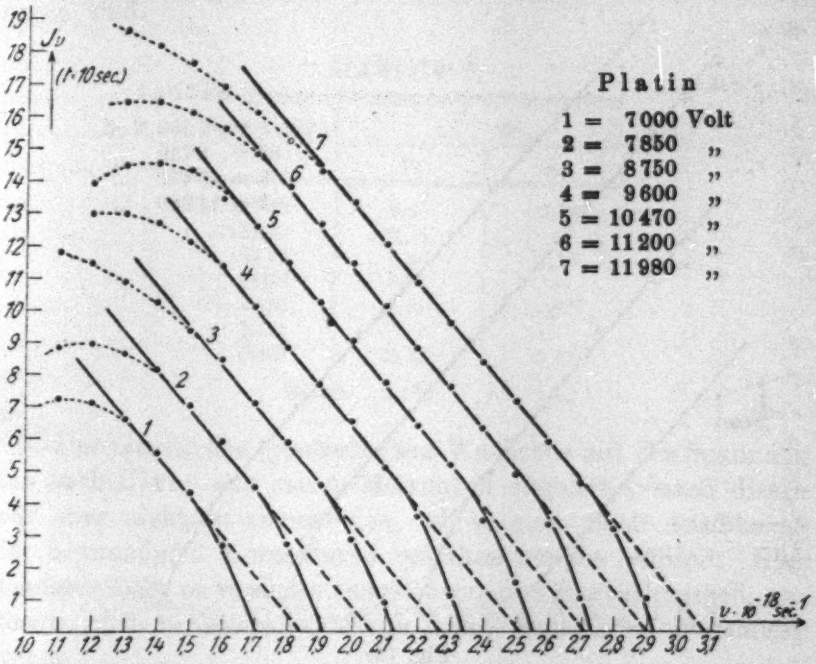


Fig. 15.

Diese Interpretation erhält eine gute Stütze in den Ag-Spektren; der lineare Anstieg ist hier bei den höheren Spannungen vollkommen erfüllt, bis zu den längsten Wellen, die gemessen wurden.

Beide Meßreihen ergeben das Resultat, daß die geraden Linien, welche die Spektren bei verschiedenen Spannungen darstellen, sämtlich einander parallel verlaufen.

Eine Abweichung von der geraden Linie tritt auch an Silber bei tiefen Potentialen, insbesondere am 7000 Volt-Spektrum auf. Hier nimmt der Knick bereits einen wesentlichen Teil des gut meßbaren Spektralbereiches ein; das sehr lang-

wellige Gebiet mag mit größeren Fehlern behaftet sein, so daß dazwischen ein lineares Stück nur mit einiger Willkür zu finden ist. Hauptsächlich aus dem Grunde, zunächst eine einfache Gesetzmäßigkeit hervortreten zu lassen, schien es mir ratsam, ein solches doch anzunehmen. Es sei aber hervorgehoben, daß auch ein sehr sorgfältig gemessenes 7000 Volt-Spektrum von Cu einen ganz ähnlichen Verlauf zeigte.

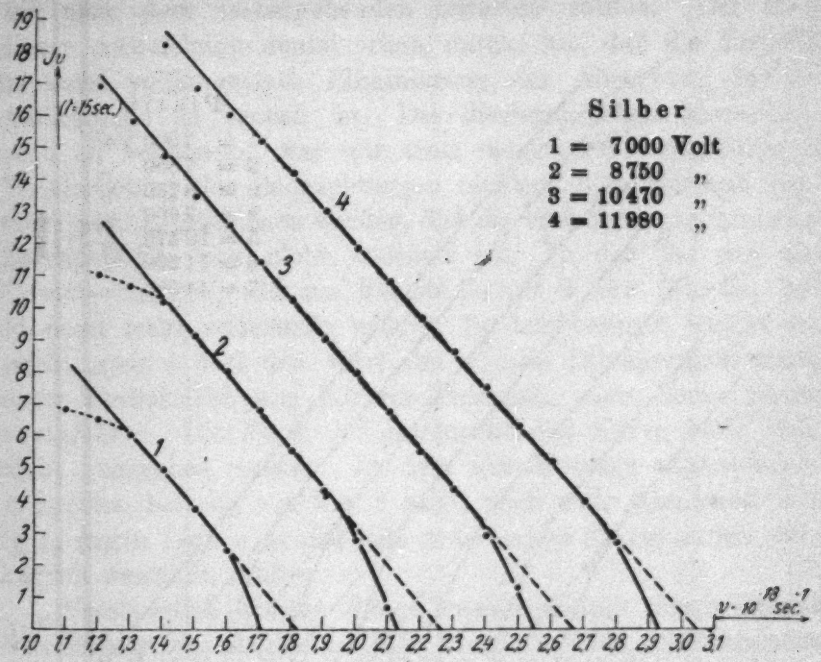


Fig. 16.

Figg. 15 und 16, sowie die Zusamenstellung in Tab. 6 lassen erkennen, daß $\nu' - \nu_0$ unabhängig von der Spannung ist; die Abweichungen vom Mittelwert liegen innerhalb der Grenzen der Genauigkeit, mit der es im allgemeinen bestimmt werden kann.

Es ergibt sich somit für die Spannungsabhängigkeit des Spektrums A: Es ist

$$J_\nu = \text{const} \cdot (\nu_0 - \nu),$$

wobei die Konstante nur von Z, nicht von der Spannung abhängt; es ist ferner die Gesamtintensität $J_A = \int_0^{\nu_0} J_\nu \, d\nu = \text{const} \cdot \nu_0^2$, d. h. sie wächst mit dem Quadrat der Spannung.

Spektrum B: Es ist

$$J_\nu = \text{const}$$

und die Gesamtintensität $J_B = \int_0^{\nu_0} J_\nu \, d\nu = \text{const} \cdot \nu_0$, d. h. sie wächst linear mit der Spannung.

Die Kathodenstrahlenergie wächst ebenfalls linear mit der Spannung, da die Messungen auf konstante Stromstärke bezogen sind.

Tabelle 6.

Spannung (Volt)	$\nu' - \nu_0$	
	Pt	Ag
11980	0,15	0,12
11200	0,17	—
10470	0,16	0,12
9600	0,17	—
8750	0,14	0,13
7850	0,15	—
7000	0,14	0,11
Mittel	0,15$_5$	0,12

Das Gesetz des quadratischen Wachsens mit der Spannung hat auch Ulrey aus seinen Messungen abgeleitet; nach diesen war aber nicht zu entscheiden, ob es auch nach Ausführung der notwendigen Korrekturen bestehen bleiben würde.[1]) Hier dagegen folgt es voraussetzungslos aus den Beobachtungen, zugleich tritt in einfacher Form seine eigentliche Bedeutung zutage.

c) Die Ergebnisse von a) und b) können wir zusammenfassen in die Formel:

$$J_\nu = C \cdot \{Z(\nu_0 - \nu) + Z^2 \cdot b\}. \tag{2}$$

J_ν ist, wie nochmals betont sei, die durch Ionisation gemessene Intensität; C und b sind Konstante, unabhängig von der Ordnungszahl und von der Spannung; die Größe von b kann den Messungen annähernd entnommen werden und ergibt sich zu

1) Nach H. Behnken (a. a. O.) ist dies — mit den eingangs erwähnten Korrekturen — der Fall. Behnken findet, dem obigen äußerlich ähnlich, ebenfalls parallele gerade Linien für die Spektren, aber mit J_λ statt J_ν als Ordinate bei Abszisse ν!

etwa[1]) $b = 0{,}0025$. Dieser Wert entspricht der Darstellung nach Gleichung (2), welche keine Rücksicht nimmt auf die feineren Einzelheiten, die durch die kleinen Geschwindigkeitsverluste der Kathodenstrahlen bedingt werden. Würden wir letztere berücksichtigen, so müßte b einen etwas größeren Wert erhalten, wie man leicht aus den schematischen Zeichnungen der Fig. 14 ableitet. Der angegebene Zahlenwert entspricht, wie auch der Ausdruck (2), dem vereinfachten Fall, welcher in Fig. 14a dargestellt ist, und welcher die bei *vollkommen* homogener Kathodenstrahlungen zu erwartende Intensitätsverteilung angibt. Gleichung (2) gibt unmittelbar an der Grenze ν_0 die wahren Verhältnisse nicht ganz richtig wieder.

Schreibt man die obige Formel in λ um, so erhält man daraus durch einfache Differentiation die Wellenlänge der Maximalintensität zu

$$\lambda_m = \frac{3}{2} \frac{\lambda_0}{1 + b/c \cdot Z \lambda_0} \cdot \text{[1])}$$

Der letzte Ausdruck enthält die Verschiebung von λ_m nach kürzeren Wellenlängen mit wachsendem Z einerseits, die Zunahme von λ_m/λ_0 mit wachsender Spannung andererseits in Übereinstimmung mit der Beobachtung.[2]) Mit wachsender Spannung bzw. mit abnehmendem Z nähert sich das Verhältnis λ_m/λ_0 dem konstanten Wert 1,5. So ergibt auch die Beobachtung z. B. für λ_m/λ_0:

bei 10470 Volt an Pt: 1,39; an Al: 1,48

und an Pt bei 7000 Volt: 1,28; bei 11980 Volt: 1,41.

Ulrey hat (a. a. O.) aus seinen Messungen ein Gesetz abgeleitet, wonach λ_m/λ_0 protortional $V^{1/2}$ zunehmen solle. Es bedarf keiner näheren Erörterung, daß dieses wegen nicht berücksichtigter Absorptionseinflüsse nicht den wahren Verhältnissen entsprechen kann.

Allgemeine Bedeutung — wie etwa in der Wärmestrahlung — dürfte überhaupt dem Wert von λ_m nicht zukommen, wie schon aus dem Fortfallen eines Maximums in der Frequenzdarstellung erhellt. Wesentlich für das Röntgenspektrum ist

---

1) Einheit für ν (bzw. c/λ) ist wieder 10^{18} sec^{-1}!

2) Die Übereinstimmung ist selbstverständlich, da ja die Formel aus den Beobachtungen abgeleitet wurde.

vielmehr das Duane-Huntsche Gesetz der Minimumwellenlänge.

Zusammenfassung.

1. Es wird die Intensität und spektrale Verteilung der kontinuierlichen Röntgenstrahlung untersucht in Abhängigkeit von der Ordnungszahl Z des Antikathodenmetalles und von der Spannung V der Kathodenstrahlen. Die Versuchsbedingungen sind: Gasentladungsrohr mit Al-Fenster zum Strahlaustritt und drehbarer, vierkantiger Antikathode, konstante Akkumulatorenspannung, Braggsches Spektrometer mit Kalkspaltkristall, Intensitätsmessung durch Ionisation in luftgefüllter Kammer; die Kathodenstrahlenergie wird als die der Antikathode zugeführte Wärme mittels Thermoelement gemessen. Die Beobachtungsrichtung der Röntgenstrahlen ist stets senkrecht zum Kathodenstrahl.

2. Die Z-Abhängigkeit wird bestimmt für die acht Metalle: Al, Fe, Co, Ni, Cu, Ag, Sn, Pt bei $V = 10470$ Volt, die V-Abhängigkeit an Ag und Pt im Spannungsintervall von 7000 bis 12000 Volt. Insgesamt ist ein Wellenlängenbereich von $\lambda = 1{,}0$ bis $\lambda = 2{,}8$ Å umfaßt. Die Spektren sind erheblich entstellt durch Einflüsse, welche ermittelt werden:

a) Durch Änderung des Winkels, den das beobachtete Röntgenstrahlbündel mit der Antikathodenoberfläche bildet (Drehung der Antikathode), wird der Betrag der Absorption bestimmt, welche die Röntgenstrahlen innerhalb der Antikathode erleiden.

b) Es wird ferner berücksichtigt: Absorption der Strahlen im Al-Fenster des Rohres und in der durchsetzten Luftstrecke, die Wellenlängenabhängigkeit der Reflexionskraft des Kristalls und die Länge der Ionisationskammer.

Es ergibt sich so die ungefälschte spektrale Intensitätsverteilung, wie sie durch die ionisierende Wirkung gemessen wird.

3. Letztere, gegen die Frequenz ν als Abszisse (Ordinate J_ν) aufgetragen, ergibt im wesentlichen einen linearen Anstieg von J_ν mit $\nu_0 - \nu$. Der Tangens des Neigungswinkels dieser Geraden ist proportional Z; bei geänderter Spannung ($Z = \text{const}$) ergeben die Spektren einander parallele Gerade. In der Nähe der Grenzfrequenz tritt ein auffallender „Knick“ auf, dessen

Eigenschaften näher diskutiert werden. — Die Ergebnisse lassen sich in eine einfache empirische Formel zusammenfassen.

Die vorstehende Arbeit wurde auf Anregung des Herrn Prof. Dr. E. Wagner unternommen, der mich auch bei der Durchführung mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat. In liebenswürdiger Weise gestattete er mir die Benutzung seiner Apparatur, insbesondere die der Akkumulatorenbatterie, welche ihm zu einem großen Teile von der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Verfügung gestellt ist. Ich freue mich, Herrn Prof. Wagner an dieser Stelle herzlich danken zu können. Ich benutze ferner gern die Gelegenheit, dem Vorstand des Instituts, Herrn Geheimrat Prof. Dr. W. Wien, meinen wärmsten Dank auszusprechen für bereitwilligste Unterstützung mit den erforderlichen Hilfsmitteln und das fördernde Interessen, welches er meiner Arbeit stets entgegengebracht hat.

München, Physikal. Inst. der Universität, Mai 1922.

(Eingegangen 18. August 1922.)

3. *Beobachtungen über das Funkenpotential; von Hildegard Stücklen.*

§ 1. Nach Townsend[1]) entsteht der elektrische Funken zwischen zwei Elektroden verschiedenen Potentials dadurch, daß die negativen und positiven Elektrizitätsträger im elektrischen Feld soweit beschleunigt werden, daß sie Stoßionisation hervorrufen können, oder besser: die einzelnen Teilchen müssen durch Zertrümmerung neutraler Gasmoleküle so viele neue Elektrizitätsträger erzeugen, bis der Ionisationsstrom unendlich wird. Während diese Theorie im allgemeinen den Erscheinungen gerecht wird, sind in neuerer Zeit einige Beobachtungen angestellt worden, die sie nicht restlos zu erklären vermag. So ist z. B. der große Einfluß, den geringe Spuren von Verunreinigungen ausüben, wie ihn Edgar Meyer[2]) für Wasserdampf in Luft nachgewiesen hat, nur sehr schwer zu verstehen; ganz unverständlich bleibt aber nach dieser Theorie der Verlauf des Einflusses: ein anfängliches Fallen und späteres Steigen des Funkenpotentials mit wachsendem Wasserdampfdruck. Unberücksichtigt ist auch noch folgendes: nach früheren Arbeiten schien es, als ob das Material der Elektroden ganz ohne Einwirkung auf die Höhe der Entladespannung sei[3]); die Deutung Townsends, daß der Funke allein im Gasraum entstünde, war darum den damaligen Experimenten durchaus angepaßt. Neuere, sorgfältigere Messungen lassen jedoch darauf schließen[4]), daß durchaus mit einem Materialeinfluß zu rechnen ist, der, wenn auch gering, doch bei gegebenem Gase jedem Metall

1) J. S. Townsend, Electricity in Gases. Oxford. 1915.

2) Edgar Meyer, Ann. d. Phys. **65.** S. 335. 1921. Im folgenden als II zitiert.

3) W. de la Rue und H. W. Müller, Phil. Trans. Roy. Soc. London. **169.** Part. I. 55. 1878. J. B. Peace, Proc. Roy. Soc. London. **52.** S. 99. 1892; W. R. Carr, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A.) **201.** S. 403. 1892.

4) N. Campbell, Phil. Mag. (6.) **38.** S. 214. 1919. — Edgar Meyer, Mitt. der Phys. Ges. Zürich. Nr. 19. S. 70. 1919; Holst und Osterhuis, Physica. **1.** S. 84. 1921.

einen charakteristischen Wert für das Funkenpotential zuschreibt, wie er auch für das Kathodengefälle existiert.[1]) Künftige Arbeiten werden also vor allem diesen Materialeinfluß der Elektroden eindeutig festzustellen haben. — Bevor man das aber untersuchen kann, muß erst festgestellt werden, ob vielleicht die Verunreinigungen der Elektrodenoberflächen, wie sie sich im Gasraum durch adhärierende Wasser- und Gasschichten ausbilden, schon von Bedeutung für den Wert des Funkenpotentials sind. Reine, auch trockne Gase lassen sich bei sehr sorgfältigem Arbeiten gewinnen; absolute Trockenheit und Gasfreiheit der Elektroden aber, die von der freien Atmosphäre her in das Entladegefäß eingesetzt werden müssen, ist kaum anders zu erreichen, als daß man direkt vor der eigentlichen Messung im Entladegefäß selbst neue Elektrodenoberflächen herstellt.

Diese Arbeit hat sich darum das Ziel gesteckt, nachzuweisen, ob derartige adhärierende Schichten von Bedeutung sind, ob also ein solches Herstellen neuer Oberflächen jeder endgültigen Bestimmung des Funkenpotentials vorherzugehen hat. Ein Resultat sei hier gleich vorweggenommen: Wasserdampf, der nachweislich auf den Elektroden saß, und der im Gasraum eine so hervorragende Rolle spielt, schien, während er dem Metall anhaftete, ohne jede Bedeutung zu sein, sowohl in Luft als auch in Stickstoff. Es handelt sich hier um außerordentlich geringe Mengen Wasserdampf, die so fest am Metall sitzen, daß sie ohne besondere Erwärmung auch bei tagelangem Verbleib in hohem Vakuum (ca. 10^{-5}—10^{-6} mm Hg) sich nicht lösen. Ein Einfluß anhaftender Gas- oder Oxydschichten ließ sich in Luft an keinem der untersuchten Metalle nachweisen, sei es, daß der Einfluß fehlt, sei es, daß die Schichten sich schneller wieder herstellen, als es diese Messungen nachzuweisen vermochten. In Stickstoff hingegen war für Zn eine Änderung des Funkenpotentialwertes festzustellen, wenn die Kathode eine neue Oberfläche erhalten hatte, und zwar unter allen untersuchten Metallen nur für Zn. — Im folgenden seien die Experimente beschrieben, die diesen Nachweis bringen sollen, sowie einige Resultate angeführt, die sich nebenher ergaben.

---

1) J. S. Townsend, a. a. O. S. 436.

§ 2. Um im Vakuum eine neue Metalloberfläche herzustellen, stehen im allgemeinen zwei Wege offen. Man kann entweder der alten Oberfläche durch Kathodenzerstäubung eine neue überlagern, oder aber man schabt auf mechanischem Wege die alte Oberfläche fort. Während viele Autoren in der Kathodenzerstäubung ein unfehlbares Mittel sehen, saubere Metalloberflächen herzustellen, läßt sich auch die Ansicht vertreten, daß den überfliegenden Metallpartikeln Gas- und Oxydschichten anhaften, jedenfalls ist die Reinheit von so hergestellten Oberflächen bisher widerspruchslos noch nicht festgestellt. Es wurde darum hier der zweite Weg beschritten und die Elektroden im Vakuum auf mechanischem Wege gesäubert.

Die Apparatur ergab sich somit folgendermaßen:

a) Da große Teile der Versuchsanordnung schon früher beschrieben sind,[1])[2]) so mögen diese erst kurz Erwähnung finden:

Eine der eigentlichen Meßfunkenstrecke stets parallel geschaltete Vergleichsfunkenstrecke ist die schon früher benutzte. Dicht zwischen zwei planparallelen kreisrunden Messingplatten von 21 mm Durchmesser in Hartgummifassung liegt ein Hartgummiring von 24,5 mm äußerem und 8,1 mm innerem Durchmesser, der zwecks schnelleren Ausgleichs des Meßgases im Ring und außerhalb desselben eine 0,6 mm weite, genau radiale Bohrung enthält. Das durch den Ring ausgeblendete Feld war streng homogen, wie früher[3]) durch die Unabhängigkeit des Funkenpotentials von dem inneren Durchmesser des Zwischenringes bewiesen war. Auch die elektrische Einrichtung (Hochspannungsbatterie, Blockkapazität zur Vermeidung allzu intensiver Funken, Nachweis des übergehenden Funkens mittels eines empfindlichen Galvanometers (Empfindlichkeit = $5{,}3 \cdot 10^{-10}$ Amp. pro Skalenteil) Spannungsablesung mit Millivoltmeter von Siemens & Halske ist die alte geblieben. Die Funkenverzögerung wurde durch die γ-Strahlen eines genügend starken Ra-Präparates (2 bis 28 mg $RaBr_2$) aufgehoben. Das Evakuieren geschah mittels eines Aggregates von 3 Pumpen (Gaedesche Kapselpumpe, Volmer-Vorvakuumpumpe, Gaedesche Diffusionspumpe), die Druckmessung mit einem Mc.Leod

1) Edgar Meyer, Ann. d. Phys. **58.** S. 297. 1919. Im folgenden als I zitiert.

2) H. Stücklen, Ann. d. Phys. **65.** S. 369. 1921.

3) Edgar Meyer, I.

Manometer mit Kompensationssteigrohr[1]) für Drucke von 0,5—10 mm, mit einem Mc.Leod-Manometer mit Kapillarrohr für hohes Vakuum. Zur gründlichen Austrocknung der Apparatur, bzw. als Reservoir für das zu benutzende Gas waren mit P_2O_5 gefüllte Rohre an mehreren Stellen angebracht, wie das aus Fig. 1 ersichtlich ist.

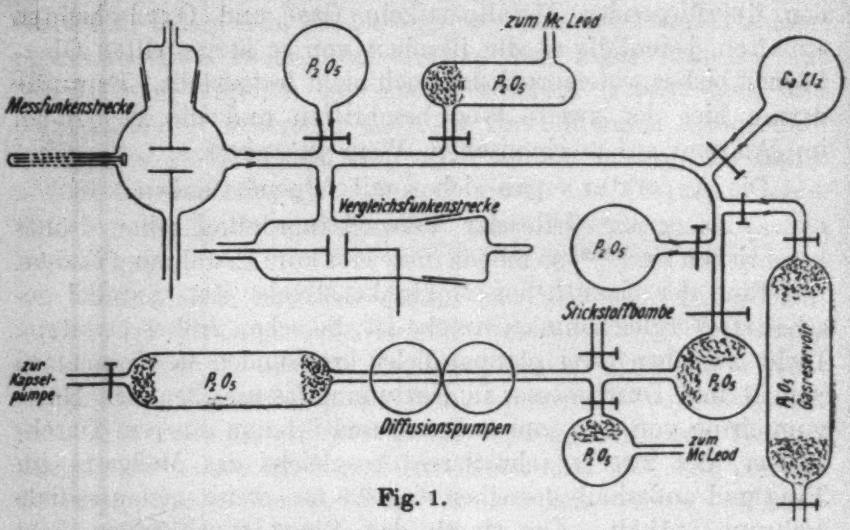


Fig. 1.

Wenn große Trockenheit des Gases erforderlich war, so wurde zufolge früheren Messungen[2]) für die „innere Apparatur" (bestehend aus den Entladegefäßen, einem Trockengefäß und den Zuleitungen) nur Glas und Glaswolle benutzt, die zuvor durch Auskochen unhygroskopisch gemacht waren; alle nicht ausgekochten Glasteile waren durch P_2O_5-Schutzgefäße von der inneren Apparatur getrennt. Sollte hingegen das Gas gewisse Wasserdampfgehalte besitzen, so wurden entweder nicht ausgekochte Glasteile zu der Apparatur zugeschaltet, oder das P_2O_5-Reservoir entfernt und die Zimmerluft direkt (durch Glaswolle) in die Apparatur gelassen, oder es wurde auch die Apparatur mit einem Reservoir, das $CaCl_2$ enthielt[3]), verbunden. Alles Gas, was in die Apparatur geleitet wurde, war

1) Edgar Meyer, I.
2) H. Stücklen, a. a. O.
3) H. Stücklen, a. a. O.

stets durch Glaswollefilter staubfrei gemacht. Hähne und Schliffe waren mit Ramsayfett gedichtet, Metallteile mit weißem Siegellack eingekittet.

b) Der Schabeapparat.

Fig. 2 gibt schematisch den Schabeapparat wieder:

1. Stellung beim Messen. In zwei fest in das Gefäß der Meßfunkenstrecke eingekittete Elektrodenhalter H_1 und H_2 lassen sich die kreisrunden planparallelen Metallelektroden E_1 und E_2 einschieben, die untere E_1 ist fest, die obere E_2 in einer Führung

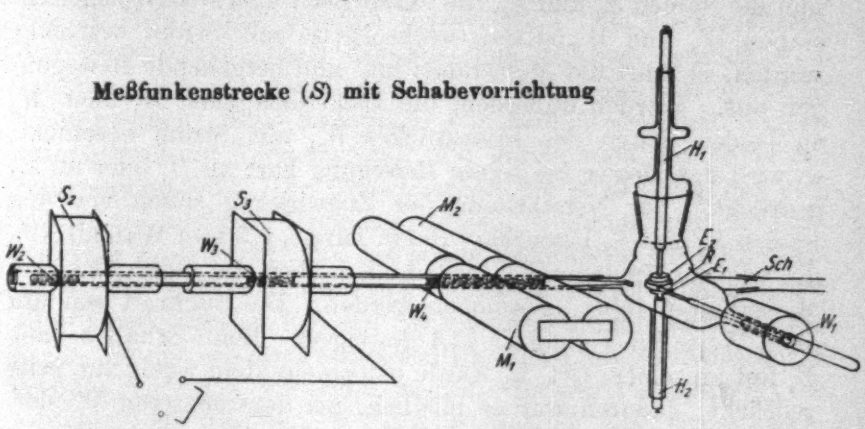


Fig. 2.

leicht beweglich. Diese obere Elektrode liegt vermöge ihrer Schwere dicht auf einem Ring R aus isolierendem Material (Hartgummi oder Bernstein) auf. Auch dieser Ring besitzt, wie der oben beschriebene, zum Gasausgleich eine enge radiale Bohrung. Die Elektroden sind, um zu vermeiden, daß sich außerhalb des Ringes am Rande ein Spitzenstrom ausbilde, entweder in Hartgummi eingebettet oder am Rand genügend stark abgerundet. Die Dimensionen sind folgende: Elektrodendurchmesser 1,50 cm, Ringdurchmesser außen 1,97 cm, innen 0,50 cm, Ringdicke 4,81 mm.

2. Stellung beim Schaben.[1]) Sollen die Elektroden geschabt werden, so wird das Gefäß um den Schliff *Sch* um 90° gedreht, so daß die Elektrodenoberflächen nun vertikal stehen. Der Ring, der durch ein schwach federndes Stück mit dem

1) Der Apparat ist im Prinzip ähnlich gebaut wie der von H. Küstner, Ann. d. Phys. **46.** S. 893. 1915.

Weicheisenstab W_1 verbunden ist, wird nun durch eine stromdurchflossene Spule von außen angehoben, wobei sich W_1 in einer Metallführung des umhüllenden Glasrohres festklemmt, so daß der Ring nun auch, ohne daß die Spule von Strom durchflossen ist, über den Elektroden hängen bleibt. Jetzt wird, ebenfalls auf elektromagnetischem Wege vermittelst Eisenstab und Spule das Ende eines langen Messingstabes zwischen die Elektroden gebracht, das vorne ein Messerchen aus glashartem Silberstahl mit 2 hohlgeschliffenen Schneiden trägt. Wenn nun die Spulen S_2 und S_3, die exzentrisch über den Weicheisenstäben W_2 und W_3 sitzen, wechselweise mit Strom beschickt werden, so führt das Messerchen hin- und hergehende Bewegungen aus. Werden außerdem die Elektromagnete M_1 oder M_2 zu beiden Seiten des Eisenstückes W_4 mit Strom beschickt, so wird das Messer bei seiner Bewegung hart an E_1 oder an E_2 gedrückt. Zur Verstärkung der Zugwirkung sitzen vor den Spulen S_2 und S_3 Eisenrohre (6 cm Länge, 5,5 mm Wanddicke), die wie die Spulen selbst von außen über das Rohr, das den Messerhalter führt, geschoben werden. Die Zugkraft war auf diese Weise im Verhältnis 1 : 4 gesteigert. Beim Schaben blieb E_1 fest an seinem Ort, E_2 wurde jedoch ein klein wenig zur Seite gedrückt; dadurch war es möglich, bei dem späteren Wiedereinführen des Ringes diesen nicht über die neugeschabte Fläche gleiten zu lassen, so daß eine Berührung des mittleren Teiles der Elektroden mit dem Hartgummi vermieden war. Waren die Elektroden in Hartgummi eingefaßt, so war durch Abdrehen der Einbettung dafür Sorge getragen, daß das Messer nur das Metall berührte.

Das Schaben geschah so gründlich, daß nach jedem Versuch eine dicke Metallstaubschicht auf dem Boden des Gefäßes lag, doch wurde darauf geachtet, daß an den Elektroden selbst keine Metallpartikelchen haften blieben. Besondere Versuche hatten übrigens gezeigt, daß solche anhaftenden Metallpartikel keinen großen Einfluß auf den Wert des Funkenpotentials ausübten. Der Ring, der ja während des Schabens über den Elektroden hing, blieb natürlich staubfrei. Nach beendetem Schaben wurde sehr schnell das Messer zurückgeschoben, der Ring eingelassen und die Apparatur gedreht; ca. $1^1/_2$—2 Minuten später konnte die erste Messung erfolgen. Nach beendetem Versuch sah man an den herausgenommenen Elektroden, daß diese durchweg eine neue Oberfläche erhalten hatten, das Schaben funktionierte also gut.

§ 3. Kontrollversuche und Vorsichtsmaßregeln.

Da Funkenpotentiale bekanntlich gegen Störungen aller möglichen Art außerordentlich empfindlich sind, so war eine größere Menge von Kontrollmessungen und Vorsichtsmaßregeln notwendig, von denen die wichtigsten kurz erwähnt seien.

1. Am einfachsten wäre es gewesen, die Brauchbarkeit der Meßfunkenstrecke — sie sei im folgenden S genannt — zu prüfen, indem man mit ihr eine normale Druck-Spannungskurve für Funkenpotentiale aufgenommen hätte, z. B. nach dem festen, von E. Meyer angegebenen Spülrezept.[1]) Bei dem wechselnden Feuchtigkeitsgehalt der aus dem Zimmer entnommenen Luft[2]) war dies aber mit einer größeren Genauigkeit als $\pm$ 10 Volt nicht möglich; jedes Nachfüllen von Luft ändert den Wasserdampfgehalt im Versuchsgefäß und damit auch den Wert des Funkenpotentials. Die Brauchbarkeit der Anordnung ließ sich jedoch auf anderem Wege nachweisen. — Nahm man bei sukzessivem Evakuieren, also bei einem konstanten Feuchtigkeitsgehalt der Luft das Funkenpotential in seiner Abhängigkeit vom Druck auf, so lag das Spannungsminimum stets an der Stelle, die sich aus der Formel von Paschen mit der Konstanten von Meyer[3]) $p_{min} \times l = 5{,}67$ ergibt. Es war $l = 4{,}81$, $p_{min} =$ 1,16 bis 1,20; also $p_{min} \times l = 5{,}58$ bis 5,77, eine Genauigkeit, die für diese Versuche ausreichte.

Ein Vergleich der Meßfunkenstrecke S mit der Vergleichsfunkenstrecke V zeigte oft verschiedene Werte für die Entladespannung an, wenn neues Gas eingelassen oder die Apparatur kurz vorher geöffnet worden war. Unsymmetrische Lage der Funkenstrecken zu den Trockengefäßen mögen dafür verantwortlich sein. Wartete man aber genügend lange Zeit bis die Feuchtigkeit im Innern der Apparatur sich ausgeglichen hatte, so konnte man sicher sein, daß auch das Funkenpotential bei

---

1) Edgar Meyer, I.

2) Erwähnt sei, daß die Versuche in einem neu gemauerten, also besonders feuchten Zimmer des Erdgeschosses ausgeführt wurden. Bei schnellem Arbeiten, wie das beim Aufnehmen einer Druck-Spannungskurve notwendig ist, machte sich der Wassergehalt der aus dem Zimmer entnommenen Luft sehr störend bemerkbar. Darum wurde für spätere Versuche nur Luft aus dem P_2O_5-Reservoir verwandt, wenn nicht direkt Versuche in „feuchter Luft" angestellt werden sollten.

3) Edgar Meyer, I.

gleichem Elektrodenmaterial und gleichem Elektrodenabstand in beiden Gefäßen denselben Wert zeigte.

Tab. 1 gibt ein typisches Beispiel für den Gang der Entladespannung in beiden Funkenstrecken.

Tabelle 1.

Messingelektroden in Luft. $p = 1{,}86$ mm Hg.

t	v_e	v_a
0	350 Volt	354 Volt
15h	360 „	367 „
23h 30′	362 „	366 „
40h	370 „	372 „
48h	370 „	371 „
61h	370 „	371 „
67h	369 „	370 „

Nach etwa $1^1/_2$—2 Tagen haben sich die Funkenstrecken gleich eingestellt, um ohne Änderung von außen nicht mehr verschiedene Werte anzunehmen.

2. a) Es war zu prüfen, ob eine Feldverzerrung innerhalb des Ringes zwischen den Elektroden, hervorgerufen durch elektrische Influenz anderer Metallteile, stattfand. Zu diesem Zwecke wurden Messer- und Ringhalter, die am nächsten benachbarten Metallstücke, mit einer der Elektroden leitend verbunden. Dadurch wäre ein zwischen den Elektroden durch Influenz verzerrtes Feld sicher verändert worden. Da nun das Funkenpotential trotz der Verbindung das gleiche blieb, so war nachgewiesen, daß der Feldverlauf im Raum, in dem der Funken übergeht, durch elektrische Influenz nicht gestört wurde.

b) Um zu sehen, ob ein magnetisches Feld, entstanden durch den remanenten Magnetismus der Eisenteile, das Funkenpotential beeinflusse, wurden für die Dauer einer Messung alle Spulen, die über die Eisenteile geschoben waren, mit kräftigem Strom beschickt, das magnetische Feld also sicher beträchtlich verstärkt. Eine Wirkung auf die Höhe der Entladespannung war nicht zu konstatieren, woraus zu schließen ist, daß die Eisenteile zu weit von den Elektroden entfernt sind, als daß der remanente Magnetismus störend wirken könnte.

3. Es war zu kontrollieren, ob der homogene Teil des Feldes zwischen den Elektroden größer war als die Ringbohrung, da kleine Verschiebungen des Ringes vor und nach dem Herausziehen, wie es beim Schaben notwendig ist, nicht zu vermeiden

waren. Ferner mußte man nachweisen, was bei früheren Versuchen zwar mit großer Wahrscheinlichkeit angenommen, aber noch nicht bewiesen war, daß sich durch die Funken an der Ringwandung keine Ladungen ausbilden, die das Feld beeinflussen. Wenn beides nicht der Fall ist, sollte erstens eine kleine seitliche Verschiebung des Ringes ohne Einfluß sein. Bei Drucken oberhalb des Minimumpotentials sollte ferner, da ja für diesen Fall der Funke auf kürzestem Wege, also senkrecht zu den Elektroden überspringt, das Funkenpotential mit und ohne Ring denselben Wert haben. — Der Apparat wurde um 90° gedreht und der Ring sukzessive hochgezogen. Tab. 2 gibt das Funkenpotential wieder in seiner Abhängigkeit von der Ringstellung.

Tabelle 2.

Funkenpotential beim Herausziehen des Ringes.

Zn-Elektroden mit Hartgummieinbettung in N, $p = 2{,}43$ mm Hg

1.	Ring in der Mitte	$V = 340$
2.	„ ca. 3 mm herausgezogen	340
3.	„ ca. 6 mm herausgezogen, Bohrung über dem Elektrodenrand, Elektrodenmitte bedeckt	349
4.	„ halb heraus, Bohrung draußen	341
5.	„ fast draußen, Elektrodenmitte frei	339
6.	„ ganz herausgezogen	339
7.	ungefähr wie 5	341
8.	„ „ 4	341
9.	„ „ 3	358
10.	„ „ 2	341
11.	wie 1	339

Liegt der Ring in der Mitte zwischen den Elektroden oder fast in der Mitte, so ist das Funkenpotential das gleiche wie ohne Ring, blendet er die Mittelpartien ab, so ist der Wert höher, entsprechend der Abnahme des elektrischen Feldes nach dem Rande hin. Die Befürchtung, Ladungen an der Ringwandung könnten den Feldverlauf verzerren, ist somit als unbegründet erwiesen.

4. Beim Schaben, d. h. beim elektromagnetischen Bewegen des Messerhalters erwärmt sich dieser durch Foucaultströme, wodurch geringe Mengen Wasserdampfes, die an der Oberfläche des Metalls adhärieren, an die Umgebung abgegeben werden, und diese Spuren genügen, um den Wert der Entladespannung bemerkbar zu ändern (bis zu ca. 5—10 Volt). Dieser sehr störende Effekt konnte durch 2 Vorsichtsmaßregeln vollständig beseitigt werden: Es war unbedingt erforderlich, sehr langsam

zu schaben. Es wurde ferner vor jeder Meßreihe die Apparatur auf sehr gutes Vakuum ausgepumpt und alle Spulen ca. 10 bis 15 Minuten lang mit kräftigem Wechselstrom beschickt. Die dabei eintretende Erwärmung der Metallteile genügte, ihre Feuchtigkeitsabgabe so weit zu treiben, daß ein Pseudoschaben, d. h. ein Schaben, bei dem das Messerchen sich zwar zwischen den Elektroden hin und her bewegte, aber nicht durch die Magneten M_1 oder M_2 an die Elektroden angedrückt wurde, vollständig ohne jeden Einfluß blieb. Die Werte des Funkenpotentials vor und nach dem Pseudoschaben waren später absolut gleich. Auch eine besondere Erwärmung des Messers blieb dann ohne jede Bedeutung. Tabelle 3 gibt die Belege für das Gesagte.

Tabelle 3.

Die Metallhalter sind vorher *nicht* erwärmt			Die Metallhalter sind vorher erwärmt	
Potential		darauf ca. 2 Std. mit P_2O_5 verbund.	Potential	
vor dem Pseudoschaben	nach dem Pseudoschaben		vor dem Pseudoschaben	nach dem Pseudoschaben
378 Volt	373 Volt	378 Volt	390 Volt	390 Volt
410 „	402 „	409,5 „	370 „	370 „
341 „	344[1]) „	341 „	381 „	382 „
			321 „	321 „

Man sieht, daß es sich bei diesem Versuch um frei werdenden Wasserdampf handelt, da sich nach ca. 2stündiger Verbindung mit P_2O_5 der alte Wert wieder einstellt.

§ 4. Resultate.

Zuerst soll der Nachweis erbracht werden, daß eine Wasserhaut auf den Elektroden ohne Einfluß auf das Funkenpotential ist. Dies wird der Fall sein, wenn wir folgendes beobachten: das Meßgas möge einen bestimmten, sehr geringen Feuchtigkeitsgehalt haben, und an den Elektroden soll eine Wasserschicht haften. Das erste Schaben löst diese Haut vom Metall, führt sie in das Gas über, und bewirkt dadurch eine Potentialänderung in Meß- und Vergleichsfunkenstrecke, die einem Feuchterwerden des Gases entspricht. Wirkt nun eine folgende Austrocknung des Gases so, daß die nunmehr wasserfreien Elek-

1) Hier war durch Verbindung mit $CaCl_2$ die Apparatur etwas feuchter, ein stärkeres Feuchterwerden mußte Erhöhung des Funkenpotentials hervorrufen.

troden in dem wieder getrockneten Gas gleiches Funkenpotential anzeigen wie die vorher mit Wasserdampf beladenen im trocknen Gas, so wäre erwiesen, daß die Feuchtigkeitsschicht auf dem Metall keine beeinflussende Rolle gespielt hat. Was für das anfänglich trockne Gas gilt, gilt natürlich auch für anfänglich feuchtes; ist die dazugekommene Feuchtigkeit vom P_2O_5 absorbiert, und zeigen die wasserfreien Elektroden gleiches Potential an wie die vorher mit Feuchtigkeit beladenen, so kann diese Wasserhaut keinen Einfluß auf die Entladespannung gehabt haben. Steht dann aber die Apparatur längere Zeit in dem feuchten Meßgas, so werden die Elektroden von neuem Wasserdampf anziehen, und die Wiederholung des Versuches muß das gleiche Resultat ergeben.

Die Versuche wurden angestellt mit Messing, Ag, Al, Zn und Cu in Luft und in Stickstoff. Die Luft war entweder ganz trocken, dann war sie einem Reservoir entnommen, in dem sie tagelang über P_2O_5 unter einigen Zentimetern Druck gestanden hatte, oder sie hatte mittleren Feuchtigkeitsgehalt, dann war sie kürzere Zeit getrocknet, oder aber sie war durch Verbindung der Apparatur mit einem $CaCl_2$-Rohr feucht gemacht.[1]) Der Stickstoff war einer Bombe entnommen, durch Pyrogallol und glühendes Cu von Sauerstoff befreit und dann in ein mit P_2O_5 beschicktes Reservoir gelassen. Nur in einigen Versuchen war er direkt aus der Bombe in die Apparatur geleitet und enthielt dann ca. 4 Proz. Sauerstoff.

Wie schon oben erwähnt, handelt es sich hier um ganz geringe Schichten von Feuchtigkeit, die so fest am Metall haften, daß sie sich ohne besondere Erwärmung nicht ablösen, falls sie nicht abgeschabt werden. Manometrisch läßt sich die Druckänderung durch den freiwerdenden Wasserdampf nicht mehr feststellen. Liegt dagegen Metall an der freien Luft unter Atmosphärendruck, so zieht es sehr viel mehr Wasser an, das zum allergrößten Teil im Vakuum wieder abgegeben wird. Von dem Nachweis dieser Wasserhaut wird weiter unten (§ 7) die Rede sein. Hier war vor jedem Versuch die Apparatur auf sehr

1) Frühere Versuche (H. Stücklen, Ann. d. Phys. **65**, S. 369. 1921) hatten ergeben, daß $CaCl_2$, das wenige Stunden an der Luft steht, genügend Wasser anzieht, um im luftverdünnten Raum das Meßgas so feucht zu machen, daß eine weitere Vermehrung der Feuchtigkeit ein Steigen des Funkenpotentials zur Folge hat.

gutes Vakuum gebracht worden (ca. 10^{-5} mm—10^{-6} mm Hg), und dieses wurde unter mehrfachem Nachpumpen mindestens einen halben Tag, in der Mehrzahl der Fälle aber länger (bis zu 2—3 Tagen) bei steter Verbindung der Apparatur mit P_2O_5 aufrecht erhalten.

Zwei typische Beispiele für den Verlauf solcher Versuche möchte ich an Hand von graphischen Darstellungen (Fig. 3 und Fig. 4) wiedergeben, andere seien den folgenden Tabellen entnommen. Zuvor sei jedoch noch folgendes bemerkt: Nachdem einige Male gezeigt worden war, daß beide Funkenstrecken gleichen Wert für das Funkenpotential annehmen, falls genügend lange Zeit (bis zu einigen Tagen) gewartet wird, bis sich in der ganzen Apparatur ein Feuchtigkeits-Gleichgewichtszustand zwischen dem Gas, den Glaswänden und dem P_2O_5 ausgebildet hat, ist in späteren Fällen dieser Zustand nicht immer abgewartet worden. Dieses erklärt, warum bei den folgenden Versuchen Differenzen von einigen Volt zwischen den Potentialen der beiden Funkenstrecken auftreten. Ein *Gang* des Potentials, und auf den kommt es hier allein an, ist jedoch trotzdem absolut sicher festzustellen. Und ferner: Die Funkenstrecke S war, wenn beide Elektroden aus dem *gleichen* Material bestanden, im allgemeinen symmetrisch, d. h. ein Vertauschen der Stromrichtung änderte am Werte der Entladespannung nichts. Tritt einmal eine kleine Differenz auf, so kann sie durch Funkenverzögerung oder durch Meßfehler erklärt werden. Nie ist sie jedenfalls systematisch. Bestanden aber die Elektroden aus *verschiedenem* Material, so traten öfters beim Kommutieren Verschiedenheiten von mehreren Volt auf. Die Versuche, ob ein bestimmtes Metall z. B. in Kathodenstellung stets höheres Potential aufweist als in Anodenstellung, verliefen jedoch nicht eindeutig. Ich möchte daher aus dieser Differenz vorläufig keine Schlüsse ziehen.

In den folgenden Figuren bedeutet $\times$ das Potential der Vergleichsfunkenstrecke V, $\bullet$ das Potential der Meßfunkenstrecke S, wenn die untere Elektrode Kathode, o wenn die obere Kathode ist, entsprechend $\overset{\bullet}{\downarrow}$ und $\overset{\circ}{\downarrow}$, daß die untere bzw. die obere Seite geschabt wird. Die Zeitachse wechselt im Maßstab, da die Änderung des Funkenpotentials durch Schaben meist sehr viel schneller erfolgte als die der Erholung. Besonders die Zeiten des Austrocknens der Apparatur sind stark verkürzt. Das

Schaben selbst dauert in der Regel 15—20 Minuten, manchmal auch kürzer, gemessen wird im allgemeinen 1,5—2 Minuten nach Zurückziehen des Messers. — Wie auch in späteren Versuchen, ist als Ordinate nicht immer der Absolutwert in Volt

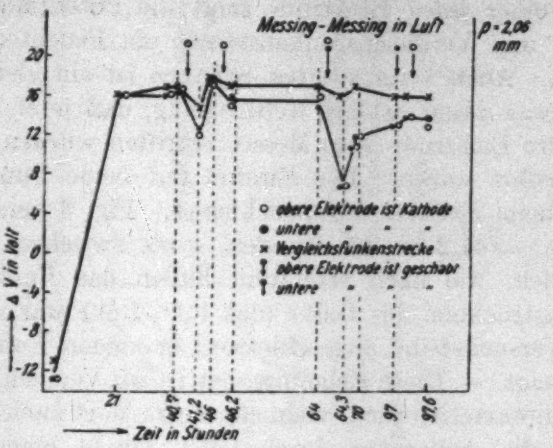


Fig. 3.

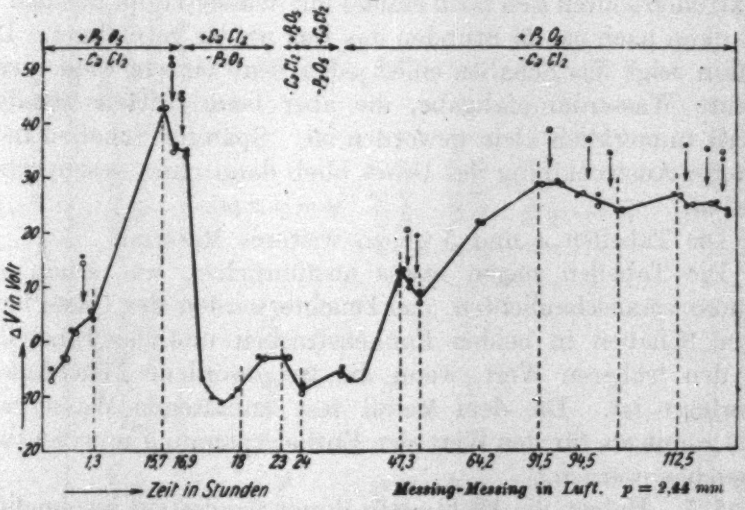


Fig. 4.

eingetragen, sondern die Differenz ΔV der hier gefundenen Entladespannung gegen einen Normalwert bei gleichem Druck, und als Normalkurve diente die Druck-Spannungskurve von Edgar Meyer[1]), aufgenommen bei einem reproduzierbaren

1) Edgar Meyer, I.

mittleren Feuchtigkeitsgehalt. Positive Werte für ΔV entsprechen einerseits trocknem, anderseits sehr feuchtem Gas, Null und negative Werte mittlerem Wasserdampfgehalt.

Wir entnehmen der Figur 3 folgendes: Nach dem ersten Schaben einer *jeden* Elektrode zeigt die Potentialänderung in der Meß- und Vergleichsfunkenstrecke ein Feuchterwerden des Gases an. Auch beim zweiten Schaben ist ein gleiches zu bemerken, was damit erklärt werden mag, daß jetzt noch Randpartien der Elektrode vom Messer ergriffen wurden, die vorher nicht berührt waren. Der Einfluß auf beide Funkenstrecken ist aber beim zweiten Schaben kleiner. Fig. 3 veranschaulicht zwischen $t = 41{,}2$ bis 46 Stunden, sowie zwischen $t = 64{,}3$ bis 97 Stunden, wie nach erfolgtem Fallen das Funkenpotential durch Austrocknen des Gases (das P_2O_5-Rohr war während der ganzen Versuchsreihe angeschlossen) in beiden Funkenstrecken wieder steigt. — Diese Erholungszeit ist im Versuch der Fig. 4[1]) nicht abgewartet worden, vielmehr wurde dort nach dem dritten Schaben die Apparatur durch $CaCl_2$ feucht gemacht — die Elektroden sollten sich noch einmal mit Wasserdampf beladen — und dann nach ca. 25 Stunden das Gas wieder getrocknet. Daraufhin zeigt das Schaben einer jeden Seite einzeln wieder eine erneute Wasserdampfabgabe, die aber beim dritten Schaben bereits unmerklich klein geworden ist. Späteres Schaben nach weiterer Austrocknung des Gases blieb dann ohne wesentlichen Einfluß.

Die Tabellen 4 und 5 geben weiteres Material.

Die Tabellen zeigen etwas ausführlicher, was schon die Figuren veranschaulichten, das Feuchterwerden des Gases beim ersten Schaben in beiden Funkenstrecken und das Einstellen auf den früheren Wert, wenn die freigewordene Feuchtigkeit absorbiert ist. Die dem Metall fest anhaftende Wasserhaut kann somit als für den Wert der Entladespannung unwesentlich angesehen werden.

§ 5. Haben die Elektroden durch mindestens zweimaliges Schaben eine vollständig saubere Oberfläche erhalten, so wird sich diese nach einer endlichen kleinen Zeit wieder mit einer Schicht, bestehend aus dem umgebenden Gas, beladen. Wie nun die Versuche des § 4 zeigen, spielt der Wasserdampf, falls das Gas nur trocken genug ist, bei dieser neuen Schicht keine

1) Hier wurde die Vergleichsfunkenstrecke nicht beobachtet.

Tabelle 4.

α) Trockner Ast in Luft.[1])

p in mm Hg	Elektrodenmaterial	Funkenpotential vor dem Schaben	geschabte Seite	Änderung durch das Schaben	Abklingung	Vergleichsfunkenstrecke nicht angeschlossen
2,49	Messing-Messing	420 Volt	*A*	− 10 Volt	nach 19 Std. + P_2O_5 420 Volt	
			B	− 7		
			A	0		
			B	0		
			A	0		
			A	0		
2,47	Messing-Messing	400	*A* und *B*	− 10	nach 3 Std. + P_2O_5 399 Volt	
			A und *B*	− 3		

p in mm Hg	Elektrodenmaterial	Funkenpotential vor dem Schaben	geschabte Seite	Änderung durch das Schaben	Abklingung	Vergleichsfunkenstrecke vor dem Schaben	Vergleichsfunkenstrecke Abfall	Vergleichsfunkenstrecke Abklingung
2,39	Messing-Messing	419	*A* und *B*	− 7	—			
			A und *B*	− 1				
2,52	Zn — Zn	401	*A* und *B*	− 8	nach 16 Std. + P_2O_5 400 Volt	398 Volt	− 5 Volt	nach 16 Std. + P_2O_5 399 Volt
			A und *B*	− 1			0	
2,79	Zn — Al	402	Al	− 4	—	409	− 2	—
			Zn	− 2			− 2	

1) Die Kurve: Funkenpotential in Luft als Funktion des Wasserdampfgehaltes zeigt ein Minimum (Edgar Meyer II). Mit „trocknem Ast" bzw. „feuchtem Ast" wird derjenige Teil der Kurve bezeichnet, bei dem das Funkenpotential mit wachsendem Feuchtigkeitsgehalt ab- bzw. zunimmt.

Tabelle 4 (Fortsetzung).

β) Feuchter Ast in Luft (Apparatur mit $CaCl_2$ verbunden)

p in mm Hg	Elektrodenmaterial	Funkenpotential vor dem Schaben	geschabte Seite	Änderung durch das Schaben	Abklingung	
1,60	Messing-Messing	341 Volt	*B*	+ 5 Volt	2Std. + P_2O_5 341 Volt	Vergleichsfunkenstrecke nicht angeschlossen
0,91	Messing-Messing	355	*B*	+ 5	3Std. + P_2O_5 353 Volt	
0,79	Messing-Messing	355	*A*	+ 7	—	Vergleichsfunkenstrecke: Potential vor dem Schaben 385 Volt; Änderung durch das Schaben + 5 Volt
			B	+ 5		0
2,77	Al — Ag	375	Ag	+ 15	—	
			Ag	0		

Rolle mehr. Weiteres Schaben wird dann das Metall wieder gasfrei machen, und ein schnelles Messen nach erneuter Herstellung einer frischen Oberfläche könnte nachweisen, ob das reine Metall ein anderes Funkenpotential besitzt als das mit ganz trocknem Gas beladene. Fig. 3 sowie die Tabellen 4 *a*, 5 und auch die folgende Tabelle 6 zeigen jedoch keine weitere Änderung der Entladespannung mehr an. Möglich ist, daß die Gasbeladung (oder Oxydschicht) keinen Einfluß auf das Funkenpotential ausübt, möglich aber auch, daß es doch der Fall ist, daß nur die Gashaut bei dem hier herrschenden Drucke sich schneller ausbildet, als es die Messungen nachzuweisen erlauben (ca. 1,5 bis 2 Minuten). Die sehr schnelle Wiederherstellung der Gasschicht scheint wahrscheinlich. Nach Messungen von Hallwachs[1]), ange-

1) Hallwachs, Phys. Zeitschr. **21**. S. 561. 1920.

Tabelle 5.

Schaben in Stickstoff.[1])

p in mm Hg	Gaszustand	Meßfunkenstrecke					Vergleichsfunkenstrecke		
		Elektrodenmaterial	Potential vor dem Schaben	geschabte Seite	Änderung durch das Schaben	Abklingung	Potential vor dem Schaben	Änderung durch das Schaben	Abklingung
2,57 N_2 + 4% O_2	trocken	Ag-Zn	377 Volt	Ag	− 6 Volt	14 Std. + P_2O_5 379 Volt	377 Volt	− 4 Volt	14 Std. + P_2O_5 378 Volt
2,50	trocken	Ag-Ag	373	*A* u. *B*	− 5	—	—	—	—
				B	0				
2,58	trocken	Al-Messing	360	Messing	− 7	1 Std. + P_2O_5 360 Volt	—	—	—
				Al	− 5				
2,61	etwas feuchter	Al-Messing	336	Messing	− 11				
				Al	− 5				
				Al	0	—	—	—	—
				Messing	0				

1) Die Abhängigkeit des Funkenpotentials vom Feuchtigkeitszustand ist in Stickstoff die gleiche wie in Luft. Der Beweis dafür soll in einer folgenden Arbeit erbracht werden.

stellt, um den lichtelektrischen Effekt in seiner Abhängigkeit von der Gasbeladung der Elektrodenoberfläche zu untersuchen, bildet sie sich bei Atmosphärendruck fast momentan aus, also bei dem hier herrschenden Druck von ca. 2 mm sicherlich ebenfalls sehr schnell. Auch berechnet Debye[1]), daß eine Gashaut, sowohl aus Dipol- als aus Quadrupolmolekülen bestehend, mit einer ungeheuer großen Kraft vom Metall festgehalten wird, was ebenfalls für schnelle Bildung der Oberflächenschicht spricht. Um Funkenpotentiale gasfreier Metalle bestimmen zu können, müßte man demnach eine Methode ausarbeiten, die ein erheblich schnelleres Arbeiten ermöglicht.

Tabelle 6.

Weiteres Schaben[2]) bleibt ohne Einfluß.

Meßfunkenstrecke					Vergleichsfunkenstrecke	
p in mm Hg	Material	Potential vor dem Schaben	geschabte Seite	Änderung durch das Schaben	Potential	Änderung durch das Schaben
2,44	Messing in Luft	405	*B*	0	—	—
			B	− 2		
			A	− 2		
			A und B	− 1		
2,58	Ag-Zn in N_2	350	Ag	− 1	—	—
			Ag	− 1		
			Ag	+ 1		
2,55	Ag-Ag N_2+4% O_2	320	*B*	0	306	0
			A	0		0
2,58	Messing-Al in N_2	320	Al	+ 2	310	0
			Messing	0		0

§ 6. Ganz anderes Verhalten als das in § 5 beschriebene, zeigen Zn-Elektroden, die in Stickstoff geschabt werden. Das Funkenpotential steigt gleich nach dem Schaben um ca. 10 bis 12 Volt und fällt nach einigen Stunden wieder auf den Anfangswert zurück, eine Erscheinung, die sich im Gegensatz zu § 4 beliebig oft reproduzieren läßt. Es zeigt sich ferner hierbei, daß nur die geschabte *Kathode* das Potential ändert. Ein Schaben der Anode ist ohne jeden Einfluß. Dies ist ein prinzipiell anderes Verhalten als die in § 4 behandelte Erscheinung. Dort veränderte der frei werdende Wasserdampf das Gas und

1) P. Debye, Physica. 1. S. 362. 1921.

2) Bei den in Tabelle 6 angeführten Versuchen war vorher schon mindestens zweimal geschabt worden.

bewirkte darum eine Änderung der Entladespannung sowohl in Anoden- als auch in Kathodenstellung der geschabten Elektrode sowie eine Änderung in der Vergleichsfunken trecke. Hier bleibt die Vergleichsfunkenstrecke ganz unbeeinflußt, sobald erst einmal die Feuchtigkeit von der Zn-Elektrode entfernt ist, und die Meßfunkenstrecke erhält, falls nur eine Elektrode geschabt ist, einen polaren Charakter, wobei die Kathode den Ausschlag gibt. Ich glaube darum, daß es sich hier um einen wirklichen Metalleffekt handelt. Diese Aussage sei an den Figuren 5—7 erläutert.

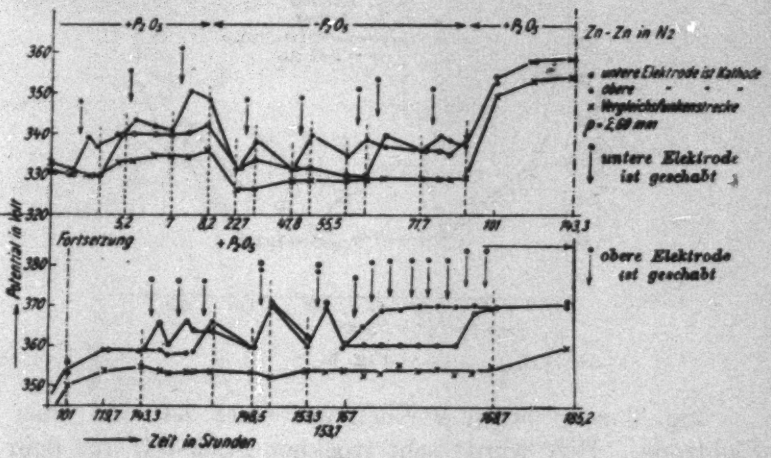


Fig. 5.

Fig. 5 gibt eine Versuchsreihe mit 2 Zn-Elektroden in sauerstoffreiem Stickstoff. Wenige Minuten nach dem Nachschleifen der Oberflächen waren die Zn-Elektroden in das Meßgefäß eingesetzt, und die Apparatur wurde darauf $^1/_2$ Tag lang unter gutem Vakuum bei Verbindung mit P_2O_5 gehalten. Der dann aus dem Trockenreservoir eingelassene Stickstoff war an nicht behandelten Glasteilen vorbeigestrichen, besaß also mittleren Feuchtigkeitsgehalt. Die Konstanz des Potentials in der Vergleichsfunkenstrecke beim ersten Schaben bringt dies auch zum Ausdruck. Sechsmal wird nun die untere Elektrode geschabt, das Funkenpotential steigt regelmäßig an, wenn die geschabte Seite die Kathode bildet, ist sie Anode, so ist ihr Gang ungefähr parallel dem der Vergleichsfunkenstrecke, d. h. richtet sich nach dem Wasserdampfgehalt des Stickstoffs. Von nun ab werden die zwei Seiten abwechselnd geschabt, mit dem

gleichen Resultat, daß die geschabte Kathode die Höhe der Entladespannung bestimmt. Die Abklingungsdauer des Schabeeffektes beträgt ca. 2 Stunden. Im letzten Teil der Versuchsreihe sieht man, wie ungefähr 10 Volt einen für diese Druckverhältnisse nicht übersteigbaren Endwert darstellen, hier wurde nicht auf das Abklingen des Effektes gewartet, sondern zwischen je zwei Messungen ein Schaben eingeschaltet. Für die untere wie für die obere Seite ist nach zweimaligem Schaben die Enderhöhung von etwa 10 Volt erreicht.

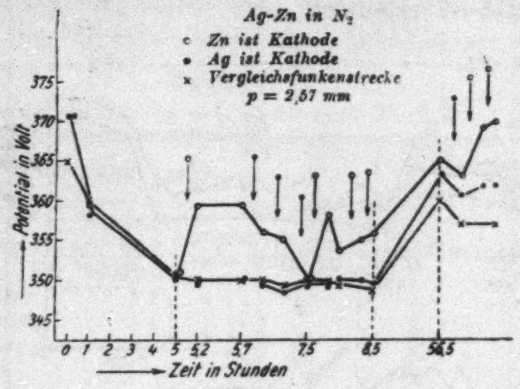


Fig. 6.

Fig. 6 zeigt einen Versuch mit einer Zn- und einer Ag-Elektrode. Hier wurde sehr trockner Stickstoff aus dem Reservoir in die Apparatur gelassen, deren nicht behandelte Glasteile durch vorhergegangenes Offenstehen der Apparatur an der feuchten Zimmerluft (ca. 80 Proz. Feuchtigkeitsgehalt) einige Feuchtigkeit aufgespeichert hatten. Das Fallen des Funkenpotentials in Meß- und Vergleichsfunkenstrecke zeigt an, wie der Stickstoff allmählich feuchter wird, bis er nach ca. 5 Stunden einen mittleren Feuchtigkeitsgehalt besitzt. Wiederholtes Schaben beider Elektroden während der nächsten $3^1/_2$ Stunden ruft in der Vergleichsfunkenstrecke keine Änderung hervor, ein Zeichen, daß der Feuchtigkeitsgehalt gerade etwa dem Minimum des Potentials entsprach (in der Kurve die das Potential in seiner Abhängigkeit vom Feuchtigkeitsgehalt wiedergibt); nachdem später die Apparatur 48 Stunden lang von $t = 8{,}5$ bis $t = 56{,}5$ in Verbindung mit P_2O_5 gestanden hatte, was ja, wie oben gezeigt wurde, austrocknend auf das Gas, nicht aber in gleichem Maß auf die Elektrodenoberflächen wirkt, sieht man

im Potential der Vergleichsfunkenstrecke das Feuchterwerden des Gases beim Schaben der Ag-Elektrode. — In der Meßfunkenstrecke hingegen beobachten wir in allen Fällen, wie die Entladespannung steigt, wenn die Zn-Elektrode geschabt und zur Kathode der Funkenstrecke gemacht ist, keine Änderung tritt ein, wenn die geschabte Zn-Elektrode Anode ist, ebensowenig, wie wenn die Ag-Elektrode geschabt wird. Dies Steigen des Potentials für die Zn-Kathode tritt ein sowohl zuerst beim mittleren Feuchtigkeitsgehalt als auch bei der dann folgenden Trockenheit.

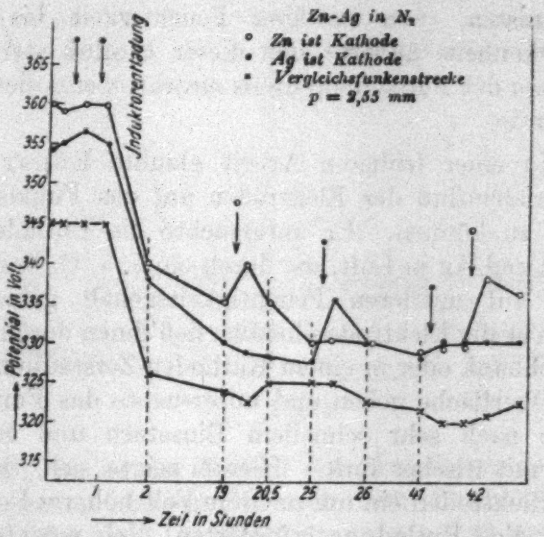


Fig. 7.

Im Versuch, den Fig. 7 darstellt, Zn und Ag in N_2, waren die Zn- und die Ag-Elektrode durch vorhergehendes Schaben wasserfrei gemacht. Die Apparatur war dann gut evakuiert und neu mit Gas gefüllt, jedoch nicht geöffnet worden. So ändert auch zweimaliges Schaben des Silbers nichts am Potential der Vergleichsfunkenstrecke, wenig an dem des Meßapparates. Nun wird durch Kathodenzerstäubung (Glimmentladung zwischen den Elektroden nach Herausnahme des Ringes), dem Ag eine dünne Zn-Schicht überlagert, worauf diese Elektrode auch das charakteristische Verhalten einer Zn-Elektrode annimmt und beim ersten Schaben (bei $t = 25$) das Potential

in Kathodenstellung steigen läßt. Beim zweiten Schaben (bei $t = 41$) ist alles Zn fortgekratzt, die Elektrode wirkt wieder als Silber-Kathode.[1])

Spätere Versuche zeigten, daß für diese Erscheinung der Stickstoff nicht absolut Sauerstoff-frei zu sein brauchte, Stickstoff mit ca. 4 Proz. O_2 verunreinigt, zeigte gleiches Verhalten.

Al oder Messing mit Zn zu einem Elektrodenpaar vereinigt, verhielten sich nach Kathodenzerstäubung wie Ag.

Für Zn-Kathoden in Stickstoff existiert also sicher ein Einfluß der dem Metall adhärierenden Oberflächenschicht auf das Funkenpotential. Bei den hier untersuchten Feuchtigkeitsverhältnissen, (von mittlerer Feuchtigkeit bis zu sehr großer Trockenheit) äußerte sich dieser Einfluß stets so, daß eine *Erhöhung* des Funkenpotentials eintrat, wenn diese Schicht entfernt wurde.

§ 7. In einer früheren Arbeit glaubte Edgar Meyer[2]) einen Materialeinfluß der Elektroden auf das Funkenpotential nachweisen zu können. Er untersuchte die Entladespannung für Messing und Ag in Luft, die durch ein a. a. O. beschriebenes Spülrezept auf mittleren Feuchtigkeitsgehalt gebracht war. Dann nahm er die Elektroden heraus, ließ ihnen durch Abdrehen auf der Drehbank oder in einem Kathoden-Zerstäubungsapparat eine neue Oberfläche geben und untersuchte das Funkenpotential wieder nach sehr schnellem Einsetzen und Spülen der Apparatur mit frischer Luft. Hierbei zeigte sich, daß die abgedrehten Elektroden ein um mehrere Volt höheres Potential für die selbständige Entladung erforderten. Ich möchte der Vermutung Ausdruck geben, daß sich dem eigentlichen Materialeinfluß hier ein sehr viel größerer Feuchtigkeitseinfluß überlagert hat[3]), auf Grund folgender Beobachtungen:

Ich habe einerseits die Abdrehversuche nach demselben Verfahren mit dem auch von Meyer verwendeten Entlade-

1) Kathodenzerstäubung bewirkt regelmäßig einen enormen Abfall des Funkenpotentials in beiden Funkenstrecken. Der Grund dafür (Bildung einer Stickstoff-Sauerstoff-Verbindung?) soll in einer späteren Arbeit festgestellt werden. Hier möge dieser Abfall unberücksichtigt bleiben, da er zwar die Absolutwerte des Potentials, nicht aber den Gang innerhalb eines Versuches änderte.

2) Edgar Meyer, Mitt. d. Phys. Ges. Zürich. Nr. 19, S. 70. 1919.

3) E. Meyer gibt in seiner späteren Arbeit (Ann. d. Phys. 65. S. 367. 1921) selbst diese Möglichkeit an.

gefäß (V) wiederholt, habe aber dabei gleichzeitig die parallel geschaltete Funkenstrecke (S) beobachtet. Andererseits habe ich die Elektroden einfach aus dem Apparat genommen, sie einige Minuten an der Luft liegen lassen und dann, nach sehr schnellem Einsetzen wieder den Gang beider Funkenstrecken aufgenommen. Fig. 8 gibt beide Teile des Versuches wieder.

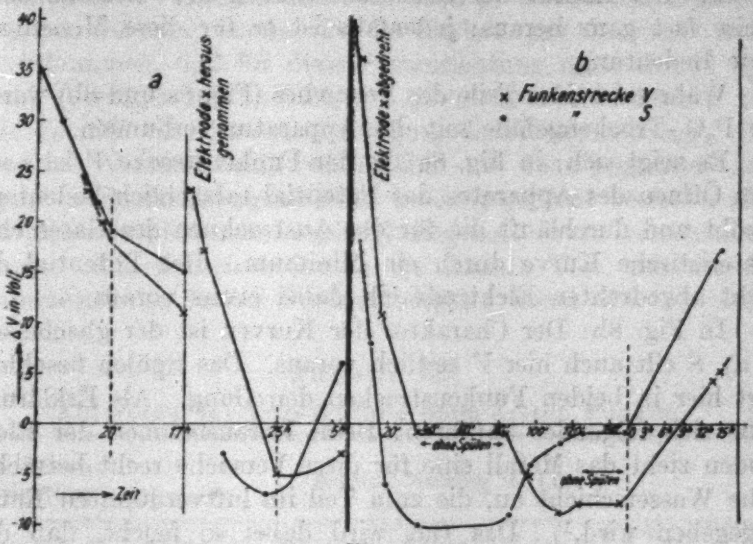


Fig. 8.

In Fig. 8a ist der Verlauf der Entladespannung in beiden Funkenstrecken dargestellt nach dem Zusammensetzen des Apparates von $t = 0$ bis $t = 17$ Stdn. ($p = 2{,}42$ mm Hg). Dann wurde ein Elektrodenpaar ($\times$) herausgenommen, blieb 5′ lang an der Luft liegen und wurde wieder eingesetzt. Nach viermaligem Spülen mit frischer Luft wurde ungefähr der alte Druck wieder eingestellt ($p = 2{,}53$ mm Hg) und der Gang des Funkenpotentials beobachtet.

In Fig. 8b sollten möglichst genau die Verhältnisse reproduziert werden, die bei Meyers Versuchen mit neuen Metalloberflächen vorgelegen hatten. Nach Öffnen der Apparatur wurde ein Elektrodenpaar ($\times$) auf der Drehbank abgedreht, 5′ später mit den neuen Messungen begonnen. Dabei wurde hier auch wie bei Meyers Versuchen, vor jeder Messung — wo in der Figur nicht anders angegeben — die Apparatur 3 $\times$ mit frischer Luft gespült. Die nach dem Spülen eingestellten

Drucke schwanken zwischen 2,4 und 3,0 mm Hg (nur die beiden letzten steigen auf 3,5 bzw. 3,3 mm Hg). Konstanter Druck herrscht also während dieser Meßreihe (Fig. 8b) nicht, dafür ist jedoch, wie auch früher, als Ordinate nicht der Absolutwert des Potentials gewählt, sondern die Differenz ΔV gegen den Normalwert bei dem gleichen wie dem hier eingestellten Druck. Der Einfluß der Druckschwankung hebt sich auf diese Weise fast ganz heraus; jedenfalls ist er für diese Messungen ohne Bedeutung.

Während beider Teile des Versuches (Fig. 8a und 8b) waren die P_2O_5-Trockengefäße mit der Apparatur verbunden.

Es zeigt sich: in Fig. 8a: In der Funkenstrecke V ist nach dem Öffnen des Apparates das Potential tatsächlich bedeutend erhöht und durchläuft die für das Austrocknen des Gases charakteristische Kurve durch ein Minimum. Das Potential der nicht abgedrehten Elektrode eilt dabei etwas voraus.

In Fig. 8b: Der Charakter der Kurven ist der gleiche wie in a), S eilt auch hier V zeitlich voraus. Das Spülen beschleunigt hier in beiden Funkenstrecken den Gang. Als Erklärung ließe sich folgendes anführen: Beim Herausnehmen der Elektroden zieht das Metall eine für diese Versuche recht beträchtliche Wasserschicht an, die zum Teil im luftverdünnten Raum abgegeben wird.[1]) Das Gas wird dabei so feucht, daß das Funkenpotential um ca. 40 Volt steigt. Da der Wasserdampf auf dem herausgenommenen Elektrodenpaar sitzt, so ist in dem Entladungsrohr V die Quelle der Feuchtigkeit, und V trocknet darum langsamer aus als S. Was also bei Meyer als Materialeinfluß angesehen wurde, scheint mir der Einfluß der Wasserdampfschicht zu sein, die sich auf dem Metall niederschlug, während die Elektroden aus der Werkstatt durch die feuchten Kellerräume des Instituts in das Arbeitszimmer zurückgebracht wurden.

§ 8. Bekanntlich gibt es zwei Arten von Funkenverzögerung. Die eine[1]) tritt bei jeder Entladung ein und kann

---

1) Auch aus Versuchen von E. Cohnstaedt: „Beobachtungen über die Wasserhaut von Glas und Metallen und über ihren Einfluß auf Druck und Elektrizitätsleitung in Vakuumröhren“ (herausgeg. von St. Sachs, Leipzig 1912) folgt, daß Metalle eine Wasserdampfschicht anziehen können, die sie im Vakuum wieder abgeben.

2) E. Warburg, Sitzungsber. Akad. Berlin. S. 223. 1896.

fast vollständig aufgehoben werden, wenn das Gas in der Funkenstrecke künstlich ionisiert wird, was hier durch Bestrahlen mit einem Ra-Präparat erreicht wurde. Die zweite Art von Verzögerung[1]) beobachtet man fast regelmäßig, wenn die Apparatur einige Stunden lang unbenutzt gestanden hat, und zwar nur beim *ersten* Funken. Beim zweiten ist sie meist schon unmerklich klein. Kommutiert man nach 4—6 Funkenübergängen die Stromrichtung, macht also die Kathode zur Anode, so kann es vorkommen, daß für diese Stromrichtung noch einmal eine solche Verzögerung auftritt, die aber fast stets kleiner ist. Tab. 7a gibt eine Zusammenstellung dieser Erscheinung. Die einzelnen Versuche sind willkürlich aus dem gesamten vorliegenden Beobachtungsmaterial herausgegriffen, beziehen sich also auf verschiedenen Feuchtigkeitsgehalt sowie verschiedene Drucke. Die Zahlen bedeuten die Anzahl Volt, um die die Spannung beim ersten Funkenübergang höher war als beim zweiten.

Tabelle 7a.

Auftreten der Verzögerung beim ersten Funken.

in Stromrichtung	Messing-Messing in Luft													
A nach *B*	20	24	35	32	30	40	35	14	17	14	25	0	35	0	9
darauf *B* nach *A*	11	0	7	0	0	0	0	7	0	10	10	8	7	0	0

in Stromrichtung	Zn-Zn in Stickstoff								
A nach *B*	12	14	11	0	0	0	32	20	7
darauf *B* nach *A*	0	6	0	0	0	3	0	4	0

Diese Verzögerung stellte sich wieder ein, nachdem beide oder auch nur eine der Elektroden geschabt waren. Einen Unterschied, ob die geschabte Seite Kathode oder Anode war, konnte ich hierbei nicht bemerken.

Tab. 7b gibt eine Zusammenstellung aus den gleichen Versuchsreihen, die in 7a benutzt sind, für den ersten Funken *direkt nach dem Schaben* und nach dem ersten Kommutieren der Stromrichtung.

1) Faraday, Experimental Researches § 1417.

Tabelle 7b.

Auftreten einer Verzögerung nach dem Schaben.

in Stromrichtung	Messing-Messing in Luft														
A nach *B*	13	5	3	12	13	15	12	11	10	7	7	48	42	4	20
darauf *B* nach *A*	10	0	8	0	0	6	0	0	0	0	0	0	6	4	0

in Stromrichtung	Zn-Zn in Stickstoff								
A nach *B*	9	5	0	14	12	0	0	20	18
darauf *B* nach *A*	0	0	7	0	13	0	0	7	3

Der Grund für das erneute Auftreten der Funkenverzögerung zweiter Art scheint in der durch das Schaben veränderten Oberflächenbeschaffenheit der Elektroden gesucht werden zu müssen; jedenfalls bildet sich diese Verzögerung *nicht* schon wieder aus, wenn die Elektroden, wie hier während des Schabens, nur höchstens 20′ lang spannungslos standen. Zur Wiederbildung der Verzögerung ohne Schaben bedarf es, wie oben erwähnt, einiger Stunden. Die Vergleichsfunkenstrecke *V*, die wie *S* während des Schabens, also gleich lange Zeit, ohne Spannung stand, zeigte nämlich in keinem Falle eine neue Funkenverzögerung, und wurde von der Meßfunkenstrecke *S* die Spannung für kurze Zeit, (10′—45′) abgenommen, so war auch hier keine Verzögerung des ersten Funkens zu konstatieren. Erst von ca. 1 Stunde an scheint sie in ganz kleinen Beträgen sich wieder bemerkbar zu machen. Die Tab. 8a und 8b zeigen dies; auch diese Versuche beziehen sich auf verschiedene Drucke und Feuchtigkeitszustände.

Tabelle 8a.

Verzögerung der Vergleichsfunkenstrecke

Zeit ohne angelegte Spannung	55′	12′	35′	16′	16′	27′	25′	25′	15′	12′	12′	11′	9′	12′	13′	20′	12′
Verzögerung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 8b.

Verzögerung in der Meßfunkenstrecke

Zeit ohne angelegte Spannung	30′	25′	30′	20′	12′	40′	40′	30′	26′	10′	21′	33′	20′	36′	45′	40′
Verzögerung in Richtung $A \to B$	0	0	2	0	0	1	1	2	1	0	1	0	0	0	0	1
darauf $B \to A$	0	1	0	0	3	0	0	0	2	0	1	0	2	0	0	0

Zeit ohne angelegte Spannung	2h	2h 45′	2h	1h 5′	2h 10′	1h 15′	2h 20′	1h 45′	2h 50′	3h	4h	4h 35′	4h 40′
Verzögerung in Richtung $A \to B$	5	15	9	5	4	4	5	12	12	4	14	17	8
darauf $B \to A$	0	0	2	2	3	5	0	0	0	5	12	6	0

Diese Beobachtungen zeigen, daß die zweite Art der Verzögerung nicht wie die ersterwähnte ihre Begründung in einem zufällig vorhandenen Zustand des Gases hat, sondern jedenfalls mit der Oberflächenbeschaffenheit der Elektroden zusammenhängt. Ob sich beim Funkenübergang eine vielleicht flüchtige Metall-Gasverbindung bildet, oder welches sonst die Ursachen sein mag, müssen spätere Untersuchungen lehren.

Zusammenfassung.

§ 9. 1. Es wird ein Apparat angegeben, mit dem es möglich ist, den planparallelen Elektroden einer Funkenstrecke im Vakuum durch mechanisches Schaben eine neue Oberfläche zu geben.

2. Eine Reihe von Schutzmaßregeln wird beschrieben, die vor allem den Zweck verfolgen, störende Feuchtigkeitsänderungen des Gases zu vermeiden. Ein besonderer Kontrollversuch galt der Frage, ob sich an der Wandung des Ringes zwischen den Elektroden eine den Funken beeinflussende elektrische Ladung ausbildet.

3. Die Wasserschicht, die fest an den Elektrodenoberflächen haftet und sich auch im Vakuum nicht löst, übt auf das Funkenpotential *keinen* Einfluß aus. Erst wenn der Wasserdampf durch Abschaben entfernt ist und sich dadurch dem Gas mitteilt, ist er am Feuchterwerden des Gases im Gang des Funkenpotentials zu konstatieren.

4. Weiteres Erneuern der Oberfläche bleibt ohne Einfluß auf den Wert der Entladespannung, sei es, daß solch ein Einfluß

nicht besteht, oder daß die Oberfläche sich schneller wieder mit einer Gas- oder Oxydschicht bedeckt, als es diese Versuchsanordnung festzustellen erlaubt. Die Versuche wurden angestellt mit Messing, Cu, Al und Ag in Luft und in Stickstoff.

5. Nur in einem Falle zeigt ein Metall mit neuer Oberfläche ein anderes Funkenpotential als mit alter Oberfläche. Es ist dies Zn, das in N_2 geschabt wird. Hierbei tritt der Einfluß des Schabens — Steigen des Funkenpotentials um ca. 10 bis 12 Volt — nur dann ein, wenn die geschabte Oberfläche Kathode, nicht wenn sie Anode ist.

6. Der Einfluß neuer Metalloberflächen läßt sich nicht in Versuchen konstatieren, bei denen die Elektroden während der Meßreihe mit feuchter Zimmerluft in Berührung kommen, wie es nötig ist, falls man sie auf der Drehbank abdreht. Sie bedecken sich dann mit einer Wasserdampfschicht, die sich teilweise loslöst, wodurch das Funkenpotential derartig beeinflußt wird, daß eine Überdeckung des gesuchten Effektes eintritt.

7. Die Funkenverzögerung, die auftritt, wenn die Elektroden mehrere Stunden unbenützt waren, stellt sich auch sofort wieder ein, wenn die Elektroden eine neue Oberfläche erhalten haben. Es läßt sich daraus schließen, daß diese Art der Verzögerung mit der Oberflächenbeschaffenheit der Elektroden zusammenhängt, im Gegensatz zu der gewöhnlichen Funkenverzögerung, die ihre Ursache im Gase selbst hat.

Diese Arbeit ist ausgeführt im Physikalischen Institut der Universität Zürich. Herrn Prof. Dr. Edgar Meyer bin ich sowohl für die Anregung als auch für sein stetes förderndes Interesse zu größtem Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 19. August 1922.)

4. *Über den Einfluß von geringen Mengen Wasserdampf auf das Funkenpotential in Stickstoff;* *Hildegard Stücklen.*

Die Messungen der vorangehenden Arbeit machten es notwendig, den Einfluß von Wasserdampfspuren auf das Funkenpotential in Stickstoff kennen zu lernen. Außerdem war es nicht ohne Interesse, die Versuche, die bisher nur in Luft ausgeführt waren,[1]) durch solche in einem reinen Gas zu ergänzen, da ja bei Vorgängen, die auf Stoßionisation beruhen, reine Gase sich oft ganz anders verhalten als Gasgemische.

Der Stickstoff wurde durch Pyrogallol und glühendes Cu möglichst von Sauerstoff freigemacht und in einem mit P_2O_5 gefüllten Trockenreservoir aufgehoben. Allerdings zeigte Warburg[2]), daß man auf diese Weise die letzten Reste Sauerstoff nicht entfernen kann. Vollkommene Reinheit erhielt er, indem er Stickstoff in Verbindung brachte mit metallischem Na, das durch die Glaswände bei höherer Temperatur in das Gefäß elektrolytisch eingeführt wurde. Dieser sehr saubere Stickstoff zeigt für das Kathodengefälle erheblich niedrigere Werte als der auf übliche Weise gereinigte. Für das Funkenpotential sind Versuche mit auf diese Art gereinigtem Na nicht ausgeführt.

Im übrigen ist die Versuchseinrichtung die nämliche wie sie in der vorhergehenden Arbeit beschrieben wurde, nur wurde mit einer Funkenstrecke allein gearbeitet.

Größere Mengen Wasserdampf wurden in die Apparatur dadurch eingeführt, daß diese mit einem Rohr verbunden wurde, das $CaCl_2$ enthielt.[3]) Geringere Feuchtigkeitsgrade wurden durch Abschließen aller P_2O_5-Trockenröhren erzeugt.[4])

Das Resultat der Messung ist: Es wurde die gleiche Ab-

1) Edgar Meyer, Ann. d. Phys. **65.** S. 335. 1921.
2) E. Warburg, Ann. d. Phys. **40.** S. 6. 1890.
3) H. Stücklen, Ann. d. Phys. **65.** S. 369. 1921.
4) Edgar Meyer, a. a. O.

hängigkeit des Funkenpotentials von der Feuchtigkeit in Stickstoff gefunden, wie sie Meyer (a. a. O.) für Luft gefunden hat.

Da die Meßmethode hier nichts Neues bringt, und alle aufgenommenen Kurven übereinstimmend das gleiche Bild geben, möge es genügen, das Meßergebnis an Hand von zwei graphischen Darstellungen zu erläutern.

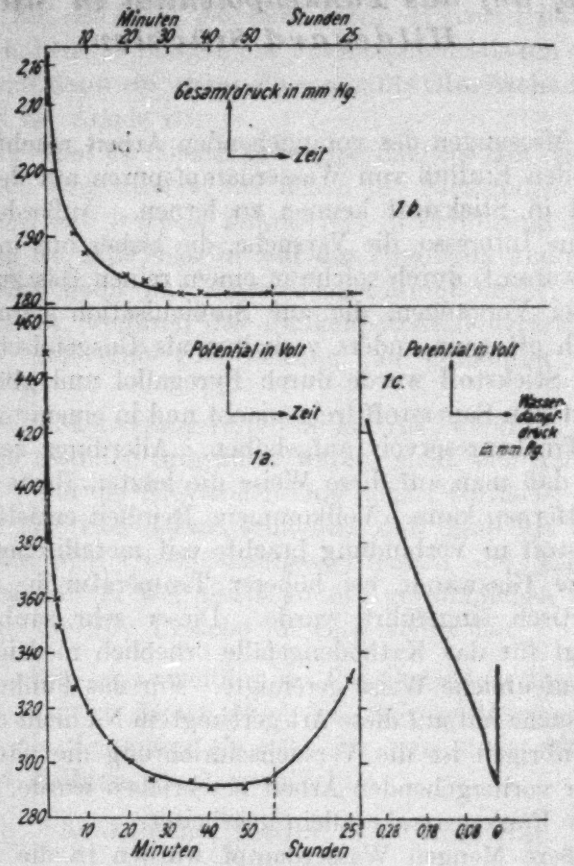


Fig. 1.

Im Versuch, den Fig. 1 wiedergibt, war einen kurzen Augenblick lang Wasserdampf vom $CaCl_2$-Rohr her in das Meßgefäß geleitet und dann die Apparatur mit P_2O_5 verbunden worden. Fig. 1a zeigt, wie das Funkenpotential sich während dieser Austrocknung des Gases zeitlich ändert; der Gang mit dem Minimum ist der gleiche wie in der Luft.

Am Manometer konnte hierbei die Verminderung des

Wasserdampfdruckes verfolgt werden, der Druckabfall als Funktion der Zeit ist in Fig. 1b wiedergegeben.

Trägt man endlich das Funkenpotential auf als Funktion des aus Fig. 1b bestimmbaren Wasserdampf-Partialdruckes, so erhält man das Bild der Fig. 1c. Auch hier ist, wie in Luft vom Minimum an auf dem „trocknen Ast", die Dampfmenge so gering, daß sie mit dem McLeod-Manometer, das $^1/_{100}$ mm abzulesen ermöglichte, nicht mehr festzustellen ist.

Dieser Gang während des Austrocknens der Apparatur, jenseits des Minimums auf dem „trocknen Ast", ist nach einem anderen Versuch noch einmal in Fig. 2 wiedergegeben.

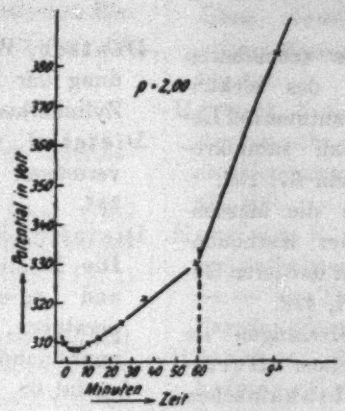


Fig. 2.

Man sieht, wie auch hier bei genügender Austrocknung die Entladespannung sehr hohe Werte annehmen kann. Von 308 Volt im Minimum steigt sie bis 384 Volt, wenn das Gas genügend getrocknet ist.

Zur endgültigen Bestimmung von Funkenpotentialen wird man also auch in Stickstoff außerordentlich auf einen möglichst geringen und reproduzierbaren Feuchtigkeitsgehalt zu achten haben.

Diese Untersuchung wurde im Anschluß an die vorangegangene Arbeit im Physikalischen Institut der Universität Zürich ausgeführt. Herrn Prof. Dr. Edgar Meyer spreche ich für sein stetes förderndes Interesse meinen besten Dank aus.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 19. August 1922.)

Namenregister zum Jahrgang 1922.

B.

Bär, R., Über die scheinbaren Unterschreitungen des elektrischen Elementarquantums bei Ladungsmessungen an submikroskopischen Partikeln 67, 157.

Becker, A., Über die Massenproportionalität der Kathodenstrahlabsorption bei mittleren Geschwindigkeiten 67, 428.

Bergmann, L., Messungen im Strahlungsfelde eines Hertzschen und eines Abrahamschen ungedämpften Erregers 67, 13.

Borelius, G., Über eine neue Art von Umwandlungen im Eisen. (Zweite Mitteilung) 67, 236. — Zur Theorie einer neuen Umwandlungserscheinung in Metallen 68, 67.

Borelius, G. und F. Gunneson, Über eine neue Art von Umwandlungen in Eisen. (Erste Mitteilung) 67, 227.

Born, F., Über Dampfdruckmessungen an reinem Argon 69, 473.

Bucherer, A. H., Gravitation und Quantentheorie 68, 1. — Gravitation und Quantentheorie. II 68, 545.

Byk, A., Zur Quantentheorie der Gase und Flüssigkeiten 69, 161.

D.

Deutsch, W., Bewegung und Ladung der Elektrizitätsträger im Zylinderkondensator 68, 335.

Dieterici, C., Das Refraktionsvermögen von Flüssigkeiten 67, 337.

Dieterle, R. und K. R. Koch, Die Elastizität einiger Metalle und Legierungen bis zu Temperaturen, die ihrem Schmelzpunkt naheliegen. B. Elastizitätsmodul 68, 441.

E.

Einstein, A., Bemerkung zu der Franz Selety schen Arbeit „Beiträge zum kosmologischen System" 69, 436.

Einstein, E., Zur Theorie des Radiometers 69, 241.

Eötvös †, R. v., Pekár, D. und Fekete, E., Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität 68, 11.

Esmarch, W., Eine Methode zur genauen Messung kleiner Widerstände 69, 255.

F.

Faxén, H., Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die

zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist 68, 89.

Fekete, E., Eötvös †, R. v. und Pekár, D., Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität 68, 11.

Fischer, V., Eine Differentialform der Zustandsgleichung bei hohem Druck 69, 315.

Frivold, O. E., Einfluß kleiner Mengen von Eisen auf die Suszeptibilität diamagnetischer Elemente. (Zweite Mitteilung) 68, 356.

G.

Gans, R., Theorie der Thermoionenströme 69, 385.

Gehrcke, E. und E. Lau, Über die Balmerserie des Wasserstoffs (zweite Mitteilung). (Hierzu Taf. I) 67, 388.

Geitel, H., Die Proportionalität von Photostrom und Beleuchtung an sehr dünnen Kaliumschichten 67, 420.

Gieseler, H., Serienzusammenhänge im Bogenspektrum des Chroms 69, 147.

Glaser, L. C., Über das Spektrum des Beryllium und eine bemerkenswerte Beziehung desselben zu dem des Aluminium. (Hierzu Tafel I) 68, 73.

Göggel, K., Über die lichtelektrische Wirkung bei den Erdalkalischwefelphosphoren 67, 301.

Großkinsky, O. und M. Trautz, Die Messung der spezifischen Wärme C_v von Gasen mittels der Differentialmethode. I. Mitteilung 67, 462.

Gudden, B. und R. Pohl, Über den ZnSCu-Phosphor 68, 154.

Gunneson, F. und G. Borelius, Über eine neue Art von Umwandlungen in Eisen. (Erste Mitteilung) 67, 227.

H.

Hallwachs, W. M. Sende und H. Simon, Bemerkung zu dem Referat in den Physikalischen Berichten über unsere Arbeiten über „Lichtelektrizität als Funktion des Gasgehaltes" 68, 551.

Harms, F. und H. Niebauer, Über einwellige Systeme mit gekoppelten Schwingungskreisen 68, 345.

Herweg, J. und G. Mie, Die Zahl der von sehr schwachen Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen 68, 120.

Herzfeld, K. F., Absolute Entropie und chemische Konstante 69, 54. — Zur Theorie des Kerr- und Faradayeffektes 69, 369.

Himstedt, F. und I. Wertheimer, Über den Einfluß des Druckes auf die Brechungsexponenten einiger organischer Flüssigkeiten 67, 395.

Hulshof, H., Über Spannungen und Drücke in Grenzflächen und Trennungsflächen eines Fluidums. Quellung 67, 278.

J.

Jaffé, G., Bemerkungen über die relativistischen Keplerellipsen 67, 212. — Grundriß einer Theorie des anisotropen Strahlungsfeldes 68, 583.

Johnson, J. B., Bemerkung zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt 67, 154.

Joos, G., Theorie des Elektronenröhrengenerators 69, 505.

K.

Kalähne, A., Einwellige, gekoppelte Schwingungssysteme 69, 439.

Kapzow, N., Über die Diffraktion Hertzscher Wellen in einem Raumgitter 69, 112.

Kartschagin, W., Über die selektive Absorption elektromagnetischer Wellen in Eisendrähten und über die magnetische Permeabilität des Eisens 67, 325.

Kirchner, F., Strukturuntersuchungen mit Röntgenstrahlen. (Hierzu Tafel 1) 69, 59.

Koch, K. R. und R. Dieterle, Die Elastizität einiger Metalle und Legierungen bis zu Temperaturen, die ihrem Schmelzpunkt naheliegen. B. Elastizitätsmodul 68, 441.

Kratzer, A., Die Gesetzmäßigkeiten der Bandensysteme 67, 127.

Krüger, F. und E. Marschner, Die Tonbildung bei Pfeifen mit kreisförmigem Spalt durch periodische Ablösung von Kreiswirbeln 67, 581.

Kulenkampff, H. und E. Wagner, Die Intensität der Reflexion von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge an Kalkspat und Steinsalz 68, 369.

Kulenkampff, H., Über das kontinuierliche Röntgenspektrum 69, 548.

L.

Lau, E. und E. Gehrcke, Über die Balmerserie des Wasserstoffs (zweite Mitteilung). (Hierzu Tafel I) 67, 388.

Lenard, P., Über die Lichtwirkung auf Zinksulfid 68, 553.

Lindman, K. F., Über die durch ein aktives Raumgitter erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen 69, 270.

M.

Marschner, E. und F. Krüger, Die Tonbildung bei Pfeifen mit kreisförmigem Spalt durch periodische Ablösung von Kreiswirbeln 67, 581.

Marx, E., Charakteristik und Theorie der Lautverstärkung in Entladungsröhren mit höherem Gasdruck 67, 77.

Meyer, E., Zur Deutung des Einflusses eines transversalen Magnetfeldes auf das Funkenpotential 67, 1.

Mie, G. und J. Herweg, Die Zahl der von sehr schwachen Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen 68, 120.

Mie, G., Träge und schwere Masse 69, 1.

Mohorovičić, S., Beziehungen zwischen den Lorentzschen und den Galileischen Transformationsgleichungen 67, 320.

Müller, K. E., Ein Beitrag zur Theorie der Elektrizitätsströmung in anisotropen Körpern 67, 201.

N.

Neuburger, M. C., Der Feinbau der Atomkerne und die Veränderung des Coulombschen Gesetzes im Innern der Kerne. I. Die Atomkerne von Lithium und Isohelium 68, 574.

Niebauer, H. und F. Harms, Über einwellige Systeme mit gekoppelten Schwingungskreisen 68, 345.

O.

Oldenberg, O., Zur Feinstruktur der Balmerserie 67, 69. — Die Feinstruktur der roten Wasserstofflinie und ihr Zeemaneffekt 67, 253.

Oseen, C. W., Die Einsteinsche Nadelstichstrahlung und die Maxwellschen Gleichungen 69, 202.

P.

Pauli jr., W., Über das Modell des Wasserstoffmolekülions 68, 177.

Pedersen, P. O., Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtenbergschen Figuren und ihre Verwendung zur Messung sehr kurzer Zeiten. (Hierzu Tafel II und III) 69, 205.

Pekár, D., R. v. Eötvös† und E. Fekete, Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität 68, 11.

Pohl, R. und B. Gudden, Über den ZnSCu-Phosphor 68, 154.

R.

Rasch, G., Über die Verwendung von Mehrphasensystemen höherer Ordnungszahl zur Fernübertragung elektrischer Energie 67, 359.

Romanoff, W., Über selektive Absorption elektrischer Wellen in Dielektrika 69, 125.

Rosenberg, J., Ein Beitrag zur Theorie der Lichtzerstreuung kugelförmiger Medien und Berechnungen für das nach zweimaliger Innenreflexion austretende Lichtbüschel. (Gekürzte Leipziger Dissertation) 68, 414.

S.

Schaefer, C., Über Gesetzmäßigkeiten ultraroter Spektren und ein Versagen der klassischen Dispersionstheorie 67, 407.

Schleede, A. und E. Tiede, Über mit seltenen Erdmetallen aktivierte Magnesiumsulfidphosphore. Experimentalstudie 67, 573.

Schottky, W., Zur Berechnung und Beurteilung des Schroteffektes. (Bemerkungen zu der Notiz von Hrn. J. B. Johnson) 68, 157. — Zur statistischen Fundamentierung der chemischen Thermodynamik 68, 481.

Seeliger, R., Über die Lichtemission der Glimmentladung 67, 352.

Seidel, W. und M. Trautz, Über die Lumineszenz zerfallenden Ozons 67, 527.

Selety, F., Beiträge zum kosmologischen Problem 68, 281.

Sende, M., W. Hallwachs und H. Simon, Bemerkung zu dem Referat in den Physikalischen Berichten über unsere Arbeiten über „Lichtelektrizität als Funktion des Gasgehaltes" 68, 551.

Simon, F., Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen 68, 241.

Simon, H., M. Sende und W. Hallwachs, Bemerkung zu dem Referat in den Physikalischen Berichten über unsere Arbeiten über „Lichtelektrizität als Funktion des Gasgehaltes" 68, 551.

Stoll, E., Die Dispersion der Luft und ihrer Hauptbestandteile im Spektralintervall: 4388–9224 Å.-E. 69, 81.

Stücklen, H., Beobachtungen über das Funkenpotential 69, 597. — Über den Einfluß von geringen Mengen Wasserdampf auf das Funkenpotential im Stickstoff 69, 625.

Suhrmann, R., Rote Grenze und spektrale Verteilung der Licht-

elektrizität des Platins in ihrer Abhängigkeit vom Gasgehalt 67, 43.

Szivessy, G., Der Temperaturkoeffizient der magnetischen Doppelbrechung 68, 127. — Über die Temperaturabhängigkeit der Dispersion der magnetischen Doppelbrechung 69, 231.

Szolnoki, I., Die Anwendung des Eötvöseffekts im bewegenden Sonnensystem 67, 73.

T.

Theodortschik, K. und B. Wwedensky, Über die Abhängigkeit der Permeabilität der Eisendrähte von der Frequenz im Wellenlängenbereich von 54 bis 705 m 68, 463.

Tiede, E. und A. Schleede, Über mit seltenen Erdmetallen aktivierte Magnesiumsulfidphosphore. Experimentalstudie 67, 573.

Tomaschek, R., Zur Kenntnis der Borsäurephosphore 67, 612.

Trautz, M. und O. Großkinsky, Die Messung der spezifischen Wärme C_v von Gasen mittels der Differentialmethode. I. Mitteilung 67, 462.

Trautz, M. und W. Seidel, Über die Lumineszenz zerfallenden Ozons 67, 527.

W.

Wagner, E. und H. Kulenkampff, Die Intensität der Reflexion von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge an Kalkspat und Steinsalz 68, 369.

Wehrli, M., Funkenpotentiale im transversalen Magnetfelde 69, 285.

Weissenberg, K., Statistische Anisotropie in kristallinischen Medien und ihre röntgenographische Bestimmung 69, 409.

Wentzel, G., Zur Theorie der Streuung von β-Strahlen 69, 335.

Wertheimer, I. u. F. Himstedt, Über den Einfluß des Druckes auf die Brechungsexponenten einiger organischer Flüssigkeiten 67, 395.

Wiedemann, E., Über al Kindis Schrift über Ebbe und Flut 67, 374.

Wien, W., Über eine Methode zur Trennung der Bogen- und Funkenlinien der Emissionsspektra 69, 325.

Wwedensky, B. und K. Theodortschik, Über die Abhängigkeit der Permeabilität der Eisendrähte von der Frequenz im Wellenlängenbereich von 54 bis 705 m 68, 463.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 6

Fabrik für physikalische, chemische und technische Apparate

Gegründet 1890 — Gegründet 1890

Pfeiffer's

Hoch-Vakuum-Pumpen
für Wissenschaft und Technik

für Saugleistungen bis 30 cbm stündlich und Vakua bis $^1/_{1000000}$ mm Hg

Neuheit! **Quecksilber-Dampfstrahlpumpe** *Neuheit!*
nach System Pfeiffer (D. R. P. angem.) ganz aus Stahl.

Rotierende Kapsel-Öl-Luftpumpe D.R.P.
mit Elektromotor direkt gekuppelt.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4—1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung. Alle Nebenapparate.

Liefern auf Verlangen!